

Der

Ingenieur.

Sammlung

von

Tafeln, Formeln und Regeln

der

Arithmetik, Geometrie und Mechanik.

Der

Ingenieur.

Sammlung von Tafeln, Formeln und Regeln der Arithmetik, Geometrie und Mechanik.

Für praktische Geometer, Mechaniker, Baumeister und Techniker überhaupt bearbeitet

von

Julius Weisbach,
Professor an der Königl. Sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

Mit 282 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1848.

The library of J. Elliot Cabot.

Vorrede.

Der Ingenieur soll ein Hilfsbuch oder Vademecum für praktische Geometer, Mechaniker und Techniker überhaupt sein; es soll derselbe dem Praktiker als Rathgeber und Gehilfe zugleich an die Hand gehen, und enthält deshalb die brauchbarsten praktischen Regeln, Formeln und Tabellen der Arithmetik, Geometrie und Mechanik. Man erwarte in diesem Werke kein Lehrbuch mit vollständigen Entwickelungen und Beweisen, man suche vielmehr in ihm ein nur Regeln, Thatsachen und Ergebnisse enthaltendes Handbuch. Ein vollständiges Lehrbuch ist, um es immer mit sich umherführen zu können, zu voluminös, und um in demselben das Gesuchte schnell aufschlagen zu können, auch zu unbequem, weil man in demselben die gewonnenen Regeln, Formeln u. s. w. nicht systematisch nebeneinander, sondern im ganzen Buche an verschiedenen Orten zerstreut vorfindet, und weil in dem Lehrbuche auch Manches des Zu-

sammenhanges und Interesses wegen mit abgehandelt werden muß, was eine unmittelbare Anwendung in der Praxis nicht zuläßt.

Die Haupterfordernisse eines Werkes, welches dem Praktiker als Hand-, Hilfs- und Taschenbuch dienen soll, sind Leichtigkeit, Bequemlichkeit und Sicherheit im Gebrauche; diesen aber wird entsprochen durch eine gedrängte und möglichst geordnete Zusammenstellung von solchen sorgfältig ausgewählten Regeln, Formeln und Tabellen, welche auf den sichersten Theorien und Thatsachen der Erfahrung basirt sind, und in dem Ingenieurwesen, der praktischen Geometrie und Mechanik, dem Maschinenwesen, der Baukunst und der Technik überhaupt, ihre Anwendung finden. Der Verfasser hofft in dem Ingenieur ein solches, das praktische Bedürfniß befriedigendes Werk zu liefern, um so mehr, da er denselben mit seinem Lehrbuche der Ingenieur- und Maschinenmechanik, von welchem baldigst der dritte und letzte Theil erscheinen wird, in den innigsten Zusammenhang gebracht hat. Dieses Lehrbuch liefert nicht allein die Ableitung und Begründung der in dem Ingenieur mitgetheilten Regeln und Formeln, sondern es enthält auch dasselbe manche Ergänzungen zu dem Ingenieur, so wie auch dieser Ergänzungen zu jenem. Uebrigens ist der Verfasser bei Bearbeitung des Ingenieurs ganz den Ansichten nachgegangen, welche er schon früher in den Vorreden zu den bis jetzt erschienenen zwei Bänden seiner Mechanik ausgesprochen hat.

Um dieses Buch nicht zu voluminös zu machen, mußten alle Lehren, welche dem ersten Unterrichte angehören und welche aus dem Gedächtnisse nicht so leicht verschwin-

den können, wie z. B. einfache Constructionen der Geometrie und Mechanik, aus demselben wegbleiben. Das Formel- und Zahlenwerk ist dagegen möglichst vollständig mitgetheilt worden, besonders hat man sich bemüht, den Gebrauch der Formeln und Regeln durch Beispiele vor Augen zu führen, und durch Tabellen zu erleichtern oder zu ersetzen. Eine große Sorgfalt ist endlich von dem Verfasser noch auf die Zusammensetzung der Formeln, und auf die Auswahl der Buchstaben in denselben verwendet worden. Die Uebersicht sehr erleichternd und das Verständniß gewiß sehr befördernd ist es, daß für eine gewisse Art von Größen auch nur gewisse Buchstaben gebraucht werden, daß z. B. durch die kleinen lateinischen Buchstaben nur Linien, durch die großen nur Flächenräume, Volumina und Gewichte, und durch die griechischen Buchstaben nur Coefficienten, Winkel und unmeßbar kleine Größen repräsentirt werden.

Ein Buch wie das vorliegende muß natürlich sein Material von sehr verschiedenen Orten her zusammentragen; das Wenigste in demselben kann Eigenthum des Verfassers sein. Wenn nun diese so höchst mannichfaltigen und verschiedenartigen Hilfsquellen hier nicht angeführt worden sind, so hat dies seinen Grund darin, daß der Ingenieur in der engsten Verbindung mit des Verfassers Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik steht, worin nicht allein eine vollständige Literatur, sondern auch eine genaue Angabe der Hilfsquellen mitgetheilt wird.

Das Preußische Maaß- und Gewichtssystem ist hier, wie auch in der Mechanik zu Grunde gelegt, und ist

auf das metrische Maaß- und Gewichtssystem nicht selten Bezug genommen worden. Uebrigens sind aber auch in dem Werke mehrere Vergleichungstabellen zwischen den in Deutschland üblichen Maaß- und Gewichtseinheiten enthalten, wodurch das Umrechnen aus einem Maaße in ein anderes sehr erleichtert wird.

Die in den letzten Paragraphen des Werkes enthaltenen Angaben über die Leistungen verschiedener Maschinen u. s. w. lassen noch Manches zu wünschen übrig. Es fehlt hier noch zu sehr an Beobachtungs- und Erfahrungsresultaten! Der Verfasser bittet die Herren Ingenieurs und andere Sachverständigen, ihn durch hier einschlagende Angaben zu unterstützen, und hofft dadurch in den Stand gesetzt zu werden, in einer etwa nöthigen zweiten Ausgabe dieses Werkes hierin etwas Vollständigeres zu liefern.

Freiberg, den 5ten September 1848.

Julius Weisbach.

Inhalt.

Erster Theil.

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Tabellen.

Zweiter Abschnitt.

Regeln und Formeln.

Erstes Kapitel.

Grundoperationen.

Zweites Kapitel.

Gleichungen.

Drittes Kapitel.

Reihen.

Zweiter Theil.

Geometrie.

Erster Abschnitt.

Tafeln.

I. Maaßtafeln.

II. Trigonometrische Tabellen.

III. Kreistafeln.

Zweiter Abschnitt.

Formeln und Regeln der theoretischen Geometrie.

Erstes Kapitel.

Planimetrie.

Zweites Kapitel.

Stereometrie.

Dritter Abschnitt.

Formeln und Regeln der praktischen Geometrie.

Erstes Kapitel.

Prüfen und Justiren der Instrumente.

Zweites Kapitel.

Formeln und Regeln.

Dritter Theil.

Mechanik.

Erster Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen der theoretischen Mechanik.

Erstes Kapitel.

Gewichtstafeln.

Zweites Kapitel.

Formeln, Regeln und Tabellen der allgemeinen Mechanik.

Drittes Kapitel.

S t a t i k.

Viertes Kapitel.

D y n a m i k.

Fünftes Kapitel.

H y d r a u l i k.

Zweiter Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen der praktischen Mechanik.

Erstes Kapitel.

Statik der Bauwerke.

Zweites Kapitel.

Mechanik der Umtriebsmaschinen.

Drittes Kapitel.

Von der Wärme und von den Dampfmaschinen.

Viertes Kapitel.

Die Zwischenmaschinen.

Fünftes Kapitel.

Die Arbeitsmaschinen.

Erster Theil.

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Tabellen.

Einleitung.

Die Grundoperationen der Arithmetik sind das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren und Wurzelausziehen, nächstdem etwa noch die Logarithmenrechnung. Die ersten beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer Einfachheit in vorkommenden Fällen unmittelbar vollzogen, die übrigen aber lassen sich mit Hilfe von besonders hierzu berechneten Tabellen meist weit kürzer ausführen. Zur Erleichterung der Multiplication und Division dienen die Producten- und Reciprokentafeln, zur Bestimmung von Potenzen und Wurzeln hat man besondere Potenzen- und Wurzelntafeln; zur Ausführung aller dieser vier Rechnungsarten werden außerdem noch die Logarithmentafeln gebraucht.

Wegen ihres beschränkten Umfanges können solche Tabellen nicht alle vorkommenden Fälle in sich enthalten; man findet in diesen vielmehr nur die Rechnungsresultate von aus nur wenigen Ziffern bestehenden und die gesuchten Werthe meist nur annähernd ausdrückenden Zahlen. Will

man nun auf die größere Genauigkeit des gesuchten Resultates nicht verzichten, so muß man noch eine Correction anbringen, die sich durch diejenige, mit benachbarten Zahlen in der Tabelle vorzunehmende Rechnung ergiebt, welche man Interpolation nennt.

Es stehen also dem Rechner mehrere Wege offen, um zu einem in Frage stehenden Zahlenergebniß zu gelangen! Er kann die Rechnung unmittelbar ausführen, er kann sich der Logarithmentafeln bedienen, er kann endlich auch, für jede Rechnungsart besonders construirte, Tafeln anwenden.

Das unmittelbare Ausrechnen ist, wenn die gegebenen Zahlen aus vielen Ziffern bestehen, sehr umständlich, und kommt deshalb in der Regel nur dann zur Anwendung, wenn von dem Ergebnisse eine Genauigkeit verlangt wird, die beim Gebrauch von Tafeln nicht erreicht werden kann. Am häufigsten bedient man sich der Logarithmentafeln, um zu Resultaten der genannten Zahlenoperationen zu gelangen. Wenn auch diese Tafeln nicht unmittelbar auf das Ergebniß führen, so sind doch die noch übrig bleibenden Operationen, wodurch man dieses erlangt, so einfach, daß der Gewinn an Zeit in Hinsicht auf die unmittelbare Berechnung in fast allen Fällen noch immer ein beträchtlicher ist.

Je nachdem von dem Resultate eine größere oder kleinere Genauigkeit verlangt wird, wendet man die Logarithmen mit mehr oder weniger Decimalen an. In dem großen Tafelwerke von Vega: Thesaurus logarithmicus completus (Lips. Weidmann, 1794.), gehen die Logarithmen bis zur zehnten Decimalstelle. Die durch Anwendung dieser Logarithmen erlangte Genauigkeit liegt aber meist außer den Grenzen, innerhalb welcher die Zahlenergebnisse des Ingenieurwesens enthalten sind.

Zu den gewöhnlichsten, eine große Genauigkeit erfordernden Rechnungen wendet man an: Georgs Freiherrn von Vega, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, herausgegeben von Hülße (Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung). Dieses, siebenstellige Logarithmen enthaltene

Werk entspricht allen zu machenden Ansprüchen vollständig und empfiehlt sich durch seine Bequemlichkeit im Gebrauche noch besonders.

In vielen Fällen noch hinreichend genau sind die Tafeln mit sechs- oder fünfstelligen Logarithmen. Es gehören unter anderen hierher: Logarithmisch-trigonometrische und andere nützliche Tafeln von M. Rühlmann (Dresden und Leipzig, Arnoldische Buchhandlung) und Tables de Logarithmes par Jêrome de la Lande (Paris etc.). Diese und ähnliche Tafeln empfehlen sich durch ihr kleines Format zum Gebrauch auf Excursionen und Reisen.

In Fällen, wenn die gegebenen Zahlen nur aus wenig Ziffern bestehen, oder wenn es nur auf die Ausmittelung eines genäherten oder an und für sich unsicheren und nicht scharf bestimmbaren Werthes ankommt, bedient man sich mit der größten Bequemlichkeit solcher Tabellen, welche die Resultate der vorgeschriebenen Zahlenoperationen unmittelbar angeben. Und wenn auch zuweilen durch den Gebrauch dieser der Zeitgewinn nicht bedeutend ausfällt, so besteht doch schon darin ein Gewinn, daß man dadurch die Ausführung von Operationen umgeht, welche eine gespannte Aufmerksamkeit erfordern und deshalb bald zur Geistesermüdung führen. Man hält durch Anwendung von Tafeln die Geistesthätigkeit mehr zusammen und sichert sich dadurch vor dem Einschleichen von übrigens vermeidlichen Fehlern!

Die Genauigkeit der auf die eine oder die andere Weise ausgeführten Rechnung muß der Schärfe von den der Rechnung zum Grunde gelegten Zahlenwerthen entsprechen. Durch ein scharf gerechnetes und in vielen Ziffern ausgedrücktes Rechnungsresultat ist nichts mehr gewonnen, als durch ein weniger genau berechnetes, aus weniger Ziffern bestehendes Rechnungsergebniß, wenn jenes über die möglichen Grenzen der Genauigkeit weit hinausgeht, dieses denselben aber noch vollkommen entspricht. So ist es z. B. ebenso genau, $\frac{1}{7} = 0{,}143$ oder $0{,}1429$ statt $0{,}14285714\ldots$ zu setzen, wenn

man weiß, daß der etwa durch Beobachtungen oder Messungen gefundene Divisor oder Nenner (7) ebenso gut um ein Zehntel seines Werthes größer als kleiner sein kann.

Die in die Rechnung eintretenden Zahlen werden meist durch Messungen oder Beobachtungen gefunden; sie enthalten deshalb auch die Fehler, Mängel und Unrichtigkeiten, welche aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und Meßwerkzeuge entspringen. Um daher die Genauigkeit und Brauchbarkeit eines Rechnungsresultates beurtheilen zu können, hat man nicht allein den Grad der Genauigkeit der Rechnung, sondern auch die Stufe der Schärfe der Messungen und Beobachtungen zu wissen nöthig.

In den gewöhnlichen Fällen des Ingenieurwesens und besonders in der Mechanik und Hydraulik hat man es meist mit Größen zu thun, die sich mit Sicherheit nur durch drei- bis vierzifferige Zahlen ausdrücken lassen, ja es kommen Fälle vor, wo die Genauigkeit selbst noch geringer ist; es sind deshalb dem Ingenieur Tabellen, in welchen nur durch wenig Ziffern ausgedrückte Zahlenwerthe enthalten sind, von besonderem Nutzen, zumal, wenn das Aufsuchen in denselben große Bequemlichkeit gewährt und die übrige Rechnung mit den aufgesuchten Zahlen Einfachheit besitzt. Solche Tabellen sind aber die folgenden Producten-, Reciproken-, Potenzen- und Wurzeltafeln, deren Werth der längere Gebrauch besonders vor Augen führen wird.

I. Productentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Productentafel.

Die nachstehende Productentafel enthält die 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 1000; sie ist daher nichts weiter als ein größeres Einmaleins. Sie besteht aus 9 Vertikalcolumnen, wovon die erste die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000, die zweite die zweifachen, die dritte die dreifachen dieser Zahlen u. s. w. enthält. Diesem zufolge gibt jede horizontale Zeile die 2, 3, 4fachen u. s. w. der vorstehenden Zahl an. So steht z. B. in der mit der Zahl 289 anfangenden Zeile und zugleich in der siebenten Vertikalcolumne die Zahl 2023, weil diese das Siebenfache der vorstehenden Zahl 289 ist.

Die Productentafel wird zur Erleichterung der Multiplication gebraucht. Durch Anwendung dieser erfordert das Multipliciren mehrziffериger Zahlen eine bloße Addition, wie in folgenden Beispielen vor Augen geführt wird:

1) $438 \times 67 = 438 \times 6 \times 10 + 438 \times 7$

$$= \left\{ \begin{matrix} 26280 \\ 3066 \end{matrix} \right\} = 29346.$$

(S. Seite 21 Zeile 19.)

2) $637 \times 489 = 637 \times 4 \times 100 + 637 \times 8 \times 10 + 637 \times 9$

$$= \left\{ \begin{matrix} 254800 \\ 50960 \\ 5733 \end{matrix} \right\} = 311493.$$

(S. Seite 28 Zeile 8.)

3) $968 \times 2573 = 968 \times 2 \times 1000 + 968 \times 5 \times 100 + 968 \times 7 \times 10 + 968 \times 3$

$$= \left\{ \begin{matrix} 1936000 \\ 484000 \\ 67760 \\ 2904 \end{matrix} \right\} = 2490664.$$

(S. Seite 39 Zeile 9.)

So lange der eine Factor des gesuchten Productes nur aus drei Ziffern besteht, hat die Ausmittelung des Productes mit Hilfe dieser Tabelle keine Schwierigkeit, bestehen aber beide Factoren aus mehr als drei Ziffern, so muß man die Rechnung in mehrere Theile zerlegen, wie in folgenden Beispielen gezeigt wird:

4) $8546 \times 2794 = 8540 \times 2794 + 2790 \times 6 + 6 \times 4$

$$= \left\{\begin{array}{r}17080000\\5978000\\768600\\34160\end{array}\right\} + 16740 + 24$$

$$= \left\{\begin{array}{r}23860760\\16764\end{array}\right\} = 23877524.$$

5) $72135 \times 3645 = 72100 \times 3645 + 3640 \times 35 + 35 \times 5$

$$= \left\{\begin{array}{r}216300000\\43260000\\2884000\\360500\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{r}109200\\18200\end{array}\right\} + 175$$

$$= \left\{\begin{array}{r}262804500\\127575\end{array}\right\} = 262932075.$$

Besondere Vortheile gewährt der Gebrauch der Productentafel bei der abgekürzten Multiplication, wo es nur auf einen genäherten Werth des Productes ankommt. Z. B.:

6) $$0{,}769 \times 3{,}645 = \left\{\begin{array}{r}2{,}307\\461\\31\\4\end{array}\right\} = 2{,}803.$$

7) $$0{,}576 \times 0{,}3854 = \left\{\begin{array}{r}0{,}1728\\461\\29\\2\end{array}\right\} = 0{,}222.$$

8) $$0{,}0904 \times 0{,}8744 = \left\{\begin{array}{r}0{,}07232\\633\\36\\4\end{array}\right\} = 0{,}07905.$$

9) $$0{,}728 \times 0{,}0037094 = \left\{\begin{array}{r}0{,}0021840\\5096\\66\\3\end{array}\right\} = 0{,}0027005.$$

Productentafel. 1 — 29.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81
10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171
20	40	60	80	100	120	140	160	180
21	42	63	84	105	126	147	168	189
22	44	66	88	110	132	154	176	198
23	46	69	92	115	138	161	184	207
24	48	72	96	120	144	168	192	216
25	50	75	100	125	150	175	200	225
26	52	78	104	130	156	182	208	234
27	54	81	108	135	162	189	216	243
28	56	84	112	140	168	196	224	252
29	58	87	116	145	174	203	232	261

Productentafel. 30 — 59.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	60	90	120	150	180	210	240	270
31	62	93	124	155	186	217	248	279
32	64	96	128	160	192	224	256	288
33	66	99	132	165	198	231	264	297
34	68	102	136	170	204	238	272	306
35	70	105	140	175	210	245	280	315
36	72	108	144	180	216	252	288	324
37	74	111	148	185	222	259	296	333
38	76	114	152	190	228	266	304	342
39	78	117	156	195	234	273	312	351
40	80	120	160	200	240	280	320	360
41	82	123	164	205	246	287	328	369
42	84	126	168	210	252	294	336	378
43	86	129	172	215	258	301	344	387
44	88	132	176	220	264	308	352	396
45	90	135	180	225	270	315	360	405
46	92	138	184	230	276	322	368	414
47	94	141	188	235	282	329	376	423
48	96	144	192	240	288	336	384	432
49	98	147	196	245	294	343	392	441
50	100	150	200	250	300	350	400	450
51	102	153	204	255	306	357	408	459
52	104	156	208	260	312	364	416	468
53	106	159	212	265	318	371	424	477
54	108	162	216	270	324	378	432	486
55	110	165	220	275	330	385	440	495
56	112	168	224	280	336	392	448	504
57	114	171	228	285	342	399	456	513
58	116	174	232	290	348	406	464	522
59	118	177	236	295	354	413	472	531

Productentafel. 60 — 89.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	120	180	240	300	360	420	480	540
61	122	183	244	305	366	427	488	549
62	124	186	248	310	372	434	496	558
63	126	189	252	315	378	441	504	567
64	128	192	256	320	384	448	512	576
65	130	195	260	325	390	455	520	585
66	132	198	264	330	396	462	528	594
67	134	201	268	335	402	469	536	603
68	136	204	272	340	408	476	544	612
69	138	207	276	345	414	483	552	621
70	140	210	280	350	420	490	560	630
71	142	213	284	355	426	497	568	639
72	144	216	288	360	432	504	576	648
73	146	219	292	365	438	511	584	657
74	148	222	296	370	444	518	592	666
75	150	225	300	375	450	525	600	675
76	152	228	304	380	456	532	608	684
77	154	231	308	385	462	539	616	693
78	156	234	312	390	468	546	624	702
79	158	237	316	395	474	553	632	711
80	160	240	320	400	480	560	640	720
81	162	243	324	405	486	567	648	729
82	164	246	328	410	492	574	656	738
83	166	249	332	415	498	581	664	747
84	168	252	336	420	504	588	672	756
85	170	255	340	425	510	595	680	765
86	172	258	344	430	516	602	688	774
87	174	261	348	435	522	609	696	783
88	176	264	352	440	528	616	704	792
89	178	267	356	445	534	623	712	801

Productentafel. 90 — 119.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	180	270	360	450	540	630	720	810
91	182	273	364	455	546	637	728	819
92	184	276	368	460	552	644	736	828
93	186	279	372	465	558	651	744	837
94	188	282	376	470	564	658	752	846
95	190	285	380	475	570	665	760	855
96	192	288	384	480	576	672	768	864
97	194	291	388	485	582	679	776	873
98	196	294	392	490	588	686	784	882
99	198	297	396	495	594	693	792	891
100	200	300	400	500	600	700	800	900
101	202	303	404	505	606	707	808	909
102	204	306	408	510	612	714	816	918
103	206	309	412	515	618	721	824	927
104	208	312	416	520	624	728	832	936
105	210	315	420	525	630	735	840	945
106	212	318	424	530	636	742	848	954
107	214	321	428	535	642	749	856	963
108	216	324	432	540	648	756	864	972
109	218	327	436	545	654	763	872	981
110	220	330	440	550	660	770	880	990
111	222	333	444	555	666	777	888	999
112	224	336	448	560	672	784	896	1008
113	226	339	452	565	678	791	904	1017
114	228	342	456	570	684	798	912	1026
115	230	345	460	575	690	805	920	1035
116	232	348	464	580	696	812	928	1044
117	234	351	468	585	702	819	936	1053
118	236	354	472	590	708	826	944	1062
119	238	357	476	595	714	833	952	1071

Productentafel. 120 — 149.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
120	240	360	480	600	720	840	960	1080
121	242	363	484	605	726	847	968	1089
122	244	366	488	610	732	854	976	1098
123	246	369	492	615	738	861	984	1107
124	248	372	496	620	744	868	992	1116
125	250	375	500	625	750	875	1000	1125
126	252	378	504	630	756	882	1008	1134
127	254	381	508	635	762	889	1016	1143
128	256	384	512	640	768	896	1024	1152
129	258	387	516	645	774	903	1032	1161
130	260	390	520	650	780	910	1040	1170
131	262	393	524	655	786	917	1048	1179
132	264	396	528	660	792	924	1056	1188
133	266	399	532	665	798	931	1064	1197
134	268	402	536	670	804	938	1072	1206
135	270	405	540	675	810	945	1080	1215
136	272	408	544	680	816	952	1088	1224
137	274	411	548	685	822	959	1096	1233
138	276	414	552	690	828	966	1104	1242
139	278	417	556	695	834	973	1112	1251
140	280	420	560	700	840	980	1120	1260
141	282	423	564	705	846	987	1128	1269
142	284	426	568	710	852	994	1136	1278
143	286	429	572	715	858	1001	1144	1287
144	288	432	576	720	864	1008	1152	1296
145	290	435	580	725	870	1015	1160	1305
146	292	438	584	730	876	1022	1168	1314
147	294	441	588	735	882	1029	1176	1323
148	296	444	592	740	888	1036	1184	1332
149	298	447	596	745	894	1043	1192	1341

Productentafel. 150 — 179.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	300	450	600	750	900	1050	1200	1350
151	302	453	604	755	906	1057	1208	1359
152	304	456	608	760	912	1064	1216	1368
153	306	459	612	765	918	1071	1224	1377
154	308	462	616	770	924	1078	1232	1386
155	310	465	620	775	930	1085	1240	1395
156	312	468	624	780	936	1092	1248	1404
157	314	471	628	785	942	1099	1256	1413
158	316	474	632	790	948	1106	1264	1422
159	318	477	636	795	954	1113	1272	1431
160	320	480	640	800	960	1120	1280	1440
161	322	483	644	805	966	1127	1288	1449
162	324	486	648	810	972	1134	1296	1458
163	326	489	652	815	978	1141	1304	1467
164	328	492	656	820	984	1148	1312	1476
165	330	495	660	825	990	1155	1320	1485
166	332	498	664	830	996	1162	1328	1494
167	334	501	668	835	1002	1169	1336	1503
168	336	504	672	840	1008	1176	1344	1512
169	338	507	676	845	1014	1183	1352	1521
170	340	510	680	850	1020	1190	1360	1530
171	342	513	684	855	1026	1197	1368	1539
172	344	516	688	860	1032	1204	1376	1548
173	346	519	692	865	1038	1211	1384	1557
174	348	522	696	870	1044	1218	1392	1566
175	350	525	700	875	1050	1225	1400	1575
176	352	528	704	880	1056	1232	1408	1584
177	354	531	708	885	1062	1239	1416	1593
178	356	534	712	890	1068	1246	1424	1602
179	358	537	716	895	1074	1253	1432	1611

Productentafel. 180 — 209.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	360	540	720	900	1080	1260	1440	1620
181	362	543	724	905	1086	1267	1448	1629
182	364	546	728	910	1092	1274	1456	1638
183	366	549	732	915	1098	1281	1464	1647
184	368	552	736	920	1104	1288	1472	1656
185	370	555	740	925	1110	1295	1480	1665
186	372	558	744	930	1116	1302	1488	1674
187	374	561	748	935	1122	1309	1496	1683
188	376	564	752	940	1128	1316	1504	1692
189	378	567	756	945	1134	1323	1512	1701
190	380	570	760	950	1140	1330	1520	1710
191	382	573	764	955	1146	1337	1528	1719
192	384	576	768	960	1152	1344	1536	1728
193	386	579	772	965	1158	1351	1544	1737
194	388	582	776	970	1164	1358	1552	1746
195	390	585	780	975	1170	1365	1560	1755
196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
197	394	591	788	985	1182	1379	1576	1773
198	396	594	792	990	1188	1386	1584	1782
199	398	597	796	995	1194	1393	1592	1791
200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800
201	402	603	804	1005	1206	1407	1608	1809
202	404	606	808	1010	1212	1414	1616	1818
203	406	609	812	1015	1218	1421	1624	1827
204	408	612	816	1020	1224	1428	1632	1836
205	410	615	820	1025	1230	1435	1640	1845
206	412	618	824	1030	1236	1442	1648	1854
207	414	621	828	1035	1242	1449	1656	1863
208	416	624	832	1040	1248	1456	1664	1872
209	418	627	836	1045	1254	1463	1672	1881

Productentafel. 210 — 239.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
210	420	630	840	1050	1260	1470	1680	1890
211	422	633	844	1055	1266	1477	1688	1899
212	424	636	848	1060	1272	1484	1696	1908
213	426	639	852	1065	1278	1491	1704	1917
214	428	642	856	1070	1284	1498	1712	1926
215	430	645	860	1075	1290	1505	1720	1935
216	432	648	864	1080	1296	1512	1728	1944
217	434	651	868	1085	1302	1519	1736	1953
218	436	654	872	1090	1308	1526	1744	1962
219	438	657	876	1095	1314	1533	1752	1971
220	440	660	880	1100	1320	1540	1760	1980
221	442	663	884	1105	1326	1547	1768	1989
222	444	666	888	1110	1332	1554	1776	1998
223	446	669	892	1115	1338	1561	1784	2007
224	448	672	896	1120	1344	1568	1792	2016
225	450	675	900	1125	1350	1575	1800	2025
226	452	678	904	1130	1356	1582	1808	2034
227	454	681	908	1135	1362	1589	1816	2043
228	456	684	912	1140	1368	1596	1824	2052
229	458	687	916	1145	1374	1603	1832	2061
230	460	690	920	1150	1380	1610	1840	2070
231	462	693	924	1155	1386	1617	1848	2079
232	464	696	928	1160	1392	1624	1856	2088
233	466	699	932	1165	1398	1631	1864	2097
234	468	702	936	1170	1404	1638	1872	2106
235	470	705	940	1175	1410	1645	1880	2115
236	472	708	944	1180	1416	1652	1888	2124
237	474	711	948	1185	1422	1659	1896	2133
238	476	714	952	1190	1428	1666	1904	2142
239	478	717	956	1195	1434	1673	1912	2151

Productentafel. 240 — 269.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
240	480	720	960	1200	1440	1680	1920	2160
241	482	723	964	1205	1446	1687	1928	2169
242	484	726	968	1210	1452	1694	1936	2178
243	486	729	972	1215	1458	1701	1944	2187
244	488	732	976	1220	1464	1708	1952	2196
245	490	735	980	1225	1470	1715	1960	2205
246	492	738	984	1230	1476	1722	1968	2214
247	494	741	988	1235	1482	1729	1976	2223
248	496	744	992	1240	1488	1736	1984	2232
249	498	747	996	1245	1494	1743	1992	2241
250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250
251	502	753	1004	1255	1506	1757	2008	2259
252	504	756	1008	1260	1512	1764	2016	2268
253	506	759	1012	1265	1518	1771	2024	2277
254	508	762	1016	1270	1524	1778	2032	2286
255	510	765	1020	1275	1530	1785	2040	2295
256	512	768	1024	1280	1536	1792	2048	2304
257	514	771	1028	1285	1542	1799	2056	2313
258	516	774	1032	1290	1548	1806	2064	2322
259	518	777	1036	1295	1554	1813	2072	2331
260	520	780	1040	1300	1560	1820	2080	2340
261	522	783	1044	1305	1566	1827	2088	2349
262	524	786	1048	1310	1572	1834	2096	2358
263	526	789	1052	1315	1578	1841	2104	2367
264	528	792	1056	1320	1584	1848	2112	2376
265	530	795	1060	1325	1590	1855	2120	2385
266	532	798	1064	1330	1596	1862	2128	2394
267	534	801	1068	1335	1602	1869	2136	2403
268	536	804	1072	1340	1608	1876	2144	2412
269	538	807	1076	1345	1614	1883	2152	2421

Productentafel. 270 — 299.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
270	540	810	1080	1350	1620	1890	2160	2430
271	542	813	1084	1355	1626	1897	2168	2439
272	544	816	1088	1360	1632	1904	2176	2448
273	546	819	1092	1365	1638	1911	2184	2457
274	548	822	1096	1370	1644	1918	2192	2466
275	550	825	1100	1375	1650	1925	2200	2475
276	552	828	1104	1380	1656	1932	2208	2484
277	554	831	1108	1385	1662	1939	2216	2493
278	556	834	1112	1390	1668	1946	2224	2502
279	558	837	1116	1395	1674	1953	2232	2511
280	560	840	1120	1400	1680	1960	2240	2520
281	562	843	1124	1405	1686	1967	2248	2529
282	564	846	1128	1410	1692	1974	2256	2538
283	566	849	1132	1415	1698	1981	2264	2547
284	568	852	1136	1420	1704	1988	2272	2556
285	570	855	1140	1425	1710	1995	2280	2565
286	572	858	1144	1430	1716	2002	2288	2574
287	574	861	1148	1435	1722	2009	2296	2583
288	576	864	1152	1440	1728	2016	2304	2592
289	578	867	1156	1445	1734	2023	2312	2601
290	580	870	1160	1450	1740	2030	2320	2610
291	582	873	1164	1455	1746	2037	2328	2619
292	584	876	1168	1460	1752	2044	2336	2628
293	586	879	1172	1465	1758	2051	2344	2637
294	588	882	1176	1470	1764	2058	2352	2646
295	590	885	1180	1475	1770	2065	2360	2655
296	592	888	1184	1480	1776	2072	2368	2664
297	594	891	1188	1485	1782	2079	2376	2673
298	596	894	1192	1490	1788	2086	2384	2682
299	598	897	1196	1495	1794	2093	2392	2691

Productentafel. 300 — 329.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700
301	602	903	1204	1505	1806	2107	2408	2709
302	604	906	1208	1510	1812	2114	2416	2718
303	606	909	1212	1515	1818	2121	2424	2727
304	608	912	1216	1520	1824	2128	2432	2736
305	610	915	1220	1525	1830	2135	2440	2745
306	612	918	1224	1530	1836	2142	2448	2754
307	614	921	1228	1535	1842	2149	2456	2763
308	616	924	1232	1540	1848	2156	2464	2772
309	618	927	1236	1545	1854	2163	2472	2781
310	620	930	1240	1550	1860	2170	2480	2790
311	622	933	1244	1555	1866	2177	2488	2799
312	624	936	1248	1560	1872	2184	2496	2808
313	626	939	1252	1565	1878	2191	2504	2817
314	628	942	1256	1570	1884	2198	2512	2826
315	630	945	1260	1575	1890	2205	2520	2835
316	632	948	1264	1580	1896	2212	2528	2844
317	634	951	1268	1585	1902	2219	2536	2853
318	636	954	1272	1590	1908	2226	2544	2862
319	638	957	1276	1595	1914	2233	2552	2871
320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880
321	642	963	1284	1605	1926	2247	2568	2889
322	644	966	1288	1610	1932	2254	2576	2898
323	646	969	1292	1615	1938	2261	2584	2907
324	648	972	1296	1620	1944	2268	2592	2916
325	650	975	1300	1625	1950	2275	2600	2925
326	652	978	1304	1630	1956	2282	2608	2934
327	654	981	1308	1635	1962	2289	2616	2943
328	656	984	1312	1640	1968	2296	2624	2952
329	658	987	1316	1645	1974	2303	2632	2961

Productentafel. 330 — 359.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
330	660	990	1320	1650	1980	2310	2640	2970
331	662	993	1324	1655	1986	2317	2648	2979
332	664	996	1328	1660	1992	2324	2656	2988
333	666	999	1332	1665	1998	2331	2664	2997
334	668	1002	1336	1670	2004	2338	2672	3006
335	670	1005	1340	1675	2010	2345	2680	3015
336	672	1008	1344	1680	2016	2352	2688	3024
337	674	1011	1348	1685	2022	2359	2696	3033
338	676	1014	1352	1690	2028	2366	2704	3042
339	678	1017	1356	1695	2034	2373	2712	3051
340	680	1020	1360	1700	2040	2380	2720	3060
341	682	1023	1364	1705	2046	2387	2728	3069
342	684	1026	1368	1710	2052	2394	2736	3078
343	686	1029	1372	1715	2058	2401	2744	3087
344	688	1032	1376	1720	2064	2408	2752	3096
345	690	1035	1380	1725	2070	2415	2760	3105
346	692	1038	1384	1730	2076	2422	2768	3114
347	694	1041	1388	1735	2082	2429	2776	3123
348	696	1044	1392	1740	2088	2436	2784	3132
349	698	1047	1396	1745	2094	2443	2792	3141
350	700	1050	1400	1750	2100	2450	2800	3150
351	702	1053	1404	1755	2106	2457	2808	3159
352	704	1056	1408	1760	2112	2464	2816	3168
353	706	1059	1412	1765	2118	2471	2824	3177
354	708	1062	1416	1770	2124	2478	2832	3186
355	710	1065	1420	1775	2130	2485	2840	3195
356	712	1068	1424	1780	2136	2492	2848	3204
357	714	1071	1428	1785	2142	2499	2856	3213
358	716	1074	1432	1790	2148	2506	2864	3222
359	718	1077	1436	1795	2154	2513	2872	3231

Productentafel. 360 — 389.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
360	720	1080	1440	1800	2160	2520	2880	3240
361	722	1083	1444	1805	2166	2527	2888	3249
362	724	1086	1448	1810	2172	2534	2896	3258
363	726	1089	1452	1815	2178	2541	2904	3267
364	728	1092	1456	1820	2184	2548	2912	3276
365	730	1095	1460	1825	2190	2555	2920	3285
366	732	1098	1464	1830	2196	2562	2928	3294
367	734	1101	1468	1835	2202	2569	2936	3303
368	736	1104	1472	1840	2208	2576	2944	3312
369	738	1107	1476	1845	2214	2583	2952	3321
370	740	1110	1480	1850	2220	2590	2960	3330
371	742	1113	1484	1855	2226	2597	2968	3339
372	744	1116	1488	1860	2232	2604	2976	3348
373	746	1119	1492	1865	2238	2611	2984	3357
374	748	1122	1496	1870	2244	2618	2992	3366
375	750	1125	1500	1875	2250	2625	3000	3375
376	752	1128	1504	1880	2256	2632	3008	3384
377	754	1131	1508	1885	2262	2639	3016	3393
378	756	1134	1512	1890	2268	2646	3024	3402
379	758	1137	1516	1895	2274	2653	3032	3411
380	760	1140	1520	1900	2280	2660	3040	3420
381	762	1143	1524	1905	2286	2667	3048	3429
382	764	1146	1528	1910	2292	2674	3056	3438
383	766	1149	1532	1915	2298	2681	3064	3447
384	768	1152	1536	1920	2304	2688	3072	3456
385	770	1155	1540	1925	2310	2695	3080	3465
386	772	1158	1544	1930	2316	2702	3088	3474
387	774	1161	1548	1935	2322	2709	3096	3483
388	776	1164	1552	1940	2328	2716	3104	3492
389	778	1167	1556	1945	2334	2723	3112	3501

Productentafel. 390 — 419.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
390	780	1170	1560	1950	2340	2730	3120	3510
391	782	1173	1564	1955	2346	2737	3128	3519
392	784	1176	1568	1960	2352	2744	3136	3528
393	786	1179	1572	1965	2358	2751	3144	3537
394	788	1182	1576	1970	2364	2758	3152	3546
395	790	1185	1580	1975	2370	2765	3160	3555
396	792	1188	1584	1980	2376	2772	3168	3564
397	794	1191	1588	1985	2382	2779	3176	3573
398	796	1194	1592	1990	2388	2786	3184	3582
399	798	1197	1596	1995	2394	2793	3192	3591
400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600
401	802	1203	1604	2005	2406	2807	3208	3609
402	804	1206	1608	2010	2412	2814	3216	3618
403	806	1209	1612	2015	2418	2821	3224	3627
404	808	1212	1616	2020	2424	2828	3232	3636
405	810	1215	1620	2025	2430	2835	3240	3645
406	812	1218	1624	2030	2436	2842	3248	3654
407	814	1221	1628	2035	2442	2849	3256	3663
408	816	1224	1632	2040	2448	2856	3264	3672
409	818	1227	1636	2045	2454	2863	3272	3681
410	820	1230	1640	2050	2460	2870	3280	3690
411	822	1233	1644	2055	2466	2877	3288	3699
412	824	1236	1648	2060	2472	2884	3296	3708
413	826	1239	1652	2065	2478	2891	3304	3717
414	828	1242	1656	2070	2484	2898	3312	3726
415	830	1245	1660	2075	2490	2905	3320	3735
416	832	1248	1664	2080	2496	2912	3328	3744
417	834	1251	1668	2085	2502	2919	3336	3753
418	836	1254	1672	2090	2508	2926	3344	3762
419	838	1257	1676	2095	2514	2933	3352	3771

Productentafel. 420 — 449.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	840	1260	1680	2100	2520	2940	3360	3780
421	842	1263	1684	2105	2526	2947	3368	3789
422	844	1266	1688	2110	2532	2954	3376	3798
423	846	1269	1692	2115	2538	2961	3384	3807
424	848	1272	1696	2120	2544	2968	3392	3816
425	850	1275	1700	2125	2550	2975	3400	3825
426	852	1278	1704	2130	2556	2982	3408	3834
427	854	1281	1708	2135	2562	2989	3416	3843
428	856	1284	1712	2140	2568	2996	3424	3852
429	858	1287	1716	2145	2574	3003	3432	3861
430	860	1290	1720	2150	2580	3010	3440	3870
431	862	1293	1724	2155	2586	3017	3448	3879
432	864	1296	1728	2160	2592	3024	3456	3888
433	866	1299	1732	2165	2598	3031	3464	3897
434	868	1302	1736	2170	2604	3038	3472	3906
435	870	1305	1740	2175	2610	3045	3480	3915
436	872	1308	1744	2180	2616	3052	3488	3924
437	874	1311	1748	2185	2622	3059	3496	3933
438	876	1314	1752	2190	2628	3066	3504	3942
439	878	1317	1756	2195	2634	3073	3512	3951
440	880	1320	1760	2200	2640	3080	3520	3960
441	882	1323	1764	2205	2646	3087	3528	3969
442	884	1326	1768	2210	2652	3094	3536	3978
443	886	1329	1772	2215	2658	3101	3544	3987
444	888	1332	1776	2220	2664	3108	3552	3996
445	890	1335	1780	2225	2670	3115	3560	4005
446	892	1338	1784	2230	2676	3122	3568	4014
447	894	1341	1788	2235	2682	3129	3576	4023
448	896	1344	1792	2240	2688	3136	3584	4032
449	898	1347	1796	2245	2694	3143	3592	4041

Productentafel. 450 — 479.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	900	1350	1800	2250	2700	3150	3600	4050
451	902	1353	1804	2255	2706	3157	3608	4059
452	904	1356	1808	2260	2712	3164	3616	4068
453	906	1359	1812	2265	2718	3171	3624	4077
454	908	1362	1816	2270	2724	3178	3632	4086
455	910	1365	1820	2275	2730	3185	3640	4095
456	912	1368	1824	2280	2736	3192	3648	4104
457	914	1371	1828	2285	2742	3199	3656	4113
458	916	1374	1832	2290	2748	3206	3664	4122
459	918	1377	1836	2295	2754	3213	3672	4131
460	920	1380	1840	2300	2760	3220	3680	4140
461	922	1383	1844	2305	2766	3227	3688	4149
462	924	1386	1848	2310	2772	3234	3696	4158
463	926	1389	1852	2315	2778	3241	3704	4167
464	928	1392	1856	2320	2784	3248	3712	4176
465	930	1395	1860	2325	2790	3255	3720	4185
466	932	1398	1864	2330	2796	3262	3728	4194
467	934	1401	1868	2335	2802	3269	3736	4203
468	936	1404	1872	2340	2808	3276	3744	4212
469	938	1407	1876	2345	2814	3283	3752	4221
470	940	1410	1880	2350	2820	3290	3760	4230
471	942	1413	1884	2355	2826	3297	3768	4239
472	944	1416	1888	2360	2832	3304	3776	4248
473	946	1419	1892	2365	2838	3311	3784	4257
474	948	1422	1896	2370	2844	3318	3792	4266
475	950	1425	1900	2375	2850	3325	3800	4275
476	952	1428	1904	2380	2856	3332	3808	4284
477	954	1431	1908	2385	2862	3339	3816	4293
478	956	1434	1912	2390	2868	3346	3824	4302
479	958	1437	1916	2395	2874	3353	3832	4311

Productentafel. 480 — 509.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
480	960	1440	1920	2400	2880	3360	3840	4320
481	962	1443	1924	2405	2886	3367	3848	4329
482	964	1446	1928	2410	2892	3374	3856	4338
483	966	1449	1932	2415	2898	3381	3864	4347
484	968	1452	1936	2420	2904	3388	3872	4356
485	970	1455	1940	2425	2910	3395	3880	4365
486	972	1458	1944	2430	2916	3402	3888	4374
487	974	1461	1948	2435	2922	3409	3896	4383
488	976	1464	1952	2440	2928	3416	3904	4392
489	978	1467	1956	2445	2934	3423	3912	4401
490	980	1470	1960	2450	2940	3430	3920	4410
491	982	1473	1964	2455	2946	3437	3928	4419
492	984	1476	1968	2460	2952	3444	3936	4428
493	986	1479	1972	2465	2958	3451	3944	4437
494	988	1482	1976	2470	2964	3458	3952	4446
495	990	1485	1980	2475	2970	3465	3960	4455
496	992	1488	1984	2480	2976	3472	3968	4464
497	994	1491	1988	2485	2982	3479	3976	4473
498	996	1494	1992	2490	2988	3486	3984	4482
499	998	1497	1996	2495	2994	3493	3992	4491
500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
501	1002	1503	2004	2505	3006	3507	4008	4509
502	1004	1506	2008	2510	3012	3514	4016	4518
503	1006	1509	2012	2515	3018	3521	4024	4527
504	1008	1512	2016	2520	3024	3528	4032	4536
505	1010	1515	2020	2525	3030	3535	4040	4545
506	1012	1518	2024	2530	3036	3542	4048	4554
507	1014	1521	2028	2535	3042	3549	4056	4563
508	1016	1524	2032	2540	3048	3556	4064	4572
509	1018	1527	2036	2545	3054	3563	4072	4581

Productentafel. 510 — 539.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
510	1020	1530	2040	2550	3060	3570	4080	4590
511	1022	1533	2044	2555	3066	3577	4088	4599
512	1024	1536	2048	2560	3072	3584	4096	4608
513	1026	1539	2052	2565	3078	3591	4104	4617
514	1028	1542	2056	2570	3084	3598	4112	4626
515	1030	1545	2060	2575	3090	3605	4120	4635
516	1032	1548	2064	2580	3096	3612	4128	4644
517	1034	1551	2068	2585	3102	3619	4136	4653
518	1036	1554	2072	2590	3108	3626	4144	4662
519	1038	1557	2076	2595	3114	3633	4152	4671
520	1040	1560	2080	2600	3120	3640	4160	4680
521	1042	1563	2084	2605	3126	3647	4168	4689
522	1044	1566	2088	2610	3132	3654	4176	4698
523	1046	1569	2092	2615	3138	3661	4184	4707
524	1048	1572	2096	2620	3144	3668	4192	4716
525	1050	1575	2100	2625	3150	3675	4200	4725
526	1052	1578	2104	2630	3156	3682	4208	4734
527	1054	1581	2108	2635	3162	3689	4216	4743
528	1056	1584	2112	2640	3168	3696	4224	4752
529	1058	1587	2116	2645	3174	3703	4232	4761
530	1060	1590	2120	2650	3180	3710	4240	4770
531	1062	1593	2124	2655	3186	3717	4248	4779
532	1064	1596	2128	2660	3192	3724	4256	4788
533	1066	1599	2132	2665	3198	3731	4264	4797
534	1068	1602	2136	2670	3204	3738	4272	4806
535	1070	1605	2140	2675	3210	3745	4280	4815
536	1072	1608	2144	2680	3216	3752	4288	4824
537	1074	1611	2148	2685	3222	3759	4296	4833
538	1076	1614	2152	2690	3228	3766	4304	4842
539	1078	1617	2156	2695	3234	3773	4312	4851

Productentafel. 540 — 569

1	2	3	4	5	6	7	8	9
540	1080	1620	2160	2700	3240	3780	4320	4860
541	1082	1623	2164	2705	3246	3787	4328	4869
542	1084	1626	2168	2710	3252	3794	4336	4878
543	1086	1629	2172	2715	3258	3801	4344	4887
544	1088	1632	2176	2720	3264	3808	4352	4896
545	1090	1635	2180	2725	3270	3815	4360	4905
546	1092	1638	2184	2730	3276	3822	4368	4914
547	1094	1641	2188	2735	3282	3829	4376	4923
548	1096	1644	2192	2740	3288	3836	4384	4932
549	1098	1647	2196	2745	3294	3843	4392	4941
550	1100	1650	2200	2750	3300	3850	4400	4950
551	1102	1653	2204	2755	3306	3857	4408	4959
552	1104	1656	2208	2760	3312	3864	4416	4968
553	1106	1659	2212	2765	3318	3871	4424	4977
554	1108	1662	2216	2770	3324	3878	4432	4986
555	1110	1665	2220	2775	3330	3885	4440	4995
556	1112	1668	2224	2780	3336	3892	4448	5004
557	1114	1671	2228	2785	3342	3899	4456	5013
558	1116	1674	2232	2790	3348	3906	4464	5022
559	1118	1677	2236	2795	3354	3913	4472	5031
560	1120	1680	2240	2800	3360	3920	4480	5040
561	1122	1683	2244	2805	3366	3927	4488	5049
562	1124	1686	2248	2810	3372	3934	4496	5058
563	1126	1689	2252	2815	3378	3941	4504	5067
564	1128	1692	2256	2820	3384	3948	4512	5076
565	1130	1695	2260	2825	3390	3955	4520	5085
566	1132	1698	2264	2830	3396	3962	4528	5094
567	1134	1701	2268	2835	3402	3969	4536	5103
568	1136	1704	2272	2840	3408	3976	4544	5112
569	1138	1707	2276	2845	3414	3983	4552	5121

Productentafel. 570 — 599.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
570	1140	1710	2280	2850	3420	3990	4560	5130
571	1142	1713	2284	2855	3426	3997	4568	5139
572	1144	1716	2288	2860	3432	4004	4576	5148
573	1146	1719	2292	2865	3438	4011	4584	5157
574	1148	1722	2296	2870	3444	4018	4592	5166
575	1150	1725	2300	2875	3450	4025	4600	5175
576	1152	1728	2304	2880	3456	4032	4608	5184
577	1154	1731	2308	2885	3462	4039	4616	5193
578	1156	1734	2312	2890	3468	4046	4624	5202
579	1158	1737	2316	2895	3474	4053	4632	5211
580	1160	1740	2320	2900	3480	4060	4640	5220
581	1162	1743	2324	2905	3486	4067	4648	5229
582	1164	1746	2328	2910	3492	4074	4656	5238
583	1166	1749	2332	2915	3498	4081	4664	5247
584	1168	1752	2336	2920	3504	4088	4672	5256
585	1170	1755	2340	2925	3510	4095	4680	5265
586	1172	1758	2344	2930	3516	4102	4688	5274
587	1174	1761	2348	2935	3522	4109	4696	5283
588	1176	1764	2352	2940	3528	4116	4704	5292
589	1178	1767	2356	2945	3534	4123	4712	5301
590	1180	1770	2360	2950	3540	4130	4720	5310
591	1182	1773	2364	2955	3546	4137	4728	5319
592	1184	1776	2368	2960	3552	4144	4736	5328
593	1186	1779	2372	2965	3558	4151	4744	5337
594	1183	1782	2376	2970	3564	4158	4752	5346
595	1190	1785	2380	2975	3570	4165	4760	5355
596	1192	1788	2384	2980	3576	4172	4768	5364
597	1194	1791	2388	2985	3582	4179	4776	5373
598	1196	1794	2392	2990	3588	4186	4784	5382
599	1198	1797	2396	2995	3594	4193	4792	5391

Productentafel. 600 — 629.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400
601	1202	1803	2404	3005	3606	4207	4808	5409
602	1204	1806	2408	3010	3612	4214	4816	5418
603	1206	1809	2412	3015	3618	4221	4824	5427
604	1208	1812	2416	3020	3624	4228	4832	5436
605	1210	1815	2420	3025	3630	4235	4840	5445
606	1212	1818	2424	3030	3636	4242	4848	5454
607	1214	1821	2428	3035	3642	4249	4856	5463
608	1216	1824	2432	3040	3648	4256	4864	5472
609	1218	1827	2436	3045	3654	4263	4872	5481
610	1220	1830	2440	3050	3660	4270	4880	5490
611	1222	1833	2444	3055	3666	4277	4888	5499
612	1224	1836	2448	3060	3672	4284	4896	5508
613	1226	1839	2452	3065	3678	4291	4904	5517
614	1228	1842	2456	3070	3684	4298	4912	5526
615	1230	1845	2460	3075	3690	4305	4920	5535
616	1232	1848	2464	3080	3696	4312	4928	5544
617	1234	1851	2468	3085	3702	4319	4936	5553
618	1236	1854	2472	3090	3708	4326	4944	5562
619	1238	1857	2476	3095	3714	4333	4952	5571
620	1240	1860	2480	3100	3720	4340	4960	5580
621	1242	1863	2484	3105	3726	4347	4968	5589
622	1244	1866	2488	3110	3732	4354	4976	5598
623	1246	1869	2492	3115	3738	4361	4984	5607
624	1248	1872	2496	3120	3744	4368	4992	5616
625	1250	1875	2500	3125	3750	4375	5000	5625
626	1252	1878	2504	3130	3756	4382	5008	5634
627	1254	1881	2508	3135	3762	4389	5016	5643
628	1256	1884	2512	3140	3768	4396	5024	5652
629	1258	1887	2516	3145	3774	4403	5032	5661

Productentafel. 630 — 659.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
630	1260	1890	2520	3150	3780	4410	5040	5670
631	1262	1893	2524	3155	3786	4417	5048	5679
632	1264	1896	2528	3160	3792	4424	5056	5688
633	1266	1899	2532	3165	3798	4431	5064	5697
634	1268	1902	2536	3170	3804	4438	5072	5706
635	1270	1905	2540	3175	3810	4445	5080	5715
636	1272	1908	2544	3180	3816	4452	5088	5724
637	1274	1911	2548	3185	3822	4459	5096	5733
638	1276	1914	2552	3190	3828	4466	5104	5742
639	1278	1917	2556	3195	3834	4473	5112	5751
640	1280	1920	2560	3200	3840	4480	5120	5760
641	1282	1923	2564	3205	3846	4487	5128	5769
642	1284	1926	2568	3210	3852	4494	5136	5778
643	1286	1929	2572	3215	3858	4501	5144	5787
644	1288	1932	2576	3220	3864	4508	5152	5796
645	1290	1935	2580	3225	3870	4515	5160	5805
646	1292	1938	2584	3230	3876	4522	5168	5814
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823
648	1296	1944	2592	3240	3888	4536	5184	5832
649	1298	1947	2596	3245	3894	4543	5192	5841
650	1300	1950	2600	3250	3900	4550	5200	5850
651	1302	1953	2604	3255	3906	4557	5208	5859
652	1304	1956	2608	3260	3912	4564	5216	5868
653	1306	1959	2612	3265	3918	4571	5224	5877
654	1308	1962	2616	3270	3924	4578	5232	5886
655	1310	1965	2620	3275	3930	4585	5240	5895
656	1312	1968	2624	3280	3936	4592	5248	5904
657	1314	1971	2628	3285	3942	4599	5256	5913
658	1316	1974	2632	3290	3948	4606	5264	5922
659	1318	1977	2636	3295	3954	4613	5272	5931

Productentafel. 660 — 689.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
660	1320	1980	2640	3300	3960	4620	5280	5940
661	1322	1983	2644	3305	3966	4627	5288	5949
662	1324	1986	2648	3310	3972	4634	5296	5958
663	1326	1989	2652	3315	3978	4641	5304	5967
664	1328	1992	2656	3320	3984	4648	5312	5976
665	1330	1995	2660	3325	3990	4655	5320	5985
666	1332	1998	2664	3330	3996	4662	5328	5994
667	1334	2001	2668	3335	4002	4669	5336	6003
668	1336	2004	2672	3340	4008	4676	5344	6012
669	1338	2007	2676	3345	4014	4683	5352	6021
670	1340	2010	2680	3350	4020	4690	5360	6030
671	1342	2013	2684	3355	4026	4697	5368	6039
672	1344	2016	2688	3360	4032	4704	5376	6048
673	1346	2019	2692	3365	4038	4711	5384	6057
674	1348	2022	2696	3370	4044	4718	5392	6066
675	1350	2025	2700	3375	4050	4725	5400	6075
676	1352	2028	2704	3380	4056	4732	5408	6084
677	1354	2031	2708	3385	4062	4739	5416	6093
678	1356	2034	2712	3390	4068	4746	5424	6102
679	1358	2037	2716	3395	4074	4753	5432	6111
680	1360	2040	2720	3400	4080	4760	5440	6120
681	1362	2043	2724	3405	4086	4767	5448	6129
682	1364	2046	2728	3410	4092	4774	5456	6138
683	1366	2049	2732	3415	4098	4781	5464	6147
684	1368	2052	2736	3420	4104	4788	5472	6156
685	1370	2055	2740	3425	4110	4795	5480	6165
686	1372	2058	2744	3430	4116	4802	5488	6174
687	1374	2061	2748	3435	4122	4809	5496	6183
688	1376	2064	2752	3440	4128	4816	5504	6192
689	1378	2067	2756	3445	4134	4823	5512	6201

Productentafel. 690 — 719.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
690	1380	2070	2760	3450	4140	4830	5520	6210
691	1382	2073	2764	3455	4146	4837	5528	6219
692	1384	2076	2768	3460	4152	4844	5536	6228
693	1386	2079	2772	3465	4158	4851	5544	6237
694	1388	2082	2776	3470	4164	4858	5552	6246
695	1390	2085	2780	3475	4170	4865	5560	6255
696	1392	2088	2784	3480	4176	4872	5568	6264
697	1394	2091	2788	3485	4182	4879	5576	6273
698	1396	2094	2792	3490	4188	4886	5584	6282
699	1398	2097	2796	3495	4194	4893	5592	6291
700	1400	2100	2800	3500	4200	4900	5600	6300
701	1402	2103	2804	3505	4206	4907	5608	6309
702	1404	2106	2808	3510	4212	4914	5616	6318
703	1406	2109	2812	3515	4218	4921	5624	6327
704	1408	2112	2816	3520	4224	4928	5632	6336
705	1410	2115	2820	3525	4230	4935	5640	6345
706	1412	2118	2824	3530	4236	4942	5648	6354
707	1414	2121	2828	3535	4242	4949	5656	6363
708	1416	2124	2832	3540	4248	4956	5664	6372
709	1418	2127	2836	3545	4254	4963	5672	6381
710	1420	2130	2840	3550	4260	4970	5680	6390
711	1422	2133	2844	3555	4266	4977	5688	6399
712	1424	2136	2848	3560	4272	4984	5696	6408
713	1426	2139	2852	3565	4278	4991	5704	6417
714	1428	2142	2856	3570	4284	4998	5712	6426
715	1430	2145	2860	3575	4290	5005	5720	6435
716	1432	2148	2864	3580	4296	5012	5728	6444
717	1434	2151	2868	3585	4302	5019	5736	6453
718	1436	2154	2872	3590	4308	5026	5744	6462
719	1438	2157	2876	3595	4314	5033	5752	6471

Productentafel. 720 — 749.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
720	1440	2160	2880	3600	4320	5040	5760	6480
721	1442	2163	2884	3605	4326	5047	5768	6489
722	1444	2166	2888	3610	4332	5054	5776	6498
723	1446	2169	2892	3615	4338	5061	5784	6507
724	1448	2172	2896	3620	4344	5068	5792	6516
725	1450	2175	2900	3625	4350	5075	5800	6525
726	1452	2178	2904	3630	4356	5082	5808	6534
727	1454	2181	2908	3635	4362	5089	5816	6543
728	1456	2184	2912	3640	4368	5096	5824	6552
729	1458	2187	2916	3645	4374	5103	5832	6561
730	1460	2190	2920	3650	4380	5110	5840	6570
731	1462	2193	2924	3655	4386	5117	5848	6579
732	1464	2196	2928	3660	4392	5124	5856	6588
733	1466	2199	2932	3665	4398	5131	5864	6597
734	1468	2202	2936	3670	4404	5138	5872	6606
735	1470	2205	2940	3675	4410	5145	5880	6615
736	1472	2208	2944	3680	4416	5152	5888	6624
737	1474	2211	2948	3685	4422	5159	5896	6633
738	1476	2214	2952	3690	4428	5166	5904	6642
739	1478	2217	2956	3695	4434	5173	5912	6651
740	1480	2220	2960	3700	4440	5180	5920	6660
741	1482	2223	2964	3705	4446	5187	5928	6669
742	1484	2226	2968	3710	4452	5194	5936	6678
743	1486	2229	2972	3715	4458	5201	5944	6687
744	1488	2232	2976	3720	4464	5208	5952	6696
745	1490	2235	2980	3725	4470	5215	5960	6705
746	1492	2238	2984	3730	4476	5222	5968	6714
747	1494	2241	2988	3735	4482	5229	5976	6723
748	1496	2244	2992	3740	4488	5236	5984	6732
749	1498	2247	2996	3745	4494	5243	5992	6741

Productentafel. 750 — 779.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	1500	2250	3000	3750	4500	5250	6000	6750
751	1502	2253	3004	3755	4506	5257	6008	6759
752	1504	2256	3008	3760	4512	5264	6016	6768
753	1506	2259	3012	3765	4518	5271	6024	6777
754	1508	2262	3016	3770	4524	5278	6032	6786
755	1510	2265	3020	3775	4530	5285	6040	6795
756	1512	2268	3024	3780	4536	5292	6048	6804
757	1514	2271	3028	3785	4542	5299	6056	6813
758	1516	2274	3032	3790	4548	5306	6064	6822
759	1518	2277	3036	3795	4554	5313	6072	6831
760	1520	2280	3040	3800	4560	5320	6080	6840
761	1522	2283	3044	3805	4566	5327	6088	6849
762	1524	2286	3048	3810	4572	5334	6096	6858
763	1526	2289	3052	3815	4578	5341	6104	6867
764	1528	2292	3056	3820	4584	5348	6112	6876
765	1530	2295	3060	3825	4590	5355	6120	6885
766	1532	2298	3064	3830	4596	5362	6128	6894
767	1534	2301	3068	3835	4602	5369	6136	6903
768	1536	2304	3072	3840	4608	5376	6144	6912
769	1538	2307	3076	3845	4614	5383	6152	6921
770	1540	2310	3080	3850	4620	5390	6160	6930
771	1542	2313	3084	3855	4626	5397	6168	6939
772	1544	2316	3088	3860	4632	5404	6176	6948
773	1546	2319	3092	3865	4638	5411	6184	6957
774	1548	2322	3096	3870	4644	5418	6192	6966
775	1550	2325	3100	3875	4650	5425	6200	6975
776	1552	2328	3104	3880	4656	5432	6208	6984
777	1554	2331	3108	3885	4662	5439	6216	6993
778	1556	2334	3112	3890	4668	5446	6224	7002
779	1558	2337	3116	3895	4674	5453	6232	7011

Productentafel. 780 — 809.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
780	1560	2340	3120	3900	4680	5460	6240	7020
781	1562	2343	3124	3905	4686	5467	6248	7029
782	1564	2346	3128	3910	4692	5474	6256	7038
783	1566	2349	3132	3915	4698	5481	6264	7047
784	1568	2352	3136	3920	4704	5488	6272	7056
785	1570	2355	3140	3925	4710	5495	6280	7065
786	1572	2358	3144	3930	4716	5502	6288	7074
787	1574	2361	3148	3935	4722	5509	6296	7083
788	1576	2364	3152	3940	4728	5516	6304	7092
789	1578	2367	3156	3945	4734	5523	6312	7101
790	1580	2370	3160	3950	4740	5530	6320	7110
791	1582	2373	3164	3955	4746	5537	6328	7119
792	1584	2376	3168	3960	4752	5544	6336	7128
793	1586	2379	3172	3965	4758	5551	6344	7137
794	1588	2382	3176	3970	4764	5558	6352	7146
795	1590	2385	3180	3975	4770	5565	6360	7155
796	1592	2388	3184	3980	4776	5572	6368	7164
797	1594	2391	3188	3985	4782	5579	6376	7173
798	1596	2394	3192	3990	4788	5586	6384	7182
799	1598	2397	3196	3995	4794	5593	6392	7191
800	1600	2400	3200	4000	4800	5600	6400	7200
801	1602	2403	3204	4005	4806	5607	6408	7209
802	1604	2406	3208	4010	4812	5614	6416	7218
803	1606	2409	3212	4015	4818	5621	6424	7227
804	1608	2412	3216	4020	4824	5628	6432	7236
805	1610	2415	3220	4025	4830	5635	6440	7245
806	1612	2418	3224	4030	4836	5642	6448	7254
807	1614	2421	3228	4035	4842	5649	6456	7263
808	1616	2424	3232	4040	4848	5656	6464	7272
809	1618	2427	3236	4045	4854	5663	6472	7281

Productentafel. 810 — 839.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
810	1620	2430	3240	4050	4860	5670	6480	7290
811	1622	2433	3244	4055	4866	5677	6488	7299
812	1624	2436	3248	4060	4872	5684	6496	7308
813	1626	2439	3252	4065	4878	5691	6504	7317
814	1628	2442	3256	4070	4884	5698	6512	7326
815	1630	2445	3260	4075	4890	5705	6520	7335
816	1632	2448	3264	4080	4896	5712	6528	7344
817	1634	2451	3268	4085	4902	5719	6536	7353
818	1636	2454	3272	4090	4908	5726	6544	7362
819	1638	2457	3276	4095	4914	5733	6552	7371
820	1640	2460	3280	4100	4920	5740	6560	7380
821	1642	2463	3284	4105	4926	5747	6568	7389
822	1644	2466	3288	4110	4932	5754	6576	7398
823	1646	2469	3292	4115	4938	5761	6584	7407
824	1648	2472	3296	4120	4944	5768	6592	7416
825	1650	2475	3300	4125	4950	5775	6600	7425
826	1652	2478	3304	4130	4956	5782	6608	7434
827	1654	2481	3308	4135	4962	5789	6616	7443
828	1656	2484	3312	4140	4968	5796	6624	7452
829	1658	2487	3316	4145	4974	5803	6632	7461
830	1660	2490	3320	4150	4980	5810	6640	7470
831	1662	2493	3324	4155	4986	5817	6648	7479
832	1664	2496	3328	4160	4992	5824	6656	7488
833	1666	2499	3332	4165	4998	5831	6664	7497
834	1668	2502	3336	4170	5004	5838	6672	7506
835	1670	2505	3340	4175	5010	5845	6680	7515
836	1672	2508	3344	4180	5016	5852	6688	7524
837	1674	2511	3348	4185	5022	5859	6696	7533
838	1676	2514	3352	4190	5028	5866	6704	7542
839	1678	2517	3356	4195	5034	5873	6712	7551

Productentafel. 840 — 869.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
840	1680	2520	3360	4200	5040	5880	6720	7560
841	1682	2523	3364	4205	5046	5887	6728	7569
842	1684	2526	3368	4210	5052	5894	6736	7578
843	1686	2529	3372	4215	5058	5901	6744	7587
844	1688	2532	3376	4220	5064	5908	6752	7596
845	1690	2535	3380	4225	5070	5915	6760	7605
846	1692	2538	3384	4230	5076	5922	6768	7614
847	1694	2541	3388	4235	5082	5929	6776	7623
848	1696	2544	3392	4240	5088	5936	6784	7632
849	1698	2547	3396	4245	5094	5943	6792	7641
850	1700	2550	3400	4250	5100	5950	6800	7650
851	1702	2553	3404	4255	5106	5957	6808	7659
852	1704	2556	3408	4260	5112	5964	6816	7668
853	1706	2559	3412	4265	5118	5971	6824	7677
854	1708	2562	3416	4270	5124	5978	6832	7686
855	1710	2565	3420	4275	5130	5985	6840	7695
856	1712	2568	3424	4280	5136	5992	6848	7704
857	1714	2571	3428	4285	5142	5999	6856	7713
858	1716	2574	3432	4290	5148	6006	6864	7722
859	1718	2577	3436	4295	5154	6013	6872	7731
860	1720	2580	3440	4300	5160	6020	6880	7740
861	1722	2583	3444	4305	5166	6027	6888	7749
862	1724	2586	3448	4310	5172	6034	6896	7758
863	1726	2589	3452	4315	5178	6041	6904	7767
864	1728	2592	3456	4320	5184	6048	6912	7776
865	1730	2595	3460	4325	5190	6055	6920	7785
866	1732	2598	3464	4330	5196	6062	6928	7794
867	1734	2601	3468	4335	5202	6069	6936	7803
868	1736	2604	3472	4340	5208	6076	6944	7812
869	1738	2607	3476	4345	5214	6083	6952	7821

Productentafel. 870 — 899.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
870	1740	2610	3480	4350	5220	6090	6960	7830
871	1742	2613	3484	4355	5226	6097	6968	7839
872	1744	2616	3488	4360	5232	6104	6976	7848
873	1746	2619	3492	4365	5238	6111	6984	7857
874	1748	2622	3496	4370	5244	6118	6992	7866
875	1750	2625	3500	4375	5250	6125	7000	7875
876	1752	2628	3504	4380	5256	6132	7008	7884
877	1754	2631	3508	4385	5262	6139	7016	7893
878	1756	2634	3512	4390	5268	6146	7024	7902
879	1758	2637	3516	4395	5274	6153	7032	7911
880	1760	2640	3520	4400	5280	6160	7040	7920
881	1762	2643	3524	4405	5286	6167	7048	7929
882	1764	2646	3528	4410	5292	6174	7056	7938
883	1766	2649	3532	4415	5298	6181	7064	7947
884	1768	2652	3536	4420	5304	6188	7072	7956
885	1770	2655	3540	4425	5310	6195	7080	7965
886	1772	2658	3544	4430	5316	6202	7088	7974
887	1774	2661	3548	4435	5322	6209	7096	7983
888	1776	2664	3552	4440	5328	6216	7104	7992
889	1778	2667	3556	4445	5334	6223	7112	8001
890	1780	2670	3560	4450	5340	6230	7120	8010
891	1782	2673	3564	4455	5346	6237	7128	8019
892	1784	2676	3568	4460	5352	6244	7136	8028
893	1786	2679	3572	4465	5358	6251	7144	8037
894	1788	2682	3576	4470	5364	6258	7152	8046
895	1790	2685	3580	4475	5370	6265	7160	8055
896	1792	2688	3584	4480	5376	6272	7168	8064
897	1794	2691	3588	4485	5382	6279	7176	8073
898	1796	2694	3592	4490	5388	6286	7184	8082
899	1798	2697	3596	4495	5394	6293	7192	8091

Productentafel. 900 — 929.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100
901	1802	2703	3604	4505	5406	6307	7208	8109
902	1804	2706	3608	4510	5412	6314	7216	8118
903	1806	2709	3612	4515	5418	6321	7224	8127
904	1808	2712	3616	4520	5424	6328	7232	8136
905	1810	2715	3620	4525	5430	6335	7240	8145
906	1812	2718	3624	4530	5436	6342	7248	8154
907	1814	2721	3628	4535	5442	6349	7256	8163
908	1816	2724	3632	4540	5448	6356	7264	8172
909	1818	2727	3636	4545	5454	6363	7272	8181
910	1820	2730	3640	4550	5460	6370	7280	8190
911	1822	2733	3644	4555	5466	6377	7288	8199
912	1824	2736	3648	4560	5472	6384	7296	8208
913	1826	2739	3652	4565	5478	6391	7304	8217
914	1828	2742	3656	4570	5484	6398	7312	8226
915	1830	2745	3660	4575	5490	6405	7320	8235
916	1832	2748	3664	4580	5496	6412	7328	8244
917	1834	2751	3668	4585	5502	6419	7336	8253
918	1836	2754	3672	4590	5508	6426	7344	8262
919	1838	2757	3676	4595	5514	6433	7352	8271
920	1840	2760	3680	4600	5520	6440	7360	8280
921	1842	2763	3684	4605	5526	6447	7368	8289
922	1844	2766	3688	4610	5532	6454	7376	8298
923	1846	2769	3692	4615	5538	6461	7384	8307
924	1848	2772	3696	4620	5544	6468	7392	8316
925	1850	2775	3700	4625	5550	6475	7400	8325
926	1852	2778	3704	4630	5556	6482	7408	8334
927	1854	2781	3708	4635	5562	6489	7416	8343
928	1856	2784	3712	4640	5568	6496	7424	8352
929	1858	2787	3716	4645	5574	6503	7432	8361

Productentafel. 930 — 959.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
930	1860	2790	3720	4650	5580	6510	7440	8370
931	1862	2793	3724	4655	5586	6517	7448	8379
932	1864	2796	3728	4660	5592	6524	7456	8388
933	1866	2799	3732	4665	5598	6531	7464	8397
934	1868	2802	3736	4670	5604	6538	7472	8406
935	1870	2805	3740	4675	5610	6545	7480	8415
936	1872	2808	3744	4680	5616	6552	7488	8424
937	1874	2811	3748	4685	5622	6559	7496	8433
938	1876	2814	3752	4690	5628	6566	7504	8442
939	1878	2817	3756	4695	5634	6573	7512	8451
940	1880	2820	3760	4700	5640	6580	7520	8460
941	1882	2823	3764	4705	5646	6587	7528	8469
942	1884	2826	3768	4710	5652	6594	7536	8478
943	1886	2829	3772	4715	5658	6601	7544	8487
944	1888	2832	3776	4720	5664	6608	7552	8496
945	1890	2835	3780	4725	5670	6615	7560	8505
946	1892	2838	3784	4730	5676	6622	7568	8514
947	1894	2841	3788	4735	5682	6629	7576	8523
948	1896	2844	3792	4740	5688	6636	7584	8532
949	1898	2847	3796	4745	5694	6643	7592	8541
950	1900	2850	3800	4750	5700	6650	7600	8550
951	1902	2853	3804	4755	5706	6657	7608	8559
952	1904	2856	3808	4760	5712	6664	7616	8568
953	1906	2859	3812	4765	5718	6671	7624	8577
954	1908	2862	3816	4770	5724	6678	7632	8586
955	1910	2865	3820	4775	5730	6685	7640	8595
956	1912	2868	3824	4780	5736	6692	7648	8604
957	1914	2871	3828	4785	5742	6699	7656	8613
958	1916	2874	3832	4790	5748	6706	7664	8622
959	1918	2877	3836	4795	5754	6713	7672	8631

Productentafel. 960 — 989.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
960	1920	2880	3840	4800	5760	6720	7680	8640
961	1922	2883	3844	4805	5766	6727	7688	8649
962	1924	2886	3848	4810	5772	6734	7696	8658
963	1926	2889	3852	4815	5778	6741	7704	8667
964	1928	2892	3856	4820	5784	6748	7712	8676
965	1930	2895	3860	4825	5790	6755	7720	8685
966	1932	2898	3864	4830	5796	6762	7728	8694
967	1934	2901	3868	4835	5802	6769	7736	8703
968	1936	2904	3872	4840	5808	6776	7744	8712
969	1938	2907	3876	4845	5814	6783	7752	8721
970	1940	2910	3880	4850	5820	6790	7760	8730
971	1942	2913	3884	4855	5826	6797	7768	8739
972	1944	2916	3888	4860	5832	6804	7776	8748
973	1946	2919	3892	4865	5838	6811	7784	8757
974	1948	2922	3896	4870	5844	6818	7792	8766
975	1950	2925	3900	4875	5850	6825	7800	8775
976	1952	2928	3904	4880	5856	6832	7808	8784
977	1954	2931	3908	4885	5862	6839	7816	8793
978	1956	2934	3912	4890	5868	6846	7824	8802
979	1958	2937	3916	4895	5874	6853	7832	8811
980	1960	2940	3920	4900	5880	6860	7840	8820
981	1962	2943	3924	4905	5886	6867	7848	8829
982	1964	2946	3928	4910	5892	6874	7856	8838
983	1966	2949	3932	4915	5898	6881	7864	8847
984	1968	2952	3936	4920	5904	6888	7872	8856
985	1970	2955	3940	4925	5910	6895	7880	8865
986	1972	2958	3944	4930	5916	6902	7888	8874
987	1974	2961	3948	4935	5922	6909	7896	8883
988	1976	2964	3952	4940	5928	6916	7904	8892
989	1978	2967	3956	4945	5934	6923	7912	8901

Productentafel. 990 — 999.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
990	1980	2970	3960	4950	5940	6930	7920	8910
991	1982	2973	3964	4955	5946	6937	7928	8919
992	1984	2976	3968	4960	5952	6944	7936	8928
993	1986	2979	3972	4965	5958	6951	7944	8937
994	1988	2982	3976	4970	5964	6958	7952	8946
995	1990	2985	3980	4975	5970	6965	7960	8955
996	1992	2988	3984	4980	5976	6972	7968	8964
997	1994	2991	3988	4985	5982	6979	7976	8973
998	1996	2994	3992	4990	5988	6986	7984	8982
999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991

II. Reciprokentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Reciprokentafel.

Die nachfolgende Reciprokentafel enthält die reciproken Werthe der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis 1000, oder giebt die Stammbrüche $^1/_1$, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ u. s. w. bis $^1/_{1000}$ in Decimalbrüchen ausgedrückt an. Die erste Vertikalcolumne dieser Tafel drückt die Einer und Zehner, die oberste Horizontalcolumne aber die hierzu gehörigen Hunderte der gegebenen Zahl oder des Nenners vom gegebenen Stammbruche aus; die übrigen Zahlen sind die den gegebenen Zahlen entsprechenden Reciproken oder Decimalbrüche. Jede dieser Zahlen gehört demjenigen Grundwerthe oder Stammbruche an, welcher mit derselben in einerlei Vertikal- und Horizontalcolumne liegt. So entspricht z. B. der Werth 0,004219 dem Grundwerthe 237 oder Stammbruche $^1/_{237}$, weil derselbe in der mit 37 anfangenden Horizontal- und mit 200 beginnenden Vertikalcolumne befindlich ist. Umgekehrt folgt

aus der Tafel der reciproke Werth von 546 oder der Stammbruch $^1/_{546} = 0{,}001832$, weil diese Zahl in den Durchschnitt der mit 46 anfangenden Horizontal- und der mit 500 beginnenden Vertikalcolumne zugleich steht. Hiernach findet man auch $^1/_{837} = 0{,}001195$ und $0{,}001976 = {}^1/_{506}$.

Besteht die gegebene Zahl oder der Nenner des gegebenen Stammbruches aus vier Ziffern, z. B. 2376, so findet man den gesuchten reciproken Werth oder Stammbruch durch Interpolation auf folgende Weise. Der reciproke Werth von der kleinen Zahl 2370 ist 0,0004219 und der von um 10 größeren Zahl 2380 = 0,0004202; es ist also der letztere Werth um $0{,}0004219 - 0{,}0004202 = 0{,}0000017$ kleiner als der erstere. Die gegebene Zahl 2376 ist aber um 6 größer als die kleinere Zahl 2370; deshalb hat man denn auch ihren reciproken Werth um $^6/_{10} \times 0{,}0000017 = 0{,}0000010$ kleiner als den reciproken Werth 0,0004219 von 2370; es ist demnach der in Frage stehende reciproke Werth von $2376 = 0{,}0004219 - 0{,}0000010 = 0{,}0004209$. Auf gleiche Weise findet man den reciproken Werth von

$$304{,}2 = 0{,}003289 - {}^2/_{10} \times (0{,}003289 - 0{,}003279)$$
$$= 0{,}003289 - 0{,}000002 = 0{,}003287.$$

Ebenso ist $\frac{1}{41{,}27} = 0{,}02427 - 0{,}7 \times 0{,}00006$
$$= 0{,}02427 - 0{,}00004 = 0{,}02423.$$

Mit Hilfe der reciproken Werthe läßt sich die Division in Multiplication umsetzen, denn der reciproke Werth des Divisors gibt durch Multiplication mit dem Dividenden den Quotienten. Z. B. $\frac{385}{237}$ ist $= \frac{1}{237} \times 385 = 0{,}004219 \times 385 = 1{,}624\ldots$; ferner $\frac{9{,}2}{0{,}638} = \frac{9200}{638} = 0{,}001567 \,.\, 9200 = 14{,}42\ldots.$

Besonders vortheilhaft stellen sich die Producten- und Reciprokentafel bei Auflösung von Proportionen heraus, wie folgendes Beispiel vor Augen führt.

Wenn $x : 32{,}5 = 179 : 623$; so ist

$$x = \frac{32{,}5 \times 179}{623} = 0{,}001605 \times 58175 = 9{,}337.$$

Reciprokentafel.

Nr.	0	100	200	300	400
0	∞	010000	005000	003333	002500
1	1,000000	009901	004975	003322	002494
2	500000	009804	004951	003311	002488
3	333333	009709	004926	003300	002481
4	250000	009615	004902	003289	002475
5	200000	009524	004878	003279	002469
6	166667	009434	004854	003268	002463
7	142857	009346	004831	003257	002457
8	125000	009259	004807	003247	002451
9	111111	009174	004785	003236	002445
10	100000	009091	004762	003226	002439
11	090909	009009	004739	003215	002433
12	083333	008929	004717	003205	002427
13	076923	008850	004695	003195	002421
14	071429	008772	004673	003185	002416
15	066667	008696	004651	003175	002410
16	062500	008621	004630	003165	002404
17	058824	008547	004608	003155	002398
18	055556	008475	004587	003145	002392
19	052632	008403	004566	003135	002386
20	050000	008333	004545	003125	002381
21	047619	008264	004525	003115	002375
22	045455	008197	004505	003106	002370
23	043478	008130	004484	003096	002364
24	041667	008065	004464	003086	002358
25	040000	008000	004444	003077	002353
26	038462	007936	004425	003068	002347
27	037037	007874	004405	003058	002342
28	035714	007812	004386	003049	002337
29	034483	007752	004367	003040	002331

Reciprokentafel.

Nr.	500	600	700	800	900
0	002000	001667	001429	001250	001111
1	001996	001664	001427	001248	001110
2	001992	001661	001425	001247	001109
3	001988	001658	001422	001245	001107
4	001984	001656	001420	001244	001106
5	001980	001653	001418	001242	001105
6	001976	001650	001416	001241	001104
7	001972	001647	001414	001239	001103
8	001969	001645	001412	001238	001101
9	001965	001642	001410	001236	001100
10	001961	001639	001408	001235	001099
11	001957	001637	001406	001233	001098
12	001953	001634	001404	001232	001096
13	001949	001631	001403	001230	001095
14	001946	001629	001401	001229	001094
15	001942	001626	001399	001227	001093
16	001938	001623	001397	001225	001092
17	001934	001621	001395	001224	001091
18	001931	001618	001393	001222	001089
19	001927	001616	001391	001221	001088
20	001923	001613	001389	001220	001087
21	001919	001610	001387	001218	001086
22	001916	001608	001385	001217	001085
23	001912	001605	001383	001215	001083
24	001908	001603	001381	001214	001082
25	001905	001600	001379	001212	001081
26	001901	001597	001377	001211	001080
27	001898	001595	001376	001209	001079
28	001894	001592	001374	001208	001078
29	001890	001590	001372	001206	001077

Reciprokentafel.

Nr.	0	100	200	300	400
30	033333	007692	004348	003030	002326
31	032258	007634	004329	003021	002320
32	031250	007576	004310	003012	002315
33	030303	007519	004292	003003	002309
34	029412	007463	004274	002994	002304
35	028571	007407	004255	002985	002299
36	027778	007353	004237	002976	002294
37	027027	007299	004219	002967	002288
38	026316	007246	004202	002959	002283
39	025641	007194	004184	002950	002278
40	025000	007143	004167	002941	002273
41	024390	007092	004149	002933	002268
42	023809	007042	004132	002924	002262
43	023256	006993	004115	002915	002257
44	022727	006944	004098	002907	002252
45	022222	006897	004082	002899	002247
46	021739	006849	004065	002890	002242
47	021277	006803	004049	002882	002237
48	020833	006757	004032	002874	002232
49	020408	006711	004016	002865	002227
50	020000	006667	004000	002857	002222
51	019608	006623	003984	002849	002217
52	019231	006579	003968	002841	002212
53	018868	006536	003953	002833	002208
54	018519	006494	003937	002825	002203
55	018182	006452	003922	002817	002198
56	017857	006410	003906	002809	002193
57	017544	006369	003891	002801	002188
58	017241	006329	003876	002793	002183
59	016949	006289	003861	002786	002179

Reciprokentafel.

Nr.	500	600	700	800	900
30	001887	001587	001370	001205	001075
31	001883	001585	001368	001203	001074
32	001880	001582	001366	001202	001073
33	001876	001580	001364	001200	001072
34	001873	001577	001362	001199	001071
35	001870	001575	001361	001198	001070
36	001866	001572	001359	001196	001068
37	001862	001570	001357	001195	001067
38	001859	001567	001355	001193	001066
39	001855	001565	001353	001192	001065
40	001852	001563	001351	001190	001064
41	001848	001560	001350	001189	001063
42	001845	001558	001348	001188	001062
43	001842	001555	001346	001186	001060
44	001838	001553	001344	001185	001059
45	001835	001550	001342	001183	001058
46	001832	001548	001340	001182	001057
47	001828	001546	001339	001181	001056
48	001825	001543	001337	001179	001055
49	001821	001541	001335	001178	001054
50	001818	001538	001333	001176	001053
51	001815	001536	001332	001175	001052
52	001812	001534	001330	001174	001050
53	001808	001531	001328	001172	001049
54	001805	001529	001326	001171	001048
55	001802	001527	001325	001170	001047
56	001799	001524	001323	001168	001046
57	001795	001522	001321	001167	001045
58	001792	001520	001319	001166	001044
59	001789	001517	001318	001164	001043

Reciprokentafel.

Nr.	0	100	200	300	400
60	016667	006250	003846	002778	002174
61	016393	006211	003831	002770	002169
62	016129	006173	003817	002762	002165
63	015873	006135	003802	002755	002160
64	015625	006097	003788	002747	002155
65	015385	006061	003774	002740	002151
66	015152	006024	003759	002732	002146
67	014925	005988	003745	002725	002141
68	014706	005952	003731	002717	002137
69	014493	005917	003717	002710	002132
70	014286	005882	003704	002703	002128
71	014085	005848	003690	002695	002123
72	013889	005814	003676	002688	002119
73	013699	005780	003663	002681	002114
74	013514	005747	003650	002674	002110
75	013333	005714	003636	002667	002105
76	013158	005682	003623	002660	002101
77	012987	005650	003610	002653	002096
78	012820	005618	003597	002646	002092
79	012658	005587	003584	002639	002088
80	012500	005556	003571	002632	002083
81	012346	005525	003559	002625	002079
82	012195	005494	003546	002618	002075
83	012048	005464	003534	002611	002070
84	011905	005435	003521	002604	002066
85	011765	005405	003509	002597	002062
86	011628	005376	003497	002591	002058
87	011494	005348	003484	002584	002053
88	011364	005319	003472	002577	002049
89	011236	005291	003460	002571	002045

Reciprokentafel.

Nr.	500	600	700	800	900
60	001786	001515	001316	001163	001042
61	001783	001513	001314	001161	001041
62	001779	001511	001312	001160	001040
63	001776	001508	001311	001159	001038
64	001773	001506	001309	001157	001037
65	001770	001504	001307	001156	001036
66	001767	001502	001305	001155	001035
67	001764	001499	001304	001153	001034
68	001761	001497	001302	001152	001033
69	001757	001495	001300	001151	001032
70	001754	001493	001299	001149	001031
71	001751	001490	001297	001148	001030
72	001748	001488	001295	001147	001029
73	001745	001486	001294	001145	001028
74	001742	001484	001292	001144	001027
75	001739	001481	001290	001143	001026
76	001736	001479	001289	001142	001025
77	001733	001477	001287	001140	001024
78	001730	001475	001285	001139	001022
79	001727	001473	001284	001138	001021
80	001724	001471	001282	001136	001020
81	001721	001468	001280	001135	001019
82	001718	001466	001279	001133	001018
83	001715	001464	001277	001132	001017
84	001712	001462	001276	001131	001016
85	001709	001460	001274	001130	001015
86	001706	001458	001272	001129	001014
87	001704	001456	001271	001127	001013
88	001701	001453	001269	001126	001012
89	001698	001451	001267	001125	001011

Reciprokentafel.

Nr.	0	100	200	300	400
90	011111	005263	003448	002564	002041
91	010989	005236	003436	002558	002037
92	010870	005208	003425	002551	002033
93	010753	005181	003413	002545	002028
94	010638	005155	003401	002538	002024
95	010526	005128	003390	002532	002020
96	010417	005102	003378	002525	002016
97	010309	005076	003367	002519	002012
98	010204	005051	003356	002513	002008
99	010101	005025	003344	002506	002004

III. Potenzentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Potenzentafel.

Die Potenzentafel besteht aus zwei Theilen; der eine enthält die Quadrate, und der andere die Cuben aller Zahlen von 1 bis 1000. Die Ziffern in der ersten Vertikalreihe geben die Einer und Zehner, die der ersten Horizontalreihe aber die Hunderte der gegebenen Grundzahl an, die entsprechende Potenz (Quadrat oder Cubus) befindet sich mit den ersten Ziffern in einerlei Horizontalreihe und mit den die Hunderte bezeichnenden Ziffern in einerlei Vertikalreihe. Man findet hiernach zu einer gegebenen Zahl das Quadrat oder den Cubus, indem man die erste Ziffer der vorgelegten Zahl in der ersten Horizontal-, die aus den beiden andern Ziffern bestehende Zahl aber in der ersten Vertikalreihe aufsucht, und nun von der ersten Stelle abwärts und von der zweiten seitwärts bis zur Begegnung fortrückt; an der so gefundenen Stelle steht die in Frage stehende Potenz. Hiernach findet man z. B. 467^2 oder das Quadrat von $467 = 218089$, weil diese Zahl im Durchschnitt von der mit 400 anfangenden Vertikal- und der 67 an der Spitze habenden Horizontalcolumne steht; ebenso ist 547^3, oder der Cubus von $547, = 163667323$, weil diese dem zweiten Theil der Tafel angehörige Zahl in der mit

Reciprokentafel.

Nr.	500	600	700	800	900
90	001695	001449	001266	001124	001010
91	001692	001447	001264	001122	001009
92	001689	001445	001263	001121	001008
93	001686	001443	001261	001120	001007
94	001684	001441	001259	001119	001006
95	001681	001439	001258	001117	001005
96	001678	001437	001256	001116	001004
97	001675	001435	001255	001115	001003
98	001672	001433	001253	001114	001002
99	001669	001431	001252	001112	001001

---

500 überschriebenen Vertikal- und in der siebenundvierzigsten Horizontalcolumne zugleich enthalten ist.

Besteht die gegebene Zahl aus mehr als drei Ziffern, so findet man ihre Potenz entweder durch Interpolation, oder durch Anwendung einer besondern arithmetischen Regel. Die einfache Interpolation gibt z. B. für $3{,}754^2$, da $3{,}76^2 = 14{,}1376$ und $3{,}75^2 = 14{,}0625$ ist,

$$= 14{,}0625 + 0{,}4 \times (14{,}1376 - 14{,}0625)$$
$$= 14{,}0625 + 0{,}4 \times 0{,}0751$$
$$= 14{,}0625 + 0{,}0300 = 14{,}0925.$$

Ebenso gibt sie $27{,}68^3$, da $27{,}7^3 = 21253{,}9\ldots$ und $27{,}6^3 = 21024{,}6$ ist, $= 21024{,}6 + 0{,}8 \times (253{,}9 - 24{,}6)$ $= 21024{,}6 + 183{,}4 = 21208.$

Die Algebra gibt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab$ und
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b$,
wofern b gegen a sehr klein ist. Wie beide Formeln zur Auffindung der Quadrate und Cuben mehrzifferiger Zahlen zu gebrauchen sind, mögen folgende Beispiele vor Augen führen:

$$0{,}9367^2 = 0{,}9360^2 + 2 \cdot 0{,}9360 \times 0{,}0007 = 0{,}876096 + 0{,}001310$$
$$= 0{,}8774.$$

$$0{,}4802^3 = 0{,}4800^3 + 3 \,.\, 0{,}4800^2 \times 0{,}0002$$
$$= 0{,}110592 + 0{,}23040 \times 0{,}0006 = 0{,}11059 + 0{,}00014$$
$$= 0{,}11073.$$

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
0	0	10000	40000	90000	160000
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
0	250000	360000	490000	640000	810000
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601
50	2500	22500	62500	122500	202500
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601
50	302500	422500	562500	722500	902500
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001

2) Cuben.

	0	100	200	300	400
0	0	1000000	8000000	27000000	64000000
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929

Potenzentafel. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001

---

2) Cuben.

	500	600	700	800	900
0	125000000	216000000	343000000	512000000	729000000
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429

Potenzentafel. 2) Cuben.

	0	100	200	300	400
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71992296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519

Potenzentafel. 2) Cuben.

	500	600	700	800	900
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019

Potenzentafel. 2) Cuben.

	0	100	200	300	400
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709

Potenzentafel. 2) Cuben.

	500	600	700	800	900
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209

Potenzentafel. 2) Cuben.

	0	100	200	300	400
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499

Potenzentafel. 2) Cuben.

	500	600	700	800	900
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999

IV. Wurzeltafel.

Einrichtung und Gebrauch der Wurzeltafel.

Die Wurzeltafel enthält die Quadrat- und Cubikwurzeln aller Zahlen der Reihe 1, 2, 3..... bis 1000; ihre Einrichtung ist vollkommen übereinstimmend mit der Einrichtung der Potenzentafel. Man findet dieser zufolge die Quadrat- oder Cubikwurzel einer dreizifferigen Zahl, wenn man die durch die letzten beiden Ziffern ausgedrückte Zahl in der ersten Vertikalcolumne aufsucht und von da horizontal fortgeht, bis man in die Vertikalcolumne kommt, an deren Spitze die erste Ziffer der gegebenen Zahl steht.

Hiernach ist z. B. die Quadratwurzel von 567 oder $\sqrt{567} = 23{,}8118$, denn diese Zahl steht unter 500 in derjenigen horizontalen Zeile, an deren Spitze die Zahl 67 steht. Ferner ist $\sqrt{5{,}67} = 2{,}38118$; auch $\sqrt{0{,}0567} = 0{,}238118$ u. s. w. Ebenso findet man die Cubikwurzel aus 279 oder $\sqrt[3]{279} = 6{,}5343$, auch $\sqrt[3]{0{,}279} = 0{,}65343$.

Besteht die gegebene Zahl aus mehr als drei Ziffern, so ist zur Ermittelung der Wurzel das Interpolationsverfahren oder die Anwendung einer besondern Regel der Arithmetik nöthig. Das Interpoliren ist das gewöhnliche. Durch dasselbe findet man z. B.:

$$\sqrt{1845} = \sqrt{1800+45} = 42{,}426 + 0{,}45 \times (43{,}589 - 42{,}426)$$
$$= 42{,}426 + 0{,}45 \times 1{,}163 = 42{,}426 + 0{,}523$$
$$= 42{,}95;$$

ebenso: $\sqrt{18{,}45} = 4{,}295$ und $\sqrt{0{,}1845} = 0{,}4295$.

Ferner:

$$\sqrt[3]{7451} = \sqrt[3]{7000+451} = 19{,}129 + 0{,}451 \times (20{,}000 - 19{,}129)$$
$$= 19{,}129 + 0{,}451 \times 0{,}871 = 19{,}129 + 0{,}393$$
$$= 19{,}52\ldots \text{ (richtiger 19,53)},$$

ebenso: $\sqrt{7{,}451} = 1{,}953\ldots$ u. s. w.

Auch in folgenden Fällen, wo die gegebene Zahl nur aus drei Ziffern besteht, oder Nullen anzuhängen sind, um die Zahl zur Wurzelextraction geschickt zu machen, ist die Interpolation nothwendig, z. B.:

$$\sqrt[2]{59,3} = \sqrt[2]{59,30} = \sqrt{59+0,30}$$
$$= 7,6811 + 0,3 \times (7,7460 - 7,6811)$$
$$= 7,6811 + 0,0195 = 7,7006.$$

$$\sqrt[3]{6,29} = \sqrt[3]{6,290} = \sqrt[3]{6+0,29}$$
$$= 1,8171 + 0,29 \times (1,9129 - 1,8171)$$
$$= 1,8171 + 0,0278 = 1,845$$

(richtiger 1,846).

Statt der Interpolation läßt sich bei Erreichung einer größern Genauigkeit von folgenden Formeln Gebrauch machen, wobei aber nicht die Wurzel-, sondern die Potenzentafel in Anwendung zu bringen ist.

Es ist annähernd $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2\,a}$ und

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3\,a^2},$$ wofern nur

b viel kleiner ist als a.

Hiernach findet man z. B.:

$$\sqrt{5521} = \sqrt{5476+45} = 74 + \frac{45}{2.74}$$
$$= 74,304 \text{ (richtiger } 74,303).$$

ebenso $\sqrt{74,8} = \sqrt{74,80} = \sqrt{73,96 + 0,84}$

$$= 8,6 + \frac{0,84}{2\,.\,8,6} = 8,6 + 0,0488 = 8,649.$$

Ferner: $\sqrt[3]{14,53} = \sqrt[3]{14,530} = \sqrt[3]{13,824 + 0,706}$

$$= 2,4 + \frac{0,706}{3 \times (2,4)^2}$$
$$= 2,4 + \frac{0,706}{17,28} = 2,440..$$

und $\sqrt[3]{0,5631} = \sqrt[3]{0,563100} = \sqrt[3]{0,551368 + 0,011732}$

$$= 0,82 + \frac{0,011732}{3.\,0,6724} = 0,8258.$$

5

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
0	0,0000	10,0000	14,1421	17,3205	20,0000
1	1,0000	10,0499	14,1774	17.3494	20,0250
2	1,4142	10,0995	14,2127	17,3781	20,0499
3	1,7321	10,1489	14,2478	17,4069	20,0749
4	2,0000	10,1980	14,2829	17,4356	20,0998
5	2,2361	10,2470	14,3178	17,4642	20,1246
6	2,4495	10,2956	14,3527	17,4929	20,1494
7	2,6458	10,3441	14,3875	17,5214	20,1742
8	2,8284	10,3923	14,4222	17,5499	20,1990
9	3,0000	10,4403	14,4568	17,5784	20,2237
10	3,1623	10,4881	14,4914	17,6068	20,2485
11	3,3166	10,5357	14,5258	17.6352	20,2731
12	3,4641	10,5830	14,5602	17,6635	20,2978
13	3,6056	10,6301	14,5945	17 6918	20,3224
14	3,7417	10,6771	14,6287	17,7200	20,3470
15	3,8730	10,7238	14,6629	17,7482	20.3715
16	4,0000	10,7703	14,6969	17,7764	20,3961
17	4,1231	10,8167	14,7309	17,8045	20,4206
18	4,2426	10,8628	14,7648	17,8326	24,4450
19	4,3589	10,9087	14,7986	17,8606	20,4695
20	4,4721	10,9545	14,8324	17.8885	20,4939
21	4.5826	11,0000	14.8661	17,9165	20,5183
22	4,6904	11,0454	14.8997	17,9444	20,5426
23	4,7958	11,0905	14.9332	17,9722	20,5670
24	4,8990	11,1355	14,9666	18,0000	20,5913
25	5,0000	11,1803	15,0000	18,0278	20,6155
26	5,0990	11,2250	15,0333	18,0555	20,6398
27	5,1962	11.2694	15,0665	18,0831	20,6640
28	5,2915	11,3137	15,0997	18,1103	20.6882
29	5,3852	11,3578	15,1327	18,1384	20,7123

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
0	22,3607	24,4949	26,4575	28,2843	30,0000
1	22,3830	24,5153	26,4764	28,3019	30,0167
2	22,4054	24,5357	26,4953	28,3196	30,0333
3	22,4277	24.5561	26,5141	28,3373	30,0500
4	22,4499	24,5764	26,5330	28,3549	30,0666
5	22,4722	24,5967	26,5518	28,3725	30,0832
6	22,4944	24,6171	26.5707	28,3901	30,0998
7	22,5167	24,6374	26,5895	28,4077	30,1164
8	22,5389	24,6577	26,6083	28,4253	30,1330
9	22,5610	24,6779	26,6271	28,4429	30,1496
10	22.5832	24,6982	26,6458	28,4605	30.1662
11	22.6053	24,7184	26,6646	28,4781	30,1828
12	22,6274	24,7386	26,6833	28,4956	30,1993
13	22,6495	24,7588	26,7021	28,5132	30,2159
14	22,6716	24,7790	26,7208	28,5307	30,2324
15	22,6936	24,7992	26,7395	28,5482	30,2490
16	22,7156	24,8193	26,7582	28,5657	30,2655
17	22,7376	24,8395	26,7769	28,5832	30,2820
18	22,7596	24,8596	26,7955	28,6007	30,2985
19	22,7816	24,8797	26,8142	28,6182	30,3150
20	22,8035	24,8998	26,8328	28,6356	30,3315
21	22,8254	24,9199	26,8514	28,6531	30,3480
22	22,8473	24,9399	26,8701	28,6705	30,3645
23	22,8692	24,9600	26,8887	28,6880	30.3809
24	22,8910	24,9800	26,9072	28,7054	30,3974
25	22,9129	25,0000	26 9258	28.7228	30,4138
26	22.9347	25,0200	26,9444	28,7402	30,4302
27	22,9565	25,0400	26,9629	28.7576	30,4467
28	22,9783	25,0599	26.9815	28.7750	30,4631
29	23,0000	25,0799	27,0000	28,7924	30,4795

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
30	5,4772	11,4018	15,1658	18,1659	20,7364
31	5,5678	11,4455	15,1987	18,1934	20,7605
32	5,6569	11,4891	15,2315	18,2209	20,7846
33	5,7446	11,5326	15,2643	18 2483	20,8087
34	5,8310	11,5758	15,2971	18,2757	20,8327
35	5,9161	11,6190	15,3297	18,3030	20,8567
36	6,0000	11.6619	15,3623	18,3303	20,8806
37	6,0828	11,7047	15.3948	18,3576	20,9045
38	6,1644	11,7473	15,4272	18.3848	20,9284
39	6,2450	11,7898	15,4596	18,4120	20,9523
40	6,3246	11,8322	15,4919	18,4391	20,9762
41	6,4031	11,8743	15,5242	18,4662	21,0000
42	6,4807	11,9164	15,5563	18,4932	21,0238
43	6,5574	11,9583	15.5885	18,5203	21,0476
44	6,6332	12,0000	15,6205	18,5472	21,0713
45	6,7082	12,0416	15.6525	18 5742	21,0950
46	6,7823	12.0830	15,6844	18,6011	21,1187
47	6,8557	12,1244	15,7162	18,6279	21,1424
48	6,9282	12,1655	15,7480	18,6548	21,1660
49	7,0000	12,2066	15,7797	18,6815	21,1896
50	7,0711	12,2474	15,8114	18,7083	21,2132
51	7,1414	12,2832	15,8430	18,7350	21,2368
52	7,2111	12,3288	15,8745	18,7617	21.2603
53	7,2801	12,3693	15,9060	18,7883	21,2838
54	7,3485	12,4097	15,9374	18,8149	21,3073
55	7.4162	12,4499	15,9687	18.8414	21,3307
56	7,4833	12,4900	16,0000	18,8680	21,3542
57	7,5498	12,5300	16,0312	18,8944	21.3776
58	7,6158	12,5698	16,0624	18,9209	21,4009
59	7,6811	12,6095	16,0935	18,9473	21,4243

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
30	23,0217	25,0998	27,0185	28,8097	30,4959
31	23,0434	25,1197	27,0370	28.8271	30,5123
32	23,0651	25,1396	27,0555	28,8444	30,5287
33	23,0868	25,1595	27,0740	28,8617	30,5450
34	23,1084	25,1794	27,0924	28,8791	30,5614
35	23,1301	25,1992	27,1109	28.8964	30,5778
36	23,1517	25,2190	27,1293	28,9137	30,5941
37	23,1733	25,2389	27,1477	28,9310	30,6105
38	23,1948	25,2587	27,1662	28.9482	30,6268
39	23,2164	25,2784	27,1846	28,9655	30 6431
40	23,2379	25,2982	27,2029	28,9828	30,6594
41	23,2594	25,3180	27,2213	29,0000	30,6757
42	23.2809	25,3377	27,2397	29,0172	30,6920
43	23,3024	25,3574	27,2580	29,0345	30,7083
44	23,3238	25,3772	27,2764	29,0517	30,7246
45	23,3452	25,3969	27,2947	29,0689	30,7409
46	23,3666	25,4165	27,3130	29,0861	30,7571
47	23,3880	25,4362	27,3313	29,1033	30,7734
48	23,4094	25,4558	27,3496	29,1204	30,7896
49	23,4307	25,4755	27,3679	29,1376	30,8058
50	23,4521	25,4951	27,3861	29,1548	30,8221
51	23,4734	25,5147	27,4044	29,1719	30,8383
52	23,4947	25,5343	27,4226	29,1890	30,8545
53	23,5160	25,5539	27,4408	29,2062	30,8707
54	23,5372	25.5734	27,4591	29,2233	30,8869
55	23,5584	25,5930	27,4773	29,2404	30,9031
56	23,5797	25,6125	27,4955	29,2575	30,9192
57	23,6008	25,6320	27,5136	29,2746	30,9354
58	23,6220	25,6515	27,5318	29,2916	30,9516
59	23,6432	25,6710	27,5500	29,3087	30,9677

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
60	7.7460	12.6491	16,1245	18,9737	21,4476
61	7,8102	12,6886	16.1555	19,0000	21,4709
62	7,8740	12,7279	16,1864	19,0263	21,4942
63	7,9373	12.7671	16,2173	19,0526	21,5174
64	8,0000	12,8062	16,2481	19,0788	21,5407
65	8,0623	12,8452	16,2788	19,1050	21,5639
66	8,1240	12,8841	16,3095	19,1311	21,5870
67	8,1854	12,9228	16,3401	19,1572	21,6102
68	8.2462	12,9615	16,3707	19,1833	21,6333
69	8,3066	13,0000	16,4012	19,2094	21,6564
70	8,3666	13,0384	16,4317	19,2354	21,6795
71	8,4261	13,0767	16,4621	19.2614	21,7025
72	8,4853	13,1149	16,4924	19,2873	21,7256
73	8,5440	13 1529	16,5227	19,3132	21,7486
74	8,6023	13,1909	16,5529	19,3391	21,7715
75	8,6603	13,2288	16,5831	19,3649	21.7945
76	8,7178	13,2665	16.6132	19,3907	21,8174
77	8,7750	13,3041	16,6433	19,4165	21,8403
78	8,8318	13.3417	16,6733	19,4422	21,8632
79	8,8882	13,3791	16,7033	19,4679	21,8861
80	8,9443	13,4164	16,7332	19,4936	21,9089
81	9.0000	13,4536	16,7631	19,5192	21,9317
82	9,0554	13,4907	16,7929	19,5448	21,9545
83	9,1104	13,5277	16,8226	19,5704	21,9773
84	9,1652	13,5647	16,8523	19,5959	22,0000
85	9,2195	13,6015	16,8819	19,6214	22,0227
86	9,2736	13,6382	16,9115	19,6469	22,0454
87	9,3274	13.6748	16,9411	19,6723	22,0681
88	9,3808	13,7113	16,9706	19,6977	22,0907
89	9,4340	13,7477	17,0000	19,7231	22,1133

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
60	23,6643	25,6905	27,5681	29,3258	30,9839
61	23,6854	25,7099	27,5862	29,3428	31,0000
62	23,7065	25,7294	27,6043	29,3598	31,0161
63	23,7276	25,7488	27,6225	29,3769	31,0322
64	23,7487	25,7682	27,6405	29,3939	31,0483
65	23,7697	25,7876	27,6586	29,4109	31,0644
66	23,7908	25,8070	27,6767	29,4279	31,0805
67	23,8118	25,8263	27,6948	29,4449	31,0966
68	23,8328	25,8457	27,7128	29,4618	31,1127
69	23,8537	25,8650	27,7308	29,4788	31,1288
70	23,8747	25,8844	27,7489	29,4958	31,1448
71	23,8956	25,9037	27,7669	29,5127	31,1609
72	23,9165	25,9230	27,7849	29,5296	31,1769
73	23,9374	25,9422	27,8029	29,5466	31,1929
74	23,9583	25,9615	27,8209	29,5635	31,2090
75	23,9792	25,9808	27,8388	29,5804	31,2250
76	24,0000	26,0000	27,8568	29,5973	31,2410
77	24,0208	26,0192	27,8747	29,6142	31,2570
78	24,0416	26,0384	27,8927	29,6311	31,2730
79	24,0624	26,0576	27,9106	29,6479	31,2890
80	24,0832	26,0768	27,9285	29,6648	31,3050
81	24,1039	26,0960	27,9464	29,6816	31,3209
82	24,1247	26,1151	27,9643	29,6985	31,3369
83	24,1454	26,1343	27,9821	29,7153	31,3528
84	24,1661	26,1534	28,0000	29,7321	31,3688
85	24,1868	26,1725	28,0179	29,7489	31,3847
86	24,2074	26,1916	28,0357	29,7658	31,4006
87	24,2281	26,2107	28,0535	29,7825	31,4166
88	24,2487	26,2298	28,0713	29,7993	31,4325
89	24,2693	26,2488	28,0891	29,8161	31,4484

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
90	9,4868	13,7840	17,0294	19,7484	22,1359
91	9,5394	13,8203	17,0587	19,7737	22,1585
92	9,5917	13,8564	17,0880	19,7990	22,1811
93	9,6437	13,8924	17,1172	19,8242	22,2036
94	9,6954	13,9284	17,1464	19,8494	22,2261
95	9,7468	13,9642	17,1756	19,8746	22,2486
96	9,7980	14,0000	17,2047	19,8997	22,2711
97	9,8489	14,0357	17,2337	19,9249	22,2935
98	9,8995	14,0712	17,2627	19,9499	22,3159
99	9,9499	14,1067	17,2916	19,9750	22,3383
100	10,0000	14,1421	17,3205	20,0000	22,3607

Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
0	0,0000	4,6416	5,8480	6,6943	7,3681
1	1,0000	4,6570	5,8578	6,7018	7,3742
2	1,2599	4,6723	5,8675	6,7092	7,3803
3	1,4422	4,6875	5,8771	6,7166	7,3864
4	1,5874	4,7027	5,8868	6,7240	7,3925
5	1,7100	4,7177	5,8964	6,7313	7,3986
6	1,8171	4,7326	5,9059	6,7387	7,4047
7	1,9129	4,7475	5,9155	6,7460	7,4108
8	2,0000	4,7622	5,9250	6,7533	7,4169
9	2,0801	4,7769	5,9345	6,7606	7,4229

Wurzeltafel. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
90	24,2899	26,2679	28,1069	29,8329	31,4643
91	24,3105	26,2869	28,1247	29,8496	31,4802
92	24,3311	26,3059	28,1425	29,8664	31,4960
93	24,3516	26,3249	28,1603	29,8831	31,5119
94	24,3721	26,3439	28,1780	29,8998	31,5278
95	24,3926	26,3629	28,1957	29.9166	31,5436
96	24,4131	26,3818	28,2135	29,9333	31,5595
97	24,4336	26,4008	28,2312	29,9500	31,5753
98	24,4540	26,4197	28,2489	29,9666	31,5911
99	24,4745	26,4386	28,2666	29,9833	31,6070
100	24,4949	26,4575	28,2843	30,0000	31,6228

Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
0	7,9370	8,4343	8,8790	9,2832	9,6549
1	7,9423	8,4390	8,8833	9,2870	9,6585
2	7,9476	8,4437	8,8875	9,2909	9,6620
3	7,9528	8,4484	8,8917	9,2948	9,6656
4	7,9581	8,4530	8,8959	9,2986	9,6692
5	7,9634	8,4577	8,9001	9,3025	9,6727
6	7,9686	8,4623	8,9043	9,3063	9,6763
7	7,9739	8,4670	8,9085	9,3102	9,6799
8	7,9791	8,4716	8,9127	9,3140	9,6834
9	7,9843	8,4763	8,9169	9,3179	9,6870

Wurzeltafel. Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
10	2,1544	4,7914	5,9439	6,7679	7,4290
11	2,2240	4,8059	5,9533	6,7752	7,4350
12	2,2894	4,8203	5,9627	6,7824	7,4410
13	2,3513	4,8346	5,9721	6,7897	7,4470
14	2,4101	4,8488	5,9814	6,7969	7,4530
15	2,4662	4,8629	5,9907	6,8041	7,4590
16	2,5198	4,8770	6,0000	6,8113	7,4650
17	2,5713	4,8910	6,0092	6,8185	7,4710
18	2,6207	4,9049	6,0185	6,8256	7,4770
19	2,6684	4,9187	6,0277	6,8328	7,4829
20	2,7144	4,9324	6,0368	6,8399	7,4889
21	2,7589	4,9461	6,0459	6,8470	7,4948
22	2,8020	4,9597	6,0550	6,8541	7,5007
23	2,8439	4,9732	6,0641	6,8612	7,5067
24	2,8845	4,9866	6,0732	6,8683	7,5126
25	2,9240	5,0000	6,0822	6,8753	7,5185
26	2,9625	5,0133	6,0912	6,8824	7,5244
27	3,0000	5,0265	6,1002	6,8894	7,5302
28	3,0366	5,0397	6,1091	6,8964	7,5361
29	3,0723	5,0528	6,1180	6,9034	7,5420
30	3,1072	5,0658	6,1269	6,9104	7,5478
31	3,1414	5,0788	6,1358	6,9174	7,5537
32	3,1748	5,0916	6,1446	6,9244	7,5595
33	3,2075	5,1045	6,1534	6,9313	7,5654
34	3,2396	5,1172	6,1622	6,9382	7,5712
35	3,2711	5,1299	6,1710	6,9451	7,5770
36	3,3019	5,1426	6,1797	6,9521	7,5828
37	3,3322	5,1551	6,1885	6,9589	7,5886
38	3,3620	5,1676	6,1972	6,9658	7,5944
39	3,3912	5,1801	6,2058	6,9727	7,6001

Wurzeltafel. Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
10	7,9896	8,4809	8,9211	9,3217	9,6905
11	7,9948	8,4856	8,9253	9,3255	9,6941
12	8,0000	8,4902	8 9295	9,3294	9,6976
13	8,0052	8,4948	8,9337	9.3332	9,7012
14	8,0104	8,4994	8,9378	9,3370	9,7047
15	8,0156	8,5040	8,9420	9,3408	9,7082
16	8,0208	8,5086	8.9462	9,3447	9,7118
17	8,0260	8,5132	8,9503	9,3485	9,7153
18	8,0311	8,5178	8,9545	9,3523	9,7188
19	8,0363	8,5224	8,9587	9,3561	9,7224
20	8,0415	8,5270	8,9628	9,3599	9,7259
21	8,0466	8.5316	8,9670	9,3637	9,7294
22	8,0517	8,5362	8,9711	9,3675	9,7329
23	8,0569	8,5408	8,9752	9,3713	9,7364
24	8,0620	8,5453	8,9794	9,3751	9,7400
25	8,0671	8,5499	8,9835	9.3789	9,7435
26	8,0723	8,5544	8,9876	9,3827	9,7470
27	8,0774	8,5590	8,9918	9.3865	9,7505
28	8,0825	8,5635	8,9959	9,3902	9,7540
29	8,0876	8,5681	9,0000	9,3940	9,7575
30	8,0927	8,5726	9,0041	9.3978	9,7610
31	8,0978	8,5772	9,0082	9,4016	9,7645
32	8,1028	8,5817	9.0123	9,4053	9,7680
33	8,1079	8,5862	9.0164	9,4091	9,7715
34	8,1130	8,5907	9,0205	9.4129	9,7750
35	8,1180	8,5952	9,0246	9,4166	9,7785
36	8,1231	8,5997	9,0287	9,4204	9,7819
37	8,1281	8,6043	9.0328	9,4241	9,7854
38	8,1332	8,6088	9,0369	9,4279	9,7889
39	8,1382	8,6132	9,0410	9,4316	9,7924

Wurzeltafel. Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
40	3,4200	5,1925	6,2145	6,9795	7,6059
41	3,4482	5,2048	6,2231	6,9864	7,6117
42	3,4760	5,2171	6,2317	6,9932	7,6174
43	3,5034	5,2293	6,2403	7,0000	7,6232
44	3,5303	5,2415	6,2488	7,0068	7,6289
45	3,5569	5,2536	6,2573	7,0136	7,6346
46	3,5830	5,2656	6,2658	7,0203	7,6403
47	3,6088	5,2776	6,2743	7,0271	7,6460
48	3,6342	5,2896	6,2828	7,0338	7,6517
49	3,6593	5,3015	6,2912	7,0406	7,6574
50	3,6840	5,3133	6,2996	7,0473	7,6631
51	3,7084	5,3251	6,3080	7,0540	7,6688
52	3,7325	5,3368	6,3164	7,0607	7,6744
53	3,7563	5,3485	6,3247	7,0674	7,6801
54	3,7798	5,3601	6,3330	7,0740	7,6857
55	3,8030	5,3717	6,3413	7,0807	7,6914
56	3,8259	5,3832	6,3496	7,0873	7,6970
57	3,8485	5,3947	6,3579	7,0940	7,7026
58	3,8709	5,4061	6,3661	7,1006	7,7082
59	3,8930	5,4175	6,3743	7,1072	7,7138
60	3,9149	5,4288	6,3825	7,1138	7,7194
61	3,9365	5,4401	6,3907	7,1204	7,7250
62	3,9579	5,4514	6,3988	7,1269	7,7306
63	3,9791	5,4626	6,4070	7,1335	7,7362
64	4,0000	5,4737	6,4151	7,1400	7,7418
65	4,0207	5,4848	6,4232	7,1466	7,7473
66	4,0412	5,4959	6,4312	7,1531	7,7529
67	4,0615	5,5069	6,4393	7,1596	7,7584
68	4,0817	5,5178	6,4473	7,1661	7,7639
69	4,1016	5,5288	6,4553	7,1726	7,7695

Wurzeltafel. Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
40	8,1433	8,6177	9,0450	9,4354	9,7959
41	8,1483	8.6222	9,0491	9,4391	9,7993
42	8,1533	8,6267	9.0532	9,4429	9,8028
43	8,1583	8,6312	9,0572	9,4466	9,8063
44	8,1633	8,6357	9,0613	9,4503	9,8097
45	8,1683	8,6401	9,0654	9,4541	9,8132
46	8,1733	8,6446	9,0694	9,4578	9,8167
47	8,1783	8,6490	9,0735	9,4615	9,8201
48	8,1833	8.6535	9,0775	9,4652	9,8236
49	8,1882	8,6579	9,0816	9,4690	9,8270
50	8,1932	8,6624	9,0856	9,4727	9,8305
51	8,1982	8,6668	9,0896	9,4764	9,8339
52	8,2031	8,6713	9,0937	9,4801	9,8374
53	8.2081	8,6757	9,0977	9,4838	9,8408
54	8,2130	8,6801	9,1017	9,4875	9,8443
55	8,2180	8.6845	9,1057	9,4912	9,8477
56	8,2229	8,6890	9.1098	9,4949	9,8511
57	8,2278	8,6934	9,1138	9,4986	9,8546
58	8,2327	8.6978	9,1178	9,5023	9.8580
59	8,2377	8,7022	9,1218	9,5060	9,8614
60	8,2426	8.7066	9,1258	9.5097	9,8648
61	8.2475	8,7110	9,1298	9.5134	9,8683
62	8,2524	8,7154	9.1338	9,5171	9,8717
63	8,2573	8,7198	9,1378	9.5207	9,8751
64	8,2621	8,7241	9,1418	9,5244	9,8785
65	8,2670	8,7285	9,1458	9,5281	9,8819
66	8.2719	8,7329	9,1498	9,5317	9,8854
67	8,2768	8,7373	9,1537	9,5354	9.8888
68	8,2816	8,7416	9,1577	9,5391	9,8922
69	8,2865	8,7460	9,1617	9,5427	9,8956

Wurzeltafel. Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
70	4,1213	5,5397	6,4633	7,1791	7,7750
71	4,1408	5,5505	6,4713	7,1855	7,7805
72	4,1602	5,5613	6,4792	7,1920	7,7860
73	4,1793	5,5721	6,4872	7,1984	7,7915
74	4,1983	5,5828	6,4951	7,2048	7,7970
75	4,2172	5,5934	6,5030	7,2112	7,8025
76	4,2358	5,6041	6,5108	7,2177	7,8079
77	4,2543	5,6147	6,5187	7,2240	7,8134
78	4,2727	5,6252	6,5265	7,2304	7,8188
79	4,2908	5,6357	6,5343	7,2368	7,8243
80	4,3089	5,6462	6,5421	7.2432	7,8297
81	4,3267	5,6567	6,5499	7,2495	7,8352
82	4,3445	5,6671	6,5577	7,2558	7,8406
83	4,3621	5,6774	6,5654	7,2622	7,8460
84	4,3795	5,6877	6,5731	7,2685	7,8514
85	4,3968	5,6980	6,5808	7,2748	7,8568
86	4,4140	5,7083	6,5885	7,2811	7,8622
87	4,4310	5,7185	6,5962	7,2874	7,8676
88	4,4480	5,7287	6,6039	7,2936	7,8730
89	4,4647	5,7388	6,6115	7,2999	7,8784
90	4,4814	5,7489	6,6191	7,3061	7,8837
91	4,4979	5,7590	6,6267	7,3124	7,8891
92	4,5144	5,7690	6,6343	7,3186	7,8944
93	4,5307	5,7790	6,6419	7,3248	7,8998
94	4,5468	5,7890	6,6494	7,3310	7,9051
95	4,5629	5,7989	6,6569	7,3372	7,9105
96	4,5789	5,8088	6,6644	7,3434	7,9158
97	4,5947	5,8186	6,6719	7,3496	7,9211
98	4,6104	5,8285	6,6794	7,3558	7,9264
99	4,6261	5,8383	6,6869	7,3619	7,9317
100	4,6416	5,8480	6.6943	7,3681	7,9370

Wurzeltafel. Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
70	8,2913	8,7503	9,1657	9,5464	9,8990
71	8,2962	8,7547	9,1696	9,5501	9,9024
72	8,3010	8,7590	9,1736	9,5537	9,9058
73	8,3059	8,7634	9,1775	9,5574	9,9092
74	8,3107	8,7677	9,1815	9,5610	9,9126
75	8,3155	8,7721	9,1855	9,5647	9,9160
76	8,3203	8,7764	9,1894	9,5683	9,9194
77	8,3251	8,7807	9,1933	9,5719	9,9227
78	8,3300	8,7850	9,1973	9,5756	9,9261
79	8,3348	8,7893	9,2012	9,5792	9,9295
80	8,3396	8,7937	9,2052	9,5828	9,9329
81	8,3443	8,7980	9,2091	9,5865	9,9363
82	8,3491	8,8023	9,2130	9,5901	9,9396
83	8,3539	8,8066	9,2170	9,5937	9,9430
84	8,3587	8,8109	9,2209	9,5973	9,9464
85	8,3634	8,8152	9,2248	9,6010	9,9497
86	8,3682	8,8194	9,2287	9,6046	9,9531
87	8,3730	8,8237	9,2326	9,6082	9,9565
88	8,3777	8,8280	9,2365	9,6118	9,9598
89	8,3825	8,8323	9,2404	9,6154	9,9632
90	8,3872	8,8366	9,2443	9,6190	9,9666
91	8,3919	8,8408	9,2482	9,6226	9,9699
92	8,3967	8,8451	9,2521	9,6262	9,9733
93	8,4014	8,8493	9,2560	9,6298	9,9766
94	8,4061	8,8536	9,2599	9,6334	9,9800
95	8,4108	8,8578	9,2638	9,6370	9,9833
96	8,4155	8,8621	9,2677	9,6406	9,9866
97	8,4202	8,8663	9,2716	9,6442	9,9900
98	8,4249	8,8706	9,2754	9,6477	9,9933
99	8,4296	8,8748	9,2793	9,6513	9,9967
100	8,4343	8,8790	9,2832	9,6549	10,0000

V. Logarithmentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Logarithmentafel.

Die Logarithmentafel enthält die fünf ersten Decimalziffern (Mantisse) der gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 10 bis 2199. Die Ziffern in der ersten Vertikal- und in der ersten Horizontalcolumne entsprechen den Nummern oder Zahlenwerthen, die übrigen Ziffern aber sind die diesen angehörigen Logarithmen ohne Kennziffern (Charakteristik) oder Ganze. Hat man die vordersten zwei oder drei Ziffern einer Zahl in der ersten Vertikalcolumne und die hinterste derselben in der ersten Horizontalreihe aufgesucht, so findet man den dieser Zahl entsprechenden Logarithmen, indem man den Zifferncomplex aufsucht, der mit den ersten Ziffern in einerlei Horizontal- und mit der letzten Ziffer in einerlei Vertikalreihe zugleich steht. Z. B. für die Zahl 365 ist die Mantisse = 56229, weil diese Zahl in der mit 36 anfangenden Horizontal- und in der mit 5 anfangenden Vertikalreihe zugleich steht. Ebenso ist die Mantisse oder der die Decimalstellen bildende Theil des Logarithmen von der Zahl 1379 = 13956, weil diese Zahl denjenigen Ort einnimmt, wo die durch (137) gehende Horizontal- und die durch (9) gehende Vertikallinie sich begegnen.

Besteht die gegebene Zahl aus weniger als drei Ziffern, so hat man dieselbe durch Anhängen von Nullen in eine dreizifferige Zahl umzuändern, und nun das Aufsuchen auf die eben gezeigte Weise zu vollziehen. Hiernach hat man also statt 29 die Zahl 290 zu schreiben und findet die Mantisse des Logarithmen von 29 oder von 290 = 46240; ebenso findet man dieselbe für die Zahl 6 oder 60 oder 600 = 77815. Will man diese kleine Logarithmentafel auch zum Aufsuchen von Zahlen über 2199 gebrauchen, so muß man sich des Interpolirens bedienen, wobei die in der hin-

teren Vertikalcolumne enthaltenen Differenzen in Anwendung zu bringen sind. Hiernach findet man z. B. die Mantisse des Logarithmen von 3452 = 53782 + 0,2 × 126 = 53782 + 25 = 53807, weil 53782 der Zahl 345 entspricht und die Differenz zwischen den Logarithmen dieser Zahl und der nächstfolgenden (346) = 126 ist. Auf gleiche Weise findet man zur Zahl 7915 die logarithmische Mantisse = 89818 + 0,5 × 55 = 89818 + 27 = 89845, weil 89818 der Zahl 791 entspricht und 55 die Differenz zwischen den Logarithmen von 791 und 792 ist.

Zur Auffindung der die Ganzen angebenden Kennziffer dient die Regel: die um Eins verminderte Anzahl der die Ganzen der gegebenen Zahl ausdrückenden Ziffern giebt die Ganzen oder die Charakteristik des entsprechenden Logarithmen. Hiernach ist z. B. die Kennziffer des Logarithmen von 365 = 3 — 1 = 2, weil 365 aus drei, lauter Ganze anzeigende Ziffern besteht; dagegen die Kennziffer des Logarithmen von 36,5 = 2 — 1 = 1, weil 36,5 nur zwei Ziffern (3) und (6) enthält, welche Ganze ausdrücken; es ist ferner die Kennziffer zum Logarithmen aus 3,65 = 1 — 1 = 0, weil in dieser Zahl nur eine Ziffer (3) vorhanden ist, welche Ganze angibt; endlich hat man für den Logarithmen aus 3650 die Charakteristik = 4 — 1 = 3, weil es hier vier Ziffern giebt, wodurch Ganze ausgedrückt werden. Solchemnach ist:

$$\log. 3650 = 3,56229,$$
$$\log. 365 = 2,56229,$$
$$\log. 36,5 = 1,56229,$$
$$\log. 3,65 = 0,56229.$$

Hat der Zahlenwerth keine Ganzen, fängt also derselbe mit Nullen an, so hat man am Ende der Mantisse eine negative Charakteristik hinzuzufügen, die aus soviel Einheiten besteht, als die Zahl selbst Nullen vorstehen hat. So ist z. B. für die Zahl 0,1379 die logarithmische Charakteristik = — 1 und für 0,01379 dieselbe = — 2 u. s. w.,

weil jene Zahl (0,1379) mit einer, diese Zahl (0,01379) aber mit zwei Nullen anfängt. Man hat solchemnach:

log. 0,1379 = 0,13956—1,
log. 0,01379 = 0,13956—2,
log. 0,001379 = 0,13956—3 u. s. w.

Um zu einem gegebenen Logarithmen den Numerus zu finden, hat man die vollständige Mantisse mit Berücksichtigung der etwa vorstehenden Nullen in der Tabelle aufzusuchen und von der so gefundenen Stelle ans horizontal herüber und vertikal aufwärts zu gehen: die sich an den Enden dieser Bewegungen vorfindenden Ziffern geben, neben einander gesetzt, die entsprechende Zahl, wenn man noch so viel Ziffern als Ganze abschneidet, als die um Eins vermehrte Charakteristik Einheiten hat, oder so viel Nullen anhängt, als die etwa vorkommende negative Kennziffer unmittelbar angibt.

Hiernach ist z. B. der Numerus für den Logarithmen 2,93146 = 854, denn von der Mantisse 93146 aus links und aufwärts gegangen, stößt man auf die Ziffern 85 und 4, und die um Eins vermehrte Charakteristik (2) zeigt an, daß die Ganzen des Numerus aus (2 + 1) = 3 Ziffern bestehen soll. Dagegen ist der Numerus des Logarithmen 0,78319 = 6,07, denn die Mantisse 78319 steht in der mit 60 anfangenden Horizontal- und in der mit 7 anfangenden Vertikalreihe, und es ist als Ganze nur eine Ziffer (6) abzuschneiden, weil, wenn man zur Charakteristik (Null) Eins hinzufügt, wieder Eins daraus hervorgeht. Für den Logarithmen 0,61805—2 ist endlich der Numerus = 0,0415, den 41 und 5 stehen mit 61805 in einerlei Horizontal- und Vertikallinie und die beiden Nullen (0,0) entsprechen der negativen Kennziffer (—2).

Auf gleiche Weise findet man:

num. log. 3,67852 = 4770
» » 1,67852 = 47,7
» » 0,67852—1 = 0,477
» » 0,67852—3 = 0,00477.

Findet man die Mantisse des gegebenen Logarithmen nicht genau in der Tabelle, so hat man den Numerus der nächst kleineren Mantisse aufzusuchen, und, wenn eine größere Genauigkeit verlangt wird, den fehlenden Theil durch Interpolation zu finden. Z. B. für den Logarithmen 1,79407 ist annähernd der Numerus = 62,2, denn dieser entspricht dem nächst kleinern Logarithmen 1,79379. Nun ist aber die Differenz der zwei Mantissen 79407 und 79379 = 28, und die Differenz der zunächst aufeinander folgenden Mantissen in der Tafel = 79449 — 79379 = 70; es folgt daher die nöthige Correction = $\frac{28}{70}$ = 0,4, die gesuchte Zahl also = 62,24.

Auf gleiche Weise folgt:

num. log. $0,65118 = 4,47 + \frac{118-31}{9700} = 4,47 + \frac{87}{9700}$ $= 4,479$, denn 87 ist die Differenz zwischen den Mantissen des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen, und 97 ist die zwischen der nächst größern und nächst kleinern Mantisse.

Ebenso *num. log.* $0,46951 - 2 = 0,0294 + \frac{951-835}{1470000}$ $= 0,0294 + \frac{0,0116}{147} = 0,02948.$

Ist die Mantisse des gegebenen Logarithmen kleiner als 34223, so kann man die Interpolation vereinfachen oder gar unnöthig machen, wenn man sich der zweiten Hälfte der Tafel bedient, die gegebene Mantisse also in dieser aufsucht. So gibt dieselbe für den Logarithmen 3,26174 den vierzifferigen Numerus 1827 unmittelbar; auch erhält man den Numerus des Logarithmen 0,21152 = 1,627 mit der Correction $\frac{52-39}{26} = \frac{13}{26} = 0,5$, also *num. log.* 0,21152 = 1,6275.

Anwendung der Logarithmen auf das Rechnen.

1) Das Product zweier Zahlen wird erhalten,

wenn man die Logarithmen der Zahlen addirt und zur Summe den Numerus aufsucht.

Z. B. für $34{,}5 \times 12{,}79$ hat man

$$\begin{aligned} log.\ 34{,}5 &= 1{,}53782 \\ log.\ 12{,}79 &= 1{,}10687 \\ \hline log.(34{,}5 \times 12{,}79) &= 2{,}64469; \text{ daher} \end{aligned}$$

$$34{,}5 \times 12{,}79 = num.\ log.\ 2{,}64469 = 441{,}26.$$

Für $609 \times 27{,}5 \times 0{,}01865$:

$$\begin{aligned} log.\ 609 &= 2{,}78462 \\ log.\ 27{,}5 &= 1{,}43933 \\ log.\ 0{,}01865 &= 0{,}27068 - 2 \\ \hline log.(609 \times 27{,}5 \times 0{,}01865) &= 2{,}49463, \end{aligned}$$

$$609 \times 27{,}5 \times 0{,}01865 = num.\ log.\ 2{,}49463 = 312{,}34.$$

2) Der Quotient zweier Zahlen ergibt sich, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividenden abzieht und zu dem erhaltenen Reste die Zahl aufsucht.

Z. B. für $\frac{1054}{8{,}06}$ ist

$$\begin{aligned} log.\ 1054 &= 3{,}02284 \\ log.\ 8{,}06 &= 0{,}90634 \\ \hline log.\ \left(\frac{1054}{8{,}06}\right) &= 2{,}11650, \end{aligned}$$

$$\text{daher } \frac{1054}{8{,}06} = num.\ log.\ 2{,}11650 = 130{,}77.$$

Für $\frac{0{,}693}{45{,}2 \times 0{,}910}$:

$$\begin{aligned} log.\ 45{,}2 &= 1{,}65514 \\ log.\ 0{,}910 &= 0{,}95904 - 1 \\ \hline &\ \ 1{,}61418 \\ log.\ 0{,}693 &= 0{,}84073 - 1 \\ \hline log.\ \left(\frac{0{,}693}{45{,}2 \times 0{,}91}\right) &= 0{,}22655 - 2, \end{aligned}$$

$$\text{daher } \frac{0{,}693}{45{,}2 \times 0{,}91} = 0{,}01685.$$

3) Eine Zahl wird zur Potenz erhoben, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten multiplicirt und zu dem Producte den Numerus sucht.

Z. B. für $(0,4061)^3$ hat man

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 0,4061 & = & 0,60863-1 \\ \hline \log.\ (0,4061)^3 & = & 0,82589-2 \end{array} \times 3$$

daher $(0,4061)^3 = 0,06697$.

4) Man findet die Wurzel einer gegebenen Zahl, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten dividirt und zu dem Quotienten den Numerus nachschlägt.

Z. B. für $\sqrt{2,69}$ ist

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 2,69 & = & 0,42975 \\ \hline \log.\ \sqrt{2,69} & = & 0,21488 \end{array} : 2$$

$\sqrt{2,69} = 1,6401$ oder annähernd 1,64.

Ferner für $\sqrt[3]{(0,643)^2}$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 0.643 & = & 0,80821-1 \\ \hline & & 1,61642-2 \\ \hline \text{oder} & & 2,61642-3 \\ \hline \log.\ \sqrt[3]{(0,643)^2} & = & 0,87214-1 \end{array} \begin{array}{l} \times 2 \\ \\ : 3 \end{array}$$

daher $\sqrt[3]{(0,643)^2} = 0,745$.

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403
38	57978	58093	58206	58320	58433	58546
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
10	02531	02938	03342	03743	432 ÷ 396
11	06446	06819	07188	07555	393 ÷ 363
12	10037	10380	10721	11059	361 ÷ 335
13	13354	13672	13988	14301	333 ÷ 312
14	16435	16732	17026	17319	309 ÷ 290
15	19312	19590	19866	20140	289 ÷ 272
16	22011	22272	22531	22789	271 ÷ 256
17	24551	24797	25042	25285	255 ÷ 242
18	26951	27184	27416	27646	241 ÷ 229
19	29226	29447	29667	29885	228 ÷ 218
20	31387	31597	31806	32015	217 ÷ 207
21	33445	33646	33846	34044	206 ÷ 198
22	35411	35603	35793	35984	197 ÷ 189
23	37291	37475	37658	37840	188 ÷ 181
24	39094	39270	39445	39620	181 ÷ 174
25	40824	40993	41162	41330	173 ÷ 167
26	42488	42651	42813	42975	167 ÷ 161
27	44091	44248	44404	44560	161 ÷ 156
28	45637	45788	45939	46090	155 ÷ 150
29	47129	47276	47422	47567	149 ÷ 145
30	48572	48714	48855	48996	145 ÷ 140
31	49969	50106	50243	50379	140 ÷ 136
32	51322	51455	51587	51720	136 ÷ 132
33	52634	52763	52892	53020	132 ÷ 128
34	53908	54033	54158	54283	127 ÷ 124
35	55145	55267	55388	55509	124 ÷ 121
36	56348	56467	56585	56703	121 ÷ 117
37	57519	57634	57749	57864	117 ÷ 114
38	58659	58771	58883	58995	115 ÷ 111
39	59770	59879	59988	60097	112 ÷ 109

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
40	60853	60959	61066	61172	108 ÷ 106
41	61909	62014	62118	62221	106 ÷ 104
42	62941	63043	63144	63246	103 ÷ 101
43	63949	64048	64147	64246	101 ÷ 99
44	64933	65031	65128	65225	99 ÷ 97
45	65896	65992	66087	66181	97 ÷ 95
46	66839	66932	67025	67117	94 ÷ 93
47	67761	67852	67943	68034	92 ÷ 90
48	68664	68753	68842	68931	90 ÷ 89
49	69548	69636	69723	69810	88 ÷ 87
50	70415	70501	70586	70672	87 ÷ 86
51	71265	71349	71433	71517	84 ÷ 85
52	72099	72181	72263	72346	83
53	72916	72997	73078	73159	81
54	73719	73799	73878	73957	80
55	74507	74586	74663	74741	78
56	75282	75358	75435	75511	77
57	76042	76118	76193	76268	76
58	76790	76864	76938	77012	74
59	77525	77597	77670	77743	73
60	78247	78319	78390	78462	72
61	78958	79029	79099	79169	71
62	79657	79727	79796	79865	69
63	80346	80414	80482	80550	68
64	81023	81090	81158	81224	67
65	81690	81757	81823	81889	66
66	82347	82413	82478	82543	65
67	82995	83059	83123	83187	64
68	83632	83696	83759	83822	63
69	84261	84323	84386	84448	63

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216
75	87506	87564	87622	87680	87737	87795
76	88081	88138	88196	88252	88309	88366
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
70	84880	84942	85003	85065	62
71	85491	85552	85612	85673	61
72	86094	86153	86213	86273	60
73	86688	86747	86806	86864	59
74	87274	87332	87390	87448	58
75	87852	87910	87967	88024	58
76	88423	88480	88536	88593	57
77	88986	89042	89098	89154	56
78	89542	89597	89653	89708	55
79	90091	90146	90200	90255	55
80	90634	90687	90741	90795	54
81	91169	91222	91275	91328	53
82	91698	91751	91803	91855	53
83	92221	92273	92324	92376	52
84	92737	92788	92840	92891	51
85	93247	93298	93349	93399	51
86	93752	93802	93852	93902	50
87	94250	94300	94349	94399	50
88	94743	94792	94841	94890	49
89	95231	95279	95328	95376	49
90	95713	95761	95809	95856	48
91	96190	96237	96284	96332	47
92	96661	96708	96755	96802	47
93	97128	97174	97220	97267	46
94	97589	97635	97681	97727	46
95	98046	98091	98137	98182	45
96	98498	98543	98588	98632	45
97	98945	98989	99034	99078	45
98	99388	99432	99476	99520	44
99	99826	99870	99913	99957	44

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099
121	08279	08314	08350	08386	08422	08458
122	08636	08672	08707	08743	08778	08814
123	08991	09026	09061	09096	09132	09167
124	09342	09377	09412	09447	09482	09517
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209
127	10380	10415	10449	10483	10517	10551
128	10721	10755	10789	10823	10857	10890
129	11059	11093	11126	11160	11193	11227

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
100	00260	00303	00346	00389	43
101	00689	00732	00775	00817	43
102	01115	01157	01199	01242	42
103	01536	01578	01620	01662	42
104	01953	01995	02036	02078	42
105	02366	02408	02449	02490	41
106	02776	02816	02857	02898	41
107	03181	03222	03262	03302	41
108	03583	03623	03663	03703	40
109	03981	04021	04060	04100	40
110	04376	04415	04454	04493	39
111	04766	04805	04844	04883	39
112	05154	05192	05231	05269	39
113	05538	05576	05614	05652	38
114	05918	05956	05994	06032	38
115	06296	06333	06371	06408	38
116	06670	06707	06744	06781	37
117	07041	07078	07115	07151	37
118	07408	07445	07482	07518	37
119	07773	07809	07846	07882	36
120	08135	08171	08207	08243	36
121	08493	08529	08565	08600	36
122	08849	08884	08920	08955	36
123	09202	09237	09272	09307	35
124	09552	09587	09621	09656	35
125	09899	09934	09968	10003	35
126	10243	10278	10312	10346	34
127	10585	10619	10653	10687	34
128	10924	10958	10992	11025	34
129	11261	11294	11327	11361	33

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561
131	11727	11760	11793	11826	11860	11893
132	12057	12090	12123	12156	12189	12222
133	12385	12418	12450	12483	12516	12548
134	12710	12743	12775	12808	12840	12872
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194
136	13354	13386	13418	13450	13481	13513
137	13672	13704	13735	13767	13799	13830
138	13988	14019	14051	14082	14114	14145
139	14301	14333	14364	14395	14426	14457
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768
141	14922	14953	14983	15014	15045	15076
142	15229	15259	15290	15320	15351	15381
143	15534	15564	15594	15625	15655	15685
144	15836	15866	15897	15927	15957	15987
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286
146	16435	16465	16495	16524	16554	16584
147	16732	16761	16791	16820	16850	16879
148	17026	17056	17085	17114	17143	17173
149	17319	17348	17377	17406	17435	17464
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754
151	17898	17926	17955	17984	18013	18041
162	18184	18213	18241	18270	18299	18327
153	18469	18498	18526	18554	18583	18611
154	18752	18780	16808	18837	18865	18893
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173
156	19312	19340	19368	19396	19424	19451
157	19590	19618	19645	19673	19700	19728
158	19866	19893	19921	19948	19976	20003
159	20140	20167	20194	20222	20249	20276

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
130	11594	11628	11661	11694	33
131	11926	11959	11992	12024	33
132	12254	12287	12320	12353	32
133	12581	12613	12646	12678	32
134	12905	12937	12969	13001	32
135	13226	13258	13290	13322	32
136	13545	13577	13609	13640	32
137	13862	13893	13925	13956	32
138	14176	14208	14239	14270	31
139	14489	14520	14551	14582	31
140	14799	14829	14860	14891	31
141	15106	15137	15168	15198	31
142	15412	15442	15473	15503	31
143	15715	15746	15776	15806	30
144	16017	16047	16077	16107	30
145	16316	16346	16376	16406	30
146	16613	16643	16673	16702	30
147	16909	16938	16967	16997	29
148	17202	17231	17260	17289	29
149	17493	17522	17551	17580	29
150	17783	17811	17840	17869	29
151	18070	18099	18127	18156	29
152	18355	18384	18412	18441	28
153	18639	18667	18696	18724	28
154	18921	18949	18977	19005	28
155	19201	19229	19257	19285	28
156	19479	19507	19535	19562	28
157	19756	19783	19811	19838	28
158	20030	20058	20085	20112	27
159	20303	20330	20358	20385	27

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
160	20412	20439	20466	20493	20520	20548
161	20683	20710	20737	20763	20790	20817
162	20952	20978	21005	21032	21059	21085
163	21219	21245	21272	21299	21325	21352
164	21484	21511	21537	21564	21590	21617
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880
166	22011	22037	22063	22089	22115	22141
167	22272	22298	22324	22350	22376	22401
168	22531	22557	22583	22608	22634	22660
169	22789	22814	22840	22866	22891	22917
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172
171	23300	23325	23350	23376	23401	23426
172	23553	23578	23603	23629	23654	23679
173	23805	23830	23855	23880	23905	23930
174	24055	24080	24105	24130	24155	24180
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428
176	24551	24576	24601	24625	24650	24674
177	24797	24822	24846	24871	24895	24920
178	25042	25066	25091	25115	25139	25164
179	25285	25310	25334	25358	25382	25406
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648
181	25768	25792	25816	25840	25864	25888
182	26007	26031	26055	26079	26102	26126
183	26245	26269	26293	26316	26340	26364
184	26482	26505	26529	26553	26576	26600
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834
186	26951	26975	26998	27021	27045	27068
187	27184	27207	27231	27254	27277	27300
188	27416	27439	27462	27485	27508	27531
189	27646	27669	27692	27715	27738	27761

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
160	20575	20602	20629	20656	27
161	20844	20871	20898	20925	27
162	21112	21139	21165	21192	27
163	21378	21405	21431	21458	27
164	21643	21669	21696	21722	26
165	21906	21932	21958	21985	26
166	22168	22194	22220	22246	26
167	22427	22453	22479	22505	26
168	22686	22712	22737	22763	26
169	22943	22968	22994	23019	26
170	23198	23223	23249	23274	25
171	23452	23477	23502	23528	25
172	23704	23729	23754	23780	25
173	23955	23980	24005	24030	25
174	24204	24229	24254	24279	25
175	24452	24477	24502	24527	25
176	24699	24724	24748	24773	25
177	24944	24969	24993	25018	24
178	25188	25212	25237	25261	24
179	25431	25455	25479	25503	24
180	25672	25696	25720	25744	24
181	25912	25935	25959	25983	24
182	26150	26174	26198	26221	24
183	26387	26411	26435	26458	24
184	26623	26647	26670	26694	24
185	26858	26881	26905	26928	23
186	27091	27114	27138	27161	23
187	27323	27346	27370	27393	23
188	27554	27577	27600	27623	23
189	27784	27807	27830	27853	23

Logarithmentafel.

Nr.	0	1	2	3	4	5
190	27875	27898	27921	27944	27967	27990
191	28103	28126	28149	28172	28194	28217
192	28330	28353	28375	28398	28421	28443
193	28556	28578	28601	28623	28646	28668
194	28780	28803	28825	28847	28870	28892
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115
196	29226	29248	29270	29292	29314	29336
197	29447	29469	29491	29513	29535	29557
198	29667	29688	29710	29732	29754	29776
199	29885	29907	29929	29951	29973	29994
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211
201	30320	30341	30363	30384	30406	30428
202	30535	30557	30578	30600	30621	30643
203	30750	30771	30792	30814	30835	30856
204	30963	30984	31006	31027	31048	31069
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281
206	31387	31408	31429	31450	31471	31492
207	31597	31618	31639	31660	31681	31702
208	31806	31827	31848	31869	31890	31911
209	32015	32035	32056	32077	32098	32118
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325
211	32428	32449	32469	32490	32511	32531
212	32634	32654	32675	32695	32715	32736
213	32838	32858	32879	32899	32919	32940
214	33041	33062	33082	33102	33122	33143
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345
216	33445	33465	33486	33506	33526	33546
217	33646	33666	33686	33706	33726	33746
218	33846	33866	33885	33905	33925	33945
219	34044	34064	34084	34104	34124	34143

Logarithmentafel.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
190	28012	28035	28058	28081	23
191	28240	28262	28285	28308	23
192	28466	28488	28511	28533	23
193	28691	28713	28735	28758	22
194	28914	28937	28959	28981	22
195	29137	29159	29181	29203	22
196	29358	29380	29403	29425	22
197	29579	29601	29623	29645	22
198	29798	29820	29842	29863	22
199	30016	30038	30060	30081	22
200	30233	30255	30276	30298	22
201	30449	30471	30492	30514	22
202	30664	30685	30707	30728	22
203	30878	30899	30920	30942	22
204	31091	31112	31133	31154	21
205	31302	31323	31345	31366	21
206	31513	31534	31555	31576	21
207	31723	31744	31765	31785	21
208	31931	31952	31973	31994	21
209	32139	32160	32181	32201	21
210	32346	32366	32387	32408	21
211	32552	32572	32593	32613	21
212	32756	32777	32797	32818	21
213	32960	32980	33001	33021	20
214	33163	33183	33203	33224	20
215	33365	33385	33405	33425	20
216	33566	33586	33606	33626	20
217	33766	33786	33806	33826	20
218	33965	33985	34005	34025	20
219	34163	34183	34203	34223	20

VI. Tafel der natürlichen Logarithmen.

Einrichtung und Gebrauch der nachstehenden Tafel.

Außer den gemeinen oder briggischen, sich auf die Grundzahl 10 beziehenden Logarithmen, braucht man zuweilen noch die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, deren Grundzahl 2,7182818... ist. Nachstehende Tafel enthält die Werthe derselben für die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3.... bis 299. Die Einrichtung dieser Tafel weicht von der Einrichtung der die gemeinen Logarithmen enthaltenden Logarithmentafel nicht ab. Hat man die letzte Ziffer der gegebenen Zahl in der obersten Horizontalreihe und die vorhergehende Ziffer oder das vorhergehende Zifferpaar in der vordern Vertikalreihe aufgesucht, so findet man den entsprechenden natürlichen Logarithmen, wenn man von jener Ziffer ab- und von dieser Ziffer oder diesem Ziffernpaare bis zur Begegnung herübergeht. Z. B. *log. nat.* 73 ist = 4,2905, weil diese Zahl vertikal unter der letzten Ziffer (3) und mit der ersten Ziffer (7) in einerlei Horizontalreihe liegt. Ebenso ist *log. nat.* 157 = 5,0562, denn diese Zahl steht in der mit 7 überschriebenen Vertikal- und in der mit 15 anfangenden Horizontalreihe.

Mit Hilfe dieser Tabelle lassen sich leicht andere Logarithmen finden, welche in der Tabelle selbst nicht stehen, wenn man die einfachsten Regeln der Logarithmik (s. §. 10) zur Anwendung bringt. Z. B. $log. nat. 1{,}84 = log. nat. \left(\frac{184}{100}\right)$ $= log. nat. 184 - log. nat. 100 = 5{,}2149 - 4{,}6052 = 4{,}6097$. Ebenso $log. nat. \frac{67}{136} = log. nat. 67 - log. nat. 136$ $= 4{,}2047 - 4{,}9127 = - 0{,}7080$.

Geht die Zahl über 299 hinaus, so muß man das Interpolationsverfahren einschlagen, um den entsprechenden Logarithmen zu finden. Z. B. $log.\ nat.\ 124{,}7$
$= log.\ nat.\ 124 + 0{,}7 \times (log.\ nat.\ 125 - log.\ nat.\ 124)$
$= 4{,}8203 + 0{,}7 \times (4{,}8283 - 4{,}8203) = 4{,}8203 + 0{,}7 \times 0{,}0080$
$= 4{,}8203 + 0{,}0056 = 4{,}8259$.

Durch Zerlegung in Factoren kann man zuweilen die Interpolation entbehrlich machen. Z. B. $log.\ nat.\ 1247$ $= log.\ nat.\ (29 \times 43) = log.\ nat.\ 29 + log.\ nat.\ 43$ $= 3{,}3673 + 3{,}7612 = 7{,}1285$; daher $log.\ nat.\ 124{,}7$ $= log.\ nat.\ \left(\frac{1247}{10}\right) = log.\ nat.\ 1247 - log.\ nat.\ 10$ $= 7{,}1285 - 2{,}3026 = 4{,}8259$, wie so eben gefunden wurde.

Um zu den natürlichen Logarithmen die Zahl zu finden, ist das Interpolationsverfahren fast immer einzuschlagen. Welche Zahl x entspricht z. B. dem natürlichen Logarithmen 5,0900? $log.\ nat.\ 162 = 5{,}0876$ und $log.\ nat.\ 163$ $= 5{,}0938$; daher $log.\ nat.\ 163 - log.\ nat.\ 162 = 0{,}0062$, und $log.\ nat.\ x - log.\ nat.\ 162 = 0{,}0024$. Setzt man nun $\frac{x - 162}{163 - 162} = \frac{l.n.x - l.n.162}{l.n.163 - l.n.162} = \frac{0{,}0024}{0{,}0062}$, so erhält man $x = 162 + \frac{24}{62} = 162{,}4$.

Ferner $log.\ nat.\ x$ sei $= 6{,}9045$, was ist x?
$log.\ nat.\ 10 = 2{,}3026$, daher $log.\ nat.\ \frac{x}{10}$ oder $log.\ nat.\ x -$ $log.\ nat.\ 10 = 4{,}6019$. Nun ist $log.\ nat.\ 100 = 4{,}6052$ u. $log.\ nat.\ 99$ $= 4{,}5951$; es folgt daher $\frac{\frac{x}{10} - 99}{100 - 99} = \frac{4{,}6019 - 4{,}5951}{4{,}6052 - 4{,}5951}$, $\frac{x}{10} = 99 + \frac{68}{101} = 99{,}67$ und $x = 996{,}7$.

Tafel der natürlichen Logarithmen.

Nr.	0	1	2	3	4
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972
25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836

Tafel der natürlichen Logarithmen.

Nr.	5	6	7	8	9
0	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
15	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
23	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
25	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
26	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004

VII. Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

Einrichtung und Gebrauch der nachstehenden Tafel.

Mit Hilfe dieser kleinen Tabelle läßt sich durch einfaches Addiren der gemeine Logarithmen in einen natürlichen und umgekehrt der natürliche in einen gemeinen verwandeln. Der gemeine Logarithmen ergibt sich aus dem natürlichen, wenn man diesen mit der Zahl 0,434294..., die man den Modul des gemeinen Logarithmensystems nennt, multiplicirt; den natürlichen Logarithmen hingegen erhält man, wenn man den gemeinen Logarithmen durch eben diesen Modul dividirt, oder durch seinen reciproken Werth 2,302585... multiplicirt. Der erste Theil der folgenden Tabelle enthält die 1, 2, 3, 4 .... 9fachen Werthe von 2,3026, 0,2303, 0,0230 u. s. w., und der zweite Theil die 1, 2, 3, 4 ... 9fachen Werthe von 0,43429, 0,04343, 0,00434 u. s. w. Wie nun diese Vielfachen zur Verwandlung der Logarithmen zu gebrauchen sind, werden folgende Beispiele vor Augen führen.

Wenn *log.* 124,7 = 2,09587, so folgt

wegen	2	=	4,6052
»	0,09	=	2072
»	0,005	=	115
»	0,0008	=	18
»	0,00007	=	2
log. nat.	124,7	=	4,8259,

wie weiter oben gefunden wurde.

Ist dagegen *log. nat.* 996,7 = 6,9045, so folgt

wegen	6	=	2,60577
»	0,9	=	39087
»	0,004	=	174
»	0,0005	=	22
daher *log.*	996,7	=	2,9986.

Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

1) Gemeine Logarithmen in natürliche Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Decimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	2,3026	0,2303	0,0230	0,0023	0,0002	0,0000
2	4,6052	0,4605	0,0461	0,0046	0,0005	0,0000
3	6,9078	0,6908	0,0691	0,0069	0,0007	0,0001
4	9,2103	0,9210	0,0921	0,0092	0,0009	0,0001
5	11,5129	1,1513	0,1151	0,0115	0,0012	0,0001
6	13,8155	1,3816	0,1382	0,0138	0,0014	0,0001
7	16,1181	1,6118	0,1612	0,0161	0,0016	0,0002
8	18,4207	1,8421	0,1842	0,0184	0,0018	0,0002
9	20,7233	2,0723	0,2072	0,0207	0,0021	0,0002

2) Natürliche Logarithmen in gemeine Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Decimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	0,43429	0,04343	0,00434	0,00043	0,00004	0,00000
2	0,86859	0,08686	0,00869	0,00087	0,00009	0,00001
3	1,30288	0,13029	0,01303	0,00130	0,00013	0,00001
4	1,73718	0,17372	0,01737	0,00174	0,00017	0,00002
5	2,17147	0,21715	0,02171	0,00217	0,00022	0,00002
6	2,60577	0,26058	0,02606	0,00261	0,00026	0,00003
7	3,04006	0,30401	0,03040	0,00304	0,00030	0,00003
8	3,47436	0,34744	0,03474	0,00347	0,00035	0,00003
9	3,90865	0,39087	0,03909	0,00391	0,00039	0,00004

Zweiter Abschnitt.

Regeln und Formeln.

Erstes Kapitel.

Grundoperationen.

---

§. 1. Addition und Subtraction.

I. $a + b = b + a.$

Regel: Eine Veränderung in der Reihenfolge der Summanden bleibt ohne Einfluß auf die Summe.

Z. B. $34{,}1 + 275{,}4 = 275{,}4 + 34{,}1 = 309{,}5$; ferner $10{,}65 + 0{,}95 + 1{,}72 = 10{,}65 + 1{,}72 + 0{,}95$ $= 1{,}72 + 10{,}65 + 0{,}95 = 0{,}95 + 1{,}72 + 10{,}65 = 13{,}32.$

II. $a + (-b) = a - b = -(b - a).$

Regel: Man addirt entgegengesetzte Größen, wenn man die kleine Größe von der größeren subtrahirt und dem Reste das Zeichen ($\pm$) der größeren Zahl gibt.

Z. B. 1) $10{,}94 + (-7{,}23) = 10{,}94 - 7{,}23 = 3{,}71.$
2) $4{,}07 + (-17{,}725) = -(17{,}725 - 4{,}070) = -13{,}655.$
3) $-42{,}7 + 5{,}823 + (-2{,}73) = -(42{,}7 + 2{,}73) + 5{,}823.$
$= -45{,}43 + 5{,}823 = -(45{,}430 - 5{,}823) = -39{,}607.$

III. $a - (+b) = a + (-b)$,
$a - (-b) = a + (+b) = a + b$.

Regel: Man vollzieht die Subtraction zweier Größen, indem man das Zeichen des Subtrahenten ändert und algebraisch addirt.

Z. B. 1) $109{,}5 - (+37{,}4) = 109{,}5 + (-37{,}4) = 72{,}1$.
2) $76{,}41 - (+163{,}8) = 76{,}41 + (-163{,}8) = -(163{,}80 - 76{,}41)$
$= -87{,}39$.
3) $4{,}56 - (-3{,}24) = 4{,}56 + 3{,}24 = 7{,}8$.
4) $1{,}045 - (-13{,}6) = 1{,}045 + 13{,}600 = 14{,}645$.
5) $-0{,}941 - (+0{,}41) = -0{,}941 - 0{,}410 = -1{,}351$.
6) $-0{,}763 - (-2{,}09) = -0{,}763 + 2{,}090 = 1{,}327$.

§. 2. Multiplication.

I. $a \cdot b = b \cdot a$.

Regel: Durch eine Vertauschung der Factoren unter einander wird das Product nicht verändert.

Z. B. $3{,}46 \times 61{,}3 = 61{,}3 \times 3{,}46 = 212{,}098$;
$4{,}1 \times 0{,}074 \times 1{,}97 = 1{,}97 \times 4{,}1 \times 0{,}074 = 0{,}597698$.

II. $a(b + c) = ab + ac$.

Regel: Besteht der eine Factor aus Theilen, so läßt sich jeder dieser Theile durch den andern Factor multipliciren, ohne das Product zu verändern.

Z. B. 1) $3{,}1 \times (7{,}14 + 0{,}52) = 3{,}1 \times 7{,}14 + 3{,}1 \times 0{,}52$
$= 22{,}134 + 1{,}612 = 23{,}746$.
2) $(5{,}04 - 1{,}36) \times 0{,}91 = 5{,}04 \times 0{,}91 - 1{,}36 \times 0{,}91$
$= 4{,}5864 - 1{,}2376 = 3{,}3488$.
3) $6{,}31 \times 0{,}45 + 6{,}31 \times 1{,}85 = 6{,}31 \times (0{,}45 + 1{,}85)$
$= 6{,}31 \times 2{,}3 = 14{,}513$.

III. $(-a) \times (-b) = +ab$.
$(+a) \times (-b) = -ab$.

Regel: Gleichbezeichnete Factoren geben ein positives, ungleichbezeichnete ein negatives Product.

Z. B. 1) $(-4{,}61) \times (-0{,}73) = 4{,}61 \times 0{,}73 = 3{,}3653.$

2) $(-0{,}54) \times 7{,}03 = -0{,}54 \times 7{,}03 = -3{,}7962.$

§. 3. Division.

I. $(-a) : (-b) = a : b = +\frac{a}{b}.$

$(-a) : (+b) = (+a) : (-b) = -\frac{a}{b}.$

Regel: Haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient positiv, haben sie aber verschiedene Vorzeichen, so ist er negativ.

Z. B. 1) $-2{,}84 : -1{,}5 = \frac{2{,}84}{1{,}5} = \frac{28{,}4}{15} = 1{,}8933..$

2) $-16{,}4 : 57{,}2 = -\frac{16{,}4}{57{,}2} = -0{,}2867..$

3) $0{,}96 : -0{,}04 = -\frac{0{,}96}{0{,}04} = -24.$

II. $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$

Regel: Besteht der Dividend aus Theilen, so ist der vollständige Quotient auch gleich der Summe von den Quotienten der einzelnen Theile.

Z. B. 1) $\frac{81{,}42 + 3{,}96}{0{,}48} = \frac{81{,}42}{0{,}48} + \frac{3{,}96}{0{,}48} = 169{,}625 + 8{,}25 = 177{,}875.$

2) $\frac{0{,}473}{1{,}95} - \frac{0{,}077}{1{,}95} = \frac{0{,}473 - 0{,}077}{1{,}95} = \frac{0{,}396}{1{,}95} = 0{,}20307.$

III. $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \,.\, b = a \,.\, \frac{b}{c}.$

$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$

Regel: Die Reihenfolge, in welcher man Zahlen durch einander multiplicirt und dividirt, hat auf das Ergebniß keinen Einfluß.

Z. B. 1) $\frac{3,45 \times 7,2}{18} = 3,45 \times \frac{7,2}{18} = 3,45 \times 0,4 = 1,38.$

2) $\frac{102,5}{3,64 \times 2,5} = \frac{102,5}{2,5} : 3,64 = \frac{41}{3,64} = 11,263\ldots$

§. 4. Brüche.

I. $\frac{a}{b} = \frac{a\,m}{b\,m} = \frac{a : m}{b : m}.$

Regel: Ein Quotient oder Bruch bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner desselben durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Z. B. 1) $\frac{6,74}{15,15} = \frac{6,74 \times 20}{15,15 \times 20} = \frac{134,8}{303} = 0,44488..$

2) $\frac{40,2}{16,4} = \frac{40,2 : 2}{16,4 : 2} = \frac{20,1}{8,2} = 2,4512..$

II. $\frac{a}{b} = \frac{a\,d}{b\,d}$ und $\frac{c}{d} = \frac{b\,c}{b\,d}.$

Regel: Brüche erhalten gleiche Nenner (bd), wenn man Zähler und Nenner des einen Bruches durch den Nenner des andern multiplicirt.

Z. B. 1) $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$ und $\frac{2}{7} = \frac{4 \times 2}{4 \times 7} = \frac{8}{28}.$

2) $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} = \frac{10}{5}$ und $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 1}{5 \times 1} = \frac{3}{5}.$

III. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$

Regel: Bei der Addition und Subtraction gleichbenannter Brüche sind nur die Zähler zu addiren oder zu subtrahiren.

Z. B. $\frac{3}{8} \pm \frac{7}{8} = \frac{3 \pm 7}{8} = \frac{10}{8}$ oder $-\frac{4}{8}$ d. i. $\frac{5}{4}$ oder $-\frac{1}{2}.$

IV. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}.$

Regel: Brüche werden multiplicirt, wenn man

Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner multiplicirt.

Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{7 \times 5}{9 \times 4} = \frac{35}{36} = 0,9722..$

$\frac{3,2}{15,5} \times \frac{4,1}{9,6} = \frac{3,2 \times 4,1}{15,5 \times 9,6} = \frac{4,1}{15,5 \times 3} = \frac{41}{465} = 0,08817..$

V. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$

Regel: Die Division der Brüche verwandelt sich in Multiplication, wenn man den Divisor umkehrt.

Z. B. $\frac{3}{7} : \frac{8}{15} = \frac{3}{7} \times \frac{15}{8} = \frac{45}{56} = 0,8035...$

$2,1 : \frac{2,73}{18,5} = \frac{2,1 \times 18,5}{2,73} = \frac{38,85}{2,73} = 14,2307..$

§. 5. Grenzwerthe.

I. $\frac{0}{a} = 0.$

Regel: Null durch eine endliche Zahl dividirt, läßt Null.

Z. B. $\frac{0}{31} = 0; \frac{0}{0,4} = 0.$

II. $\frac{a}{0} = \infty.$

Regel: Eine endliche Zahl durch Null dividirt, gibt eine unendlich große Zahl.

Z. B. $\frac{3,2}{0} = \infty, \frac{0,3}{0} = \infty.$

III. $\frac{0}{0} = x; \frac{\infty}{\infty} = x.$

Regel: Null durch Null oder Unendlich durch Unendlich dividirt, läßt den Quotienten unbestimmt.

Z. B. $\frac{0}{0}$ kann 0, auch 1, auch 2 u. s. w. sein.

§. 6. Näherungswerthe.

I. Wenn $\frac{a}{b} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{2c.}}}}}$,

so sind die Näherungswerthe für $\frac{a}{b}$:

$$m = \frac{m}{1},\; m + \frac{1}{n} = \frac{mn+1}{n},\; m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p}} = \frac{(mn+1)p+m}{np+1},$$

$$m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}} = \frac{((mn+1)p+m)q+mn+1}{(np+1)q+n} \text{ 2c.}$$

Beispiel. Der Bruch $\frac{124}{103}$ gibt durch Division des jedesmaligen Restes in den vorhergehenden Divisor, also durch die Rechnung:

$124 : 103 = 1,$
$\underline{103}$
$103 : 21 = 4,$
$\underline{84}$
$21 : 19 = 1,$
$\underline{19}$
$19 : 2 = 9,$
$\underline{18}$
$2 : 1 = 2,$
$\underline{2}$
0

die Quotienten: 1, 4, 1, 9, 2; er läßt sich daher

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}}}$$

ßen und durch folgende Näherungswerthe, wovon die fol-

genden immer genauer und genauer werden, ausdrücken:

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{59}{49}, \frac{124}{103}.$$

II. Sind $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe von $\frac{a}{b}$ und r der folgende Nenner oder Quotient, so findet man den entsprechenden Näherungswerth durch die Formel: $\frac{a_3}{b_3} = \frac{ra_2 + a_1}{rb_2 + b_1}$. Z. B. für das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser: 3,14159... $= \frac{314159}{100000}$ führt folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l}
314159 : 100000 = 3 \\
\underline{300000} \\
100000 : 14159 = 7 \\
\underline{99113} \\
14159 : 887 = 15 \\
\underline{887} \\
5289 \\
\underline{4435} \\
887 : 854 = 1 \\
\underline{854} \\
33 \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

auf die Quotienten 3, 7, 15, 1 u. s. w. Die hieraus bestimmten Näherungswerthe sind: $\frac{3}{1}$, $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, ferner nach der letzten Regel:

$$\frac{22 \times 15 + 3}{7 \times 15 + 1} = \frac{333}{106}, \frac{333 \times 1 + 22}{106 \times 1 + 7} = \frac{355}{113}, \text{ u. s. w.}$$

Der Fehler eines Näherungswerthes $\frac{a_n}{b_n}$ ist kleiner als $\left(\frac{1}{b_n}\right)^2$; also für $\frac{22}{7}$ kleiner als $\frac{1}{49}$, für $\frac{333}{106}$ kleiner als $\frac{1}{11236}$ oder 0,000089 u. s. w.

§. 7. Potenziren.

I. $a^m \,.\, b^m = (ab)^m;\ a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$

Regel: Product oder Quotient aus zwei gleich hohen Potenzen ist gleich der Potenz aus dem Producte oder Quotienten.

Z. B. $(2,5)^3 \times 4^3 = (2,5 \times 4)^3 = 10^3 = 1000.$

$$3,45^2 : 6,9^2 = \left(\frac{3,45}{6,9}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25.$$

II. $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}.$

Regel: Potenzen von einerlei Grundzahlen werden multiplicirt oder dividirt, wenn man ihre Exponenten addirt oder subtrahirt.

Z. B. $\frac{4,1^2 \times 4,1^3}{4,1^4} = \frac{4,1^{2+3}}{4,1^4} = 4,1^{5-4} = 4,1.$

III. $(a^m)^n = a^{mn}.$

Regel: Beim Potenziren von Potenzen sind die Exponenten zu multipliciren.

Z. B. $(5^3)^2 = 5^{2 \times 3} = 5^6 = 15625,$

$0,23^4 = [(0,23)^2]^2 = 0,0529^2 = 0,00279841.$

IV. $(-a)^{2m} = a^{2m},\ (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$

Regel: Die gerade Potenz einer negativen Zahl ist positiv, die ungerade negativ.

Z. B. $(-0,4)^2 = +0,16,$

$(-0,5)^3 = -0,125.$

V. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,ab + b^2.$

Regel: Das Quadrat einer zweitheiligen Größe ist gleich der Summe aus den Quadraten beider Theile und aus dem doppelten Producte beider Theile.

Beispiel. 1) $47^2 = \left\{\begin{array}{r} 16\cdot\cdot \\ 56\cdot \\ 49 \end{array}\right\} = 2209$ 2) $0,38^2 = \left\{\begin{array}{r} 0,09\cdot\cdot \\ \cdot48\cdot \\ \cdot\cdot64 \end{array}\right\} = 0,1444.$

8

$$3)\quad 583^2 = (580+3)^2 = \left\{\begin{array}{l} 25\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot 80\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot 64\cdot\cdot \\ \cdot\cdot 348\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 9 \end{array}\right\} = 339889.$$

$$4)\quad 3745^2 = \left\{\begin{array}{r} 9\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 42\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 49\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 296\cdot\cdot\cdot \\ 16\cdot\cdot \\ 3740\cdot \\ 25 \end{array}\right\} = 14025025.$$

VI. $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2.$

Regel: Die Summe mal die Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Z. B. 1) $(5+3)\,(5-3) = 25 - 9 = 16.$

2) $1{,}43^2 - 0{,}43^2 = (1{,}43 + 0{,}43)\,(1{,}43 - 0{,}43) = 1{,}86.$

VII. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

Regel: Der Cubus einer zweitheiligen Größe ist gleich der Summe aus dem Cubus des ersten Theiles, aus dem dreifachen Producte vom Quadrate des ersten Theiles und dem zweiten Theile, aus dem dreifachen Producte des ersten Theiles und dem Quadrate des zweiten und aus dem Cubus des zweiten Theiles.

Beispiel 1) $27^3 = \left\{\begin{array}{r} 8\cdot\cdot\cdot \\ 84\cdot\cdot \\ 294\cdot \\ 343 \end{array}\right\} = 19683$ 2) $0{,}49^3 = \left\{\begin{array}{r} 64\cdot\cdot\cdot \\ 432\cdot\cdot \\ 972\cdot \\ 729 \end{array}\right\} = 0{,}117649.$

$$3)\quad 741^3 = (740+1)^3 = \left\{\begin{array}{r} 343\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 588\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 336\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot 64\cdot\cdot\cdot \\ 16428\cdot\cdot \\ 222\cdot \\ 1 \end{array}\right\} = 406869021.$$

$$4)\ 5204^3 = \left\{\begin{array}{r} 125 \\ 150 \\ 608000 \\ 3244800 \\ 24960 \\ 64 \end{array}\right\}$$

$$= 140932729664.$$

§. 8. Besondere und Grenzwerthe.

I. $a^0 = 1$.

Regel: Jede Zahl zur nullten Potenz erhoben, gibt Eins.

Z. B. $4^0 = 1$; $(0,3)^0 = 1$.

II. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; auch $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$.

Regel: Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich ihrem reciproken Werthe bei positivem Exponenten.

Z. B. $(3,5)^{-2} = \frac{1}{(3,5)^2} = \frac{1}{12,25} = 0,08163\ldots$

$$\frac{1}{(0,5)^{-3}} = (0,5)^3 = 0,125.$$

III. $a^{-\infty} = 0$.

Regel: Eine Potenz mit unendlich großem negativen Exponenten ist bei jeder Grundzahl gleich Null.

Z. B. $4^{-\infty} = 0$, auch $(0,2)^{-\infty} = 0$.

IV. $1^m = 1$.

Regel: Die Einheit bleibt beim Potenziren, was auch der Exponent ist, unverändert.

V. $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$; auch $a^m = \sqrt[\frac{1}{m}]{a}$.

Regel: Die Potenz wird zu einer Wurzel, wenn man den reciproken Werth vom Potenzexponenten zum Wurzelexponenten macht, und umgekehrt.

Z. B. 1) $2{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2{,}25} = 1{,}5.$

2) $0{,}027^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{0{,}027}\right)^2 = 0{,}3^2 = 0{,}09.$

§. 9. Wurzelausziehen.

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$, $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$

Regel: Product oder Quotient von zwei gleich hohen Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Producte oder dem Quotienten selbst.

Z. B. $\sqrt[2]{3{,}2} \times \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{3{,}2 \times 5} = \sqrt{16} = 4.$

$\sqrt[3]{0{,}0184} : \sqrt[3]{2{,}3} = \sqrt[3]{\frac{0{,}0184}{2{,}3}} = \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2.$

II. $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$; auch $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

Regel: Die Reihenfolge des Potenzirens und Wurzelausziehens ist willkürlich.

Z. B. $\sqrt[3]{(0{,}125)^2} = (0{,}125)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{0{,}125})^2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25.$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{343}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{343}} = \sqrt[2]{7} = 2{,}6457\ldots$

III. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}.$

Regel: Beim Wurzelausziehen aus Wurzeln sind die Exponenten zu multipliciren.

Z. B. $\sqrt[6]{0{,}000729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{0{,}000729}} = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3.$

IV. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}.$

Regel: Der Werth einer Wurzelpotenz bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Z. B. $\sqrt[4]{1{,}21^6} = \sqrt[2]{1{,}21^3} = 1{,}1^3 = 1{,}331.$

V. $\sqrt[2n]{+a} = \pm b, \sqrt[2n]{-a} = b\sqrt{-1}.$

$\sqrt[2n+1]{+a} = +c, \sqrt[2n+1]{-a} = -c.$

Regel: Die gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist positiv und negativ, aus einer negativen Zahl aber imaginär, d. i. unmöglich; die ungerade Wurzel einer Zahl hat mit dieser einerlei Zeichen.

Z. B. $\sqrt{9} = +3$ oder -3.; $\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1}$, d. i. unmöglich.

$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{-125} = -5.$

VI. $\sqrt{c} = a + b$ gesetzt, folgt $c = a^2 + 2ab + b^2$ und $b = \frac{c-a^2}{2a+b} < \frac{c-a^2}{2a}$.

Regel: Von den zwei Theilen, aus denen man die Quadratwurzel einer Zahl zusammensetzt, hat man den zweiten kleiner zu machen als den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Differenz zwischen der gegebenen Zahl und dem Quadrate des ersten Theiles durch das doppelte dieses Theiles dividirt.

Beispiele. 1) $\sqrt{1156} = 30 + b$ gesetzt, folgt $b < \frac{1156-900}{2 \times 30}$, d. i. $b < \frac{256}{60}$. Setzt man hiernach $b = 4$, so erhält man wirklich in $a^2 + 2ab + b^2 = 900 + 60.4 + 4^2 = 900 + 240 + 16 = 1156$ die gegebene Zahl.

2) $\sqrt{7569} = 80 + 7 = 87$, wie folgende Rechnung zeigt:

$c =$	75	69
$a^2 =$	64	..
$c-a^2 =$	11	69
$2a =$	(1	6)
$2ab =$	11	2
$b^2 =$		49
	11	69

3) $\sqrt{131044} = 360 + 2 = 362$

denn	13	10	44
$3^2 =$	9		
	4	10	
$2 \times 3 =$		(6)	
$2 \times 3 \times 6 =$	3	6	
$6^2 =$		36	
	3	96	
		14	44
$2 \times 36 =$		(7	2)
$2 \times 36 \times 2 =$		14	4
$2^2 =$			4
		14	44

4) $\sqrt{9{,}6} = 3{,}0983\,..$

denn	9	60		
$3^2 =$	9			
		60	00	
$2 \times 30 =$		(6	0)	
$2 \times 30 \times 9 =$		54	0	
$9^2 =$			81	
		54	81	
		5	19	00
$2 \times 309 =$			(61	8)
$2 \times 309 \times 8 =$		4	94	4
$8^2 =$				64
		4	95	04

VII. $\sqrt[3]{c} = a + b$ gesetzt, folgt $c = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

und $b = \dfrac{c - a^3}{3a^2 + 3ab + b^2} < \dfrac{c - a^3}{3a^2}$.

Regel: Setzt man die Cubikwurzel einer Zahl aus zwei Theilen zusammen, so hat man den zweiten Theil kleiner zu nehmen als den Quotienten, welcher sich herausstellt, wenn man die Differenz zwischen der gegebenen Zahl und dem Cubus des ersten Theiles durch das dreifache Quadrat desselben dividirt.

Beispiele. 1) $\sqrt[3]{405224} = 70 + b$ gesetzt, folgt $b < \dfrac{405224 - 343000}{3 \times 4900}$ d. i. $b < \dfrac{62224}{14700}$. Setzt man hiernach $b = 4$, so erhält man wirklich
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 343000 + 58800 + 3360 + 64 = 405224$.

2) $\sqrt[3]{117649} = 49$, wie folgende Rechnung zeigt·

$c =$	117	649
$a^3 =$	64	
$c - a^3 =$	53	649
$3a^2 =$	(4	8)..
$3a^2b =$	43	2 ..
$3ab^2 =$	9	72 .
$b^3 =$		729
	53	649

3) $\sqrt[3]{}$	17	173	512	$= 250 + 8 = 258$
$2^3 =$	8			
	9	173		
$3 \times 2^2 =$	(1	2)..		
$3 \times 2^2 \times 5 =$	6	0..		
$3 \times 2 \times 5^2 =$	1	50.		
$5^3 =$		125		
	7	625		
	1	548	512	
$3 \times 25^2 =$		(187	5)	
$3 \times 25^2 \times 8 =$	1	500	0	
$3 \times 25 \times 8^2 =$		48	00	
$8^3 =$			512	
	1	548	512	

4) $\sqrt[3]{5,8} = 1,7967..$

1			
4	800		
	(3)		
2	1		
1	47		
	343		
3	913		
	887	000	
	(86	7)	
	780	3	
	41	31	
		729	
	822	339	
	64	661	000
	(9	612	3)

§. 10. Logarithmenrechnung.

I. $log. (ab) = log. a + log. b.$

Regel: Der Logarithme eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Z. B. $log. (453 \times 2,9734) = log. 453 + log. 2,9734$

$$= \left\{ \begin{array}{r} 2,65610 \\ 0,47325 \end{array} \right\}$$

$$= 3,12935$$

daher $453 \times 2,9734 = num. 3,12935 = 1346,95.$

II. $log. \left(\frac{a}{b}\right) = log.\ a - log.\ b.$

Regel: Der Logarithme eines Bruches oder Quotienten ist gleich der Differenz von den Logarithmen des Zählers und Nenners oder des Dividenden und Divisors.

Z. B. 1) $log. \left(\frac{85{,}79}{0{,}1648}\right) = log.\ 85{,}79 - log.\ 0{,}1648$

$$= \left\{\begin{array}{r} 1{,}93344 \\ -0{,}21696-1 \\ \hline 2{,}71648 \end{array}\right\}$$ daher

$$\frac{85{,}79}{0{,}1648} = num.\ 2{,}71648 = 520{,}57.$$

2) $log.\left(\frac{0{,}0874 \times 2945}{0{,}003642}\right) = log. 0{,}0874 + log. 2945 - l. 0{,}003642$

$$\begin{array}{rcl} log.\ 0{,}0874 & = & 0{,}94151-2 \\ log.\ 2945 & = & 3{,}46909 \\ \hline & & 2{,}41060 \\ log.\ 0{,}003642 & = & 0{,}56134-3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{0{,}0874 \times 2945}{0{,}003642} = num.\ 4{,}84926 = 70674.$$

III. $log. (a^m) = m\ log.\ a.$

Regel: Der Logarithme einer Potenz ist gleich dem Producte aus dem Exponenten und dem Logarithmen der Grundzahl.

Beispiele. 1) $log.(1{,}765^3) = 3 \times log. 1{,}765 = 3 \times 0{,}24674$

$$= 0{,}74022$$

$$1{,}765^3 = num.\ 0{,}74022 = 5{,}4982.$$

2) $log.\ \sqrt[3]{43{,}59} = log.\ 43{,}59^{1/3} = \frac{log. 43{,}59}{3}$

$$= 1{,}63939 : 3 = 0{,}54646$$

$$\sqrt[3]{43{,}59} = num.\ 0{,}54646 = 3{,}5193.$$

3) $log. \sqrt[5]{0{,}037^3} = log. (0{,}037^{3/5}) = \frac{3}{5} \times log. 0{,}037$

$$= \frac{3}{5} \times \begin{array}{r} 0{,}56820-2 \\ \hline 0{,}70460-5 \\ \hline 0{,}14092-1 \end{array}$$

$$\sqrt[5]{0{,}037^3} = 0{,}13833\ldots$$

Zweites Kapitel.

Gleichungen.

---

§. 11. Grundregeln.

I. Ist $x \pm a = b$, so folgt $x = b \mp a$.

Regel: Jedes Glied einer Gleichung läßt sich mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite setzen.

Z. B. 1) $x - 0{,}54 = 2{,}36$ gibt $x = 2{,}36 + 0{,}54 = 2{,}9$.
2) $5{,}602 - x = 2{,}862$ gibt $x = 5{,}602 - 2{,}862 = 2{,}74$.

II. Ist $ax = b$, so folgt $x = \frac{b}{a}$, und

ist $\frac{x}{a} = b$, so ergibt sich $x = ab$.

Regel: Ein Factor der einen Seite läßt sich als Divisor, und ein Divisor der einen Seite als Factor auf die andere Seite setzen.

Z. B. 1) $3{,}5x + 0{,}46 = 9{,}34$ gibt $x = \frac{9{,}34 - 0{,}46}{3{,}5} = 2{,}5371\ldots$

2) $3{,}5(x + 0{,}46) = 9{,}34$ gibt $x = \frac{9{,}34}{3{,}5} - 0{,}46 = 2{,}2085\ldots$

3) $\frac{x - 0{,}094}{0{,}42} = 23{,}1$, gibt $x = 0{,}42 \times 23{,}1 + 0{,}094 = 9{,}796$.

4) $\frac{3{,}4 + 6x}{0{,}85 - x} = 104$, gibt $3{,}4 + 6x = 88{,}4 - 104x$,

$110x = 85$, $x = \frac{17}{22} = 0{,}7727\ldots$

III. Ist $x^m = b$, so folgt $x = \sqrt[m]{b}$ und

ist $\sqrt[m]{x} = b$, so folgt $x = b^m$.

Regel: Anstatt die eine Seite einer Gleichung

zur Potenz zu erheben, kann man aus der anderen Seite die gleichhohe Wurzel ziehen, und umgekehrt das Wurzelausziehen aus der einen Seite kann durch Potenziren der anderen ersetzt werden.

Z. B. 1) $(3x-0{,}95)^2 = 85{,}4$ gibt $3x - 0{,}95 = \sqrt[2]{85{,}4}$,

und $x = \frac{9{,}2412+0{,}95}{3} = \frac{10{,}1912}{3} = 3{,}397\ldots$

2) $\sqrt[2]{5x}+2{,}3 = 4{,}65$ gibt $\sqrt[2]{5x} = 2{,}35$, $5x = (2{,}35)^2$

und $x = \frac{5{,}5225}{5} = 1{,}1045$.

IV. Ist $a^x = b$, so folgt $x\,log.\,a = log.\,b$ und $x = \frac{log.\,b}{log.\,a}$.

Regel: Um eine Gleichung, welche die Unbekannte im Exponenten hat, (eine Exponentialgleichung) aufzulösen, hat man aus beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen zu nehmen.

Z. B. $3^{2x-1} = 20$ gibt $(2x-1)\,log.\,3 = log.\,20$, und

$$2x - 1 = \frac{log.\,20}{log.\,3} = \frac{1{,}30103}{0{,}47712} = 2{,}7268,$$

$$x = \frac{3{,}7268}{2} = 1{,}8634\ldots$$

§. 12. Proportionen.

I. Ist $x : a = b : c$, oder $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, so folgt

$$cx = ab \text{ und } x = \frac{ab}{c}.$$

Regel: Bei jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem der inneren.

Beispiel. Wenn 1 Meter = 3,0784 pariser Fuß = 3,1862 preuß. Fuß beträgt, wie viel pariser Fuß gehen auf 540,9 preuß. Fuß? Es läßt sich setzen:

$x : 540{,}9 = 3{,}0784 : 3{,}1862$; oder

$3{,}1862 \times x = 540{,}9 \times 3{,}0784$ und folgt

$$x = \frac{540{,}9 \times 3{,}0784}{3{,}1862} = 522{,}60 \text{ par. Fuß.}$$

II. Ist $x : a = b : x$ oder $a : x = x : b$, so folgt

$$x^2 = ab \text{ und } x = \sqrt{ab}.$$

Regel: Bei einer stetigen Proportion ist das Quadrat von einem der beiden gleichen Glieder gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Beispiel. Die Zahl 35 ist in einer Unbekannten gerade soviel Mal enthalten, wie diese in der Zahl 10,9, welches ist diese Unbekannte? Es ist

$$35 : x = x : 10{,}9; \text{ daher } x^2 = 35 \times 10{,}9 = 381{,}5$$

$$\text{und } x = \sqrt{381{,}5} = 19{,}532.$$

III. Aus $x : a = b : c$ folgt auch $x : b = a : c$.

Regel: Eine Proportion bleibt unverändert, wenn die beiden inneren oder die beiden äußeren Glieder unter einander verwechselt werden.

Wenn z. B. $x : 3 = 5 : 15$ ist, so hat man auch

$x : 5 = 3 : 15$ u. s. w.

IV. Ist $x : a = b : c$, so hat man auch

$$(x \pm a) : a = (b \pm c) : c.$$

Regel: Eine Proportion bleibt eine solche, wenn man statt des ersten Gliedes die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder, und statt des dritten Gliedes die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder einsetzt.

Z. B. Aus $16 : 20 = 4 : 5$ folgt auch

$36 : 20 = 9 : 5$, auch

$4 : 20 = 1 : 5$ u. s. w.

§. 13. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

I. Ist $x + y = s$ und

$x - y = d$, so hat man

$$x = \frac{s + d}{2} \text{ und } y = \frac{s - d}{2}.$$

Regel: Man findet aus der Summe und Differenz zweier Größen die eine Größe, indem man

die halbe Differenz zur halben Summe addirt, und die andere, indem man die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt.

Z. B. Wenn $x + y = 18$ und
$x - y = 4$ ist, so hat man

$$x = \frac{18 + 4}{2} = 11 \text{ und } y = \frac{18 - 4}{2} = 7.$$

II. Ist $a_1 x + b_1 y = c_1$ und zugleich
$a_2 x + b_2 y = c_2$, so folgt

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}.$$

Beispiel. Ist $3x + 2y = 33$ und $5x - 2y = 7$, so erhält man $x = \dfrac{-33 \times 2 - 7 \quad 2}{-\ 3 \times 2 - 5 \times 2} = \dfrac{66 + 14}{6 + 10} = \dfrac{80}{16} = 5$

$$\text{und } y = \frac{33 \times 5 - 7 \times 3}{5 \times 2 + 3 \times 2} = \frac{144}{16} = 9.$$

III. Ist $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$
$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$ und
$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$, so ergibt sich

$$x = \frac{d_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + d_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + d_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)},$$

$$y = \frac{d_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + d_2 (a_3 c_1 - a_1 c_3) + d_3 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + b_2 (a_3 c_1 - a_1 c_3) + b_3 (a_1 c_2 - a_2 c_1)},$$

$$z = \frac{d_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + d_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + d_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}.$$

Beispiel. Wenn $2x + 5y - 7z = -288$,
$5x - y + 3z = 227$,
$7x + 6y + z = 297$; dann folgt

$$x = \frac{288 \times 19 - 227 \times 47 + 297 \times 8}{-2 \times 19 - 5 \times 47 + 7 \times 8} = \frac{2821}{217} = 13,$$

$$y = \frac{288 \times 16 - 227 \times 51 + 297 \times 41}{-5 \times 16 + 1 \times 51 + 6 \times 41} = \frac{5208}{217} = 24,$$

$$z = \frac{-288 \times 37 + 227 \times 23 - 297 \times 27}{-7 \times 37 + 3 \times 23 - 1 \times 27} = \frac{13454}{217} = 62.$$

§. 14. Quadratische Gleichungen.

I. Ist $x^2 + ax = b$, so folgt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Beispiel. 1) $x^2 + 4x = 77$ gibt $x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{77 + \left(\frac{4}{2}\right)^2}$

$$= -2 \pm \sqrt{81} = 7 \text{ oder } -11.$$

2) $(x+3)(x-11) = 32$, oder $x^2 - 8x = 65$ gibt

$$x = 4 \pm \sqrt{65+16} = 4 \pm \sqrt{81} = 13 \text{ oder } -5.$$

3) $9x = 10 + \sqrt{15x}$, oder $(9x-10)^2 = 15x$ oder

$x^2 - \frac{195}{81}x = -\frac{100}{81}$ gibt

$$x = \frac{195 \pm \sqrt{195^2 - 32400}}{162} = \frac{195 \pm \sqrt{5625}}{162}$$

$$= \frac{270}{162} = \frac{5}{3} \text{ oder } \frac{120}{162} = \frac{20}{27}.$$

II. Ist $x^{2n} + ax^n = b$, so folgt

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Beispiel. $x^6 - 12x^3 = 108$, oder $x^{2 \times 3} - 12x^3 = 108$ gibt

$$x = \sqrt[3]{+\frac{12}{2} \pm \sqrt{108 + \left(\frac{12}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{6 \pm \sqrt{144}}$$

$$= \sqrt[3]{18} = 2{,}6207\ldots \text{ oder } \sqrt[3]{-6} = -1{,}8171\ldots$$

III. Wenn $x + y = s$ und

$xy = p$, so findet man

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ und } y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Beispiel. 1) Die Summe zweier Zahlen ist 20, ihr Product 96, daher die Zahlen selbst:

$$x = \frac{20 + \sqrt{20^2 - 4 \times 96}}{2} = \frac{20 + \sqrt{16}}{2} = \frac{20+4}{2} = 12 \text{ und}$$

$$y = \frac{20-4}{2} = 8.$$

2) Die Differenz zweier Zahlen ist 4 und ihr Product 77; daher

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4 \times 77}}{2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 308}}{2} = \frac{4 + \sqrt{324}}{2} = 11,$$

$$y = 11 - 4 = 7.$$

§. 15. Cubische Gleichungen.

I. Die viergliedrige cubische Gleichung.
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ geht in die dreigliedrige $x_1^3 + b_1 x_1 + c_1 = 0$ über, wenn man setzt:

$$1)\quad x_1 = x - \frac{a}{3}$$

$$2)\quad b_1 = b - \frac{a^2}{3}$$

$$3)\quad c_1 = c - \frac{ab}{3} + \frac{2}{27} a^3.$$

Beispiel. Die viergliedrige cubische Gleichung

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

verwandelt sich in folgende dreigliedrige:

$$x_1^3 + 9x_1 + 6 = 0, \text{ weil}$$

$$b - \frac{a^2}{3} = 57 - 48 = 9 \text{ und}$$

$$c - \frac{ab}{3} + \frac{2}{27} a^3 = -94 + 228 - 128 = 6 \text{ ist.}$$

II. Die Cardanische Regel gibt für die cubische Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ die Wurzel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}.$$

Diese Regel führt auf ein reelles Resultat, entweder wenn b positiv, oder wenn b negativ und zugleich

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Beispiel. Für die Gleichung $x^3 - 12x - 28 = 0$ ist die einzige Wurzel:

$$x = \sqrt[3]{\frac{28}{2} + \sqrt{-\left(\frac{12}{3}\right)^3 + \left(\frac{28}{2}\right)^2}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{28}{2} - \sqrt{-\left(\frac{12}{3}\right)^2 + \left(\frac{28}{2}\right)^2}}$$
$$= \sqrt[3]{14 + \sqrt{-64 + 196}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{-64 + 196}}$$
$$= \sqrt[3]{14 + \sqrt{132}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{132}} = \sqrt[3]{25,489} + \sqrt[3]{2,5109}$$
$$= 2,9429 + 1,3592 = 4,3021..$$

III. Die trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ gibt

1) $y = \sqrt{-\frac{4}{3}b}$, 2) $sin. 3\varphi^0 = \frac{c}{2}\left(-\frac{3}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$ *) und

3) $x = y \; sin. \varphi^0$, ferner $= y \; sin. (60^0 - \varphi^0)$ und $= - y \; sin. (60^0 + \varphi^0)$.

Diese Formel ist nur anwendbar, wenn b negativ und $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$; in welchem Falle es aber stets die eben angegebenen drei Wurzeln gibt.

Beispiel. Für die Gleichung

$x^3 - 12x + 9 = 0$ ist $y = \sqrt{\frac{4}{3} \times 12} = \sqrt{4 \times 4} = 4$,

$$sin. 3\varphi = \frac{9}{2}\left(+\frac{3}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}\left(+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$$
$$= 0,5625.$$

Diesem Werthe entspricht $3\varphi = 34^0, 13', 44''$; und es ist hiernach $\varphi^0 = 11^0, 24', 35''$; ferner

$60^0 - \varphi = 48^0, 35', 25''$, endlich
$60^0 + \varphi = 71^0, 24', 35''$.

---

*) φ spr. Phi.

Diesemnach sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung:
$x = y \sin.\varphi^0 = 4 \times \sin. 11^0,24',35'' = 4 \times 0,19782 = 0,7913$,
$x = y \sin.(60^0 - \varphi^0) = 4 \times \sin. 48^0,35',25'' = 4 \times 0,75 = 3,0000$,
$x = -y \sin.(60 + \varphi) = -4 \times \sin. 71^0,24',35'' = -4 \times 0,9478 = -3,7912$.

§. 16. Auflösung höherer Gleichungen durch Näherung.

I. Ist x_1 ein Näherungswerth von $x^2 + ax + b = 0$, so folgt genauer

$$x = \frac{x_1^2 - b}{2x_1 + a}.$$

Beispiel. Für $x^2 - 8x - 14 = 0$ gibt $x_1 = 9$ zu wenig und $x_1 = 10$ zu viel, nämlich ersteres -5 und letzteres $+6$, es läßt sich daher $x_1 = 9\frac{1}{2}$ als erster Näherungswerth einführen. Die Formel gibt nun

$$x = \frac{(9,5)^2 + 14}{2 \times 9,5 - 8} = \frac{104,25}{11} = 9,4772.$$

II. Ist x_1 ein Näherungswerth von $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so folgt genauer

$$x = \frac{2x_1^3 + ax_1^2 - c}{3x_1^2 + 2ax_1 + b}.$$

Beispiel. Für $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$ gibt $x_1 = 3$ den Fehler $27 - 108 + 171 - 94 = -4$, $x_1 = 3\frac{1}{2}$ aber gibt ihn $= 42,875 - 147 + 199,5 - 94 = 1,375$; es läßt daher $x = 3,4$ als Näherungswerth einführen. Die Formel gibt

$$x = \frac{2 \times (3,4)^3 - 12(3,4)^2 + 94}{3 \times (3,4)^2 - 2 \times 12 \times 3,4 + 57} = \frac{78,608 + 94 - 138,72}{34,68 + 57 - 81,6}$$
$$= \frac{33,888}{10,08} = 3,362.$$

III. Ist x_1 ein Näherungswerth der Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

so folgt genauer

$$x_1 = \frac{3x_1^4 + 2ax_1^3 + bx_1^2 - d}{4x_1^3 + 3ax_1^2 + 2bx_1 + c}.$$

Beispiel. Der Gleichung $x^4+8x^2+16x-440=0$ wird beinahe Genüge geleistet durch $x=4$; setzen wir aber $x_1=4$, so folgt

$$x=\frac{3\times4^4+2\times0+8\times4^2+440}{4\times4^3+3\times0+2\times8\times4+16}=\frac{768+128+440}{256+64+16}$$
$$=\frac{1336}{336}=\frac{167}{42}=3{,}976.$$

Führen wir diese Zahl 3,976 nochmals als Näherungswerth ein, so erhalten wir

$$x=\frac{3\times3{,}976^4+8\times3{,}976^2+440}{4\times3{,}976^3+2\times8\times3{,}976+16}=\frac{1316{,}20}{331{,}04}=3{,}975953.$$

IV. Ist x_1 ein Näherungswerth von $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, so hat man schärfer:

$$x=\frac{4x^5_1+3ax^4_1+2bx^3_1+cx^2_1-e}{5x^4_1+4ax^3_1+3bx^2_1+2cx_1+d}.$$

Beispiel. Für die Gleichung $x^5-0{,}00719x^2-0{,}0024070=0$, ist ungefähr $x=0{,}3$, denn $(0{,}3)^5-0{,}00719\times(0{,}3)^2-0{,}002407$ $=0{,}002430-0{,}000647-0{,}002407=-0{,}00062$; setzen wir daher $x_1=0{,}3$, so folgt der genauere Werth

$$x=\frac{4\times(0{,}3)^5-0{,}00719\times(0{,}3)^2+0{,}002407}{5\times(0{,}3)^4-2\times0{,}00719\times0{,}3}$$
$$=\frac{0{,}00972-0{,}000647+0{,}002407}{0{,}0405-0{,}004314}.$$
$$=\frac{0{,}01148}{0{,}036186}=0{,}3172.$$

V. Gibt die numerische Gleichung $X=0$, für den Näherungswerth x_1 das kleine Resultat X_1, und für den Näherungswerth x_2 das kleine Resultat X_2, so hat man

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{X_1}{X_2} \text{ und hiernach } x=\frac{x_1X_2-x_2X_1}{X_2-X_1}.$$

Regel: Es verhalten sich die Fehler der Hypothesen (x_1, x_2) wie die Fehler (X_1, X_2) der Resultate, insofern letztere überhaupt klein sind.

Beispiel 1. Für die Gleichung $x+log.nat.x-2=0$ gibt der Näherungswerth oder die Hypothese

$x_1=1{,}5$ den Fehler $1{,}5+0{,}4055-2=-0{,}0945$;

dagegen $x_2 = 1,6$ den Fehler $1,6 + 0,4700 - 2 = +0,0700$, es ist daher der genauere Werth

$$x = \frac{1,5 \times 0,0700 + 1,6 \times 0,0945}{0,0700 + 0,0945} = \frac{0,1050 + 0,1512}{0,1645}$$

$$= \frac{2562}{1645} = 1,5574.$$

Beispiel 2. Für $x - sin.\ x = \frac{3}{4}$ ist annähernd $x_1{}^0 = 99$ Grad, denn: Bogen $x_1 =$ Bogen $99^0 = 3,14159 \times \frac{99}{180}$ $= 1,72788$; $sin.\ 99^0 = sin.\ 81^0 = 0,98769$, daher der Fehler:

$$X_1 = 1,72788 - 0,98769 - 0,75000 = -0,00981.$$

Nimmt man $x_2 = 100^0$, so bekommt man den Fehler:

$$X_2 = 1,74533 - 0,98481 - 0,75000 = 0,01052.$$

Jetzt läßt sich der gesuchte Werth von x setzen:

$$x = \frac{99 \times 0,01052 + 100 \times 0,00981}{0,01052 + 0,00981} = \frac{2,02248}{0,02033} = 99^0,4825$$

$$= 99^0,\ 29'.$$

§. 17. Methode der kleinsten Quadrate.

I. Hat man für eine und dieselbe Größe (x) die mit unbekannten kleinen Fehlern behafteten Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ beobachtet, so ist dieselbe

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$ zu setzen.

Regel: Man findet den wahrscheinlichsten Werth einer Größe, wenn man aus den beobachteten Werthen derselben das arithmetische Mittel nimmt, d. h. wenn man die Summe dieser Werthe durch ihre Anzahl dividirt.

Beispiel. Hat man durch wiederholtes Nivelliren einen und denselben Höhenabstand 5,62 Fuß, 5,59 Fuß, 5,46 Fuß und 5,49 Fuß gefunden, so kann man deshalb den wahrscheinlichsten Werth dieses Abstandes:

$$x = \frac{5,62 + 5,59 + 5,46 + 5,49}{4} = 5 + \frac{2,16}{4} = 5,54$$ Fuß setzen.

II. Hat man für die der Formel $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden veränderlichen Größen u, v und y die zusammengehörigen, mit kleinen Fehlern behafteten Werthe

$$\begin{array}{l} y_1, u_1, v_1, \\ y_2, u_2, v_2, \\ y_3, u_3, v_3, \\ \vdots \\ y_n, u_n, v_n \end{array}$$

gefunden, so sind die wahrscheinlichsten Werthe der constanten Factoren (α und β) *) folgende:

$$1)\quad \alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uy) - \Sigma(uv)\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}$$

$$2)\quad \beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vy) - \Sigma(uv)\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}.$$

Das Zeichen Σ **) deutet die Summation aller gleichartigen Größen an, deren allgemeine Zeichen in der Parenthese eingeschlossen sind, vor welcher Σ steht.

Beispiel. Durch Versuche hat sich herausgestellt, daß ein horizontales Wasserrad bei folgenden Umdrehungen in der Minute:

$u_1 = 100$, $u_2 = 90$, $u_3 = 80$, $u_4 = 70$, $u_5 = 60$, $u_6 = 50$,

folgende Arbeiten, in Pferdekräften ausgedrückt, leistete:

$A_1 = 15$, $A_2 = 19$, $A_3 = 22$, $A_4 = 24$, $A_5 = 25$, $A_6 = 23$;

man will hieraus eine allgemeine Formel für die Leistung dieses Rades finden.

Setzt man nun allgemein diese Arbeit

$$A = \alpha u + \beta u^2,$$

so lassen sich die Constanten α und β durch folgende Formeln bestimmen:

$$\alpha = \frac{\Sigma(u^4)\,\Sigma(Au) - \Sigma(u^3)\Sigma(Au^2)}{\Sigma(u^2)\Sigma(Au^4) - \Sigma(u^3)\Sigma(u^3)},$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(Au^2) - \Sigma(u^3)\Sigma(Au)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(u^4) - \Sigma(u^3)\Sigma(u^3)}.$$

*) α spr. Alpha, β spr. Beta.

**) Σ spr. Sigma.

u^2	u^3	u^4	Au	Au^2
10000	1000000	100000000	1500	150000
8100	729000	65610000	1710	153900
6400	512000	40960000	1760	140800
4900	343000	24010000	1680	117600
3600	216000	12960000	1500	90000
2500	125000	6250000	1150	57500
35500 $=\Sigma(u^2)$	2925000 $=\Sigma(u^3)$	249790000 $=\Sigma(u^4)$	9300 $=\Sigma(Au)$	709800 $=\Sigma(Au^2)$

Aus diesen Summen folgen

1) $\alpha = \frac{24979 \times 93 - 2925 \times 709{,}8}{355 \times 24979 - 2925 \times 2925} = \frac{246882}{311920} = 0{,}7914.$

2) $\beta = \frac{255 \times 7098 - 2925 \times 930}{35500 \times 24979 - 2925 \times 292500} = -\frac{20046}{3119200}$
$= -0{,}00643.$

Es läßt sich hiernach die Arbeit dieses Wasserrades setzen:

$A = 0{,}791 \times u - 0{,}00643 \times u^2$ Pferdekräfte.

Diese Formel gibt für die zum Grunde gelegten Umdrehungszahlen:

$u_1 = 100,\ u_2 = 90,\ u_3 = 80,\ u_4 = 70,\ u_5 = 60,\ u_6 = 50,$

die von den obigen nur wenig abweichenden Arbeiten:

$A_1 = 14{,}8, A_2 = 19{,}1, A_3 = 22{,}2, A_4 = 23{,}9, A_5 = 24{,}3, A_6 = 23{,}5.$

Nach der gefundenen Formel ist die Arbeit Null nicht nur bei $u = 0$, sondern auch bei $u = \frac{79140}{643} = 123$ Umdrehungen in der Minute; sie ist endlich ein Maximum und zwar $= 24{,}4$ Pferdekräfte, für $u = 61\frac{1}{2}$ Umdrehungen.

III. Sind für die Formel

$$y = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

die nur mit kleinen zufälligen Fehlern behafteten Werthe

$y_1, u_1, v_1, w_1,$
$y_2, u_2, v_2, w_2,$
y_3, u_3, v_3, w_3 u. s. w.

bekannt, so lassen sich die richtigsten Werthe der constanten Coefficienten (α, β, γ) durch folgende drei Gleichungen bestimmen:

1) $\alpha\,\Sigma(u^2) + \beta\,\Sigma(uv) + \gamma\,\Sigma(uw) = \Sigma(uy)$,
2) $\beta\,\Sigma(v^2) + \alpha\,\Sigma(uv) + \gamma\,\Sigma(vw) = \Sigma(vy)$,
3) $\gamma\,\Sigma(w^2) + \alpha\,\Sigma(uw) + \beta\,\Sigma(vw) = \Sigma(wy)$.

Beispiel. Für drei unbekannte Größen α, β, γ hat man folgende fünf nur annähernd richtige Bestimmungsgleichungen:

$$4\beta + 2\gamma = 13,$$
$$2\alpha + 6\beta + \gamma = 18,$$
$$3\alpha + \beta + 10\gamma = 33,$$
$$4\alpha + 2\beta + 15\gamma = 56,$$
$$10\alpha + 3\beta + 6\gamma = 32;$$

man soll die wahrscheinlichsten Werthe dieser Unbekannten ermitteln. Man findet sehr leicht:

$\Sigma(u^2) = 129$, $\Sigma(uv) = 53$, $\Sigma(uy) = 679$,
$\Sigma(v^2) = 66$, $\Sigma(uw) = 152$, $\Sigma(vy) = 401$,
$\Sigma(w^2) = 366$, $\Sigma(vw) = 72$, $\Sigma(wy) = 1406$;

und hiernach folgende drei Bestimmungsgleichungen:

$$129\alpha + 53\beta + 152\gamma = 679,$$
$$53\alpha + 66\beta + 72\gamma = 401,$$
$$152\alpha + 72\beta + 366\gamma = 1406.$$

Hieraus lassen sich die Gleichungen

$$-0{,}1126\,\alpha + 0{,}5680\,\beta = 1{,}1020,$$
$$+0{,}3208\,\alpha + 0{,}7191\,\beta = 3{,}8415,$$

ableiten, aus welchen nun

1) $\alpha = 0{,}7181$,
2) $\beta = 2{,}0825$ folgt, wodurch sich endlich
3) $\gamma = 3{,}1310$ ergibt.

Setzt man diese Werthe in die ersten fünf Gleichungen, so erhält man die Werthe: 14,592; 17,065; 35,547; 54,002; 32,214, die von den gegebenen Werthen 13, 18, 33, 56, 32 zum Theil sehr wenig abweichen.

Drittes Kapitel.

Reihen.

---

§. 18. Binomische Reihe.

I. $(a+x)^n$

$$=a^n+na^{n-1}.x+\frac{n(n-1)}{1\;.\;2}a^{n-2}.x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{n-3}.x^3+\ldots$$

$$=a^n+\Sigma\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;r}a^{n-r}.x^r\right].$$

II. $(a-x)^n$

$$=a^n-na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}.x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{n-3}x^3+\ldots$$

$$=a^n+\Sigma\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;r}a^{n-r}x^r\right].$$

Setzt man $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ u. s. w., so erhält man hiernach:

$(a\pm x)^1=a\pm x$,
$(a\pm x)^2=a^2\pm 2ax+x^2$,
$(a\pm x)^3=a^3\pm 3a^2x+3ax^2\pm x^3$,
$(a\pm x)^4=a^4\pm 4a^3x+6a^2x^2\pm 4ax^3+x^4$,
$(a\pm x)^5=a^5\pm 5a^4x+10a^3x^2\pm 10a^2x^3+5ax^4\pm x^5$,
$(a\pm x)^6=a^6\pm 6a^5x+15a^4x^2\pm 20a^3x^3+15a^2x^4\pm 6ax^5+x^6$,
$(a\pm x^7)=a^7\pm 7a^6x+21a^5x^2\pm 35a^4x^3+35a^3x^4\pm 21a^2x^5+7ax^6\pm x^7$

III. $$(a+x)^n=a^n\left[1+n\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\;.\;2\;.\;3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\ldots\right]$$

IV. $$(a+x)^n=a^n\left[1+n\left(\frac{x}{a+x}\right)+\frac{n(n+1)}{1\;.\;2}\,.\left(\frac{x}{a+x}\right)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\;.\;2\;.\;3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\ldots\right].$$

Setzt man $n = \frac{1}{2}$ und $n = \frac{1}{3}$, so bekommt in der Gleichung III. folgende Formeln zur Ausziehung der Wurzeln:

$$1)\ \sqrt{a+x}=\sqrt{a}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)-\tfrac{1}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\tfrac{1}{16}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \tfrac{5}{128}\left(\frac{x}{a}\right)^4+\tfrac{7}{256}\left(\frac{x}{a}\right)^5-\ldots\right]$$

$$2)\ \sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{a}\left[1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)-\tfrac{1}{9}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\tfrac{5}{81}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \tfrac{10}{243}\left(\frac{x}{a}\right)^4+\tfrac{22}{729}\left(\frac{x}{a}\right)^5-\ldots\right].$$

Beispiel 1) $\sqrt{103} = \sqrt{100+3} = \sqrt{10^2+3}$
$=10(1+\tfrac{1}{2}.0,03-\tfrac{1}{8}.0,0009+\tfrac{1}{16}.0,000027-\tfrac{5}{128}.0,00000081+..)$
$=10(1+0,015-0,0001125+0,000001685-0,00000003)$
$=10\times1,01488915=10,1488915\ldots$

2) $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{512-12} = \sqrt[3]{8^3-12}$
$$=8\left(1-\tfrac{1}{3}.\frac{12}{512}-\tfrac{1}{9}\left(\frac{12}{512}\right)^2-\tfrac{5}{81}.\left(\frac{12}{512}\right)^3-\ldots\right)$$
$=8(1-\tfrac{1}{3}\times0,0234375-\tfrac{1}{9}\times0,0005493-\tfrac{5}{81}\times0,0000129)$
$=8(1-0,0078125-0,0000610-0,0000008)$
$=8-8\times0,0078743=8-0,0629944$
$=7,937005.$

Die Reihe Nr. IV. ist eine endliche, wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, während in diesem Falle die Reihe Nr. III. ohne Ende fortgeht. Z. B.:

$$\frac{1}{(a+x)^3}=(a+x)^{-3}=a^{-3}\left(1-3\left(\frac{x}{a+x}\right)+3\left(\frac{x}{a+x}\right)^2-\left(\frac{x}{a+x}\right)^3\right).$$

Beispiel. $\sqrt{\frac{1}{40}}=40^{-\frac{1}{2}} = (36+4)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\tfrac{1}{6}\left(1-\tfrac{1}{2}\times\frac{4}{40}-\frac{\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}+1)}{1\times2}.\left(\frac{4}{40}\right)^2 - \frac{\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}+1)(-\tfrac{1}{2}+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.\left(\frac{4}{40}\right)^3\ldots\right)$$

$=\tfrac{1}{6}(1-\tfrac{1}{2}.0,1-\tfrac{1}{8}\times0,01-\tfrac{1}{16}\times0,001-\tfrac{5}{128}\times0,0001\ldots)$

$$=\tfrac{1}{6}\times\left\{\begin{array}{l}1-0,05\\ \quad-0,00125\\ \quad-0,0000625\\ \quad-0,0000039\end{array}\right\}=\tfrac{1}{6}(1-0,0513164)$$

$=0,158114.$

§. 19. Exponential- und logarithmische Reihen.

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$

$= 1 + \Sigma\left(\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}\right)$; wo

$e = 2{,}7182818284\ldots$ die Grundzahl des natürlichen oder hyperbolischen Logarithmensystemes bezeichnet. Z. B.:

$\sqrt[3]{e} = e^{1/3} = 1 + 1/3 + 1/2 \times 1/9 + 1/6 \times 1/27 + 1/24 \times 1/81 + 1/120 \times 1/243 + \ldots$

$$= \left\{\begin{matrix} 1{,}333333\cdot\cdot \\ \cdot 55555 \\ \cdot\cdot 6173 \\ \cdot\cdot\cdot 514 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot 34 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 2 \end{matrix}\right\} = 1{,}39561\ldots$$

II. $a^x = 1 + \frac{x}{m} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots,$

wo $\frac{1}{m} = log.nat.\,a$, und m der Modul des der Grundzahl a entsprechenden Logarithmensystemes ist. Für die briggischen oder gemeinen Logarithmen ist $a = 10$ und $\frac{1}{m} = log.nat.\,10$ $= 2{,}30258509\ldots m = 0{,}4342945\ldots$

III. $log.nat.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$

Diese Reihe ist nur brauchbar, um die Logarithmen der von Eins wenig abweichenden Zahlen zu finden.

Z. B. $log.\ nat.\ 6/5 = log.\ nat.\ (1 + 1/5)$ ist

$= 1/5 - 1/2 \cdot 1/25 + 1/3 \cdot 1/125 - 1/4 \cdot 1/625 + 1/5 \cdot 1/3125 - \ldots$

$$= \left\{\begin{matrix} 0{,}2\cdots\cdots \\ 0{,}002666 \\ 0{,}000064 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 0{,}020000 \\ 0{,}000400\cdot \\ 0{,}000010\cdot\cdot \end{matrix}\right\}$$

$= 0{,}20273 - 0{,}02041 = 0{,}18232.$

IV. $log.nat.x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + 1/3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + 1/5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$

Diese Reihe ist auch zur Berechnung der mehr von Eins abweichenden Zahlen geeignet. Z. B.

$$log.\ nat.\ 3 = 2\left[\tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{4}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{2}{4}\right)^5 + \ldots\right]$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{128} + \ldots\right)$$
$$= 2\left\{\begin{matrix} 0{,}5\ldots \\ 0{,}04166 \\ 0{,}00625 \\ 0{,}00111 \\ 0{,}00021 \\ 0{,}00004 \end{matrix}\right\} = 2 \times 0{,}5493 = 1{,}0986.$$

V. $$log.\ nat.\ (x+y) = log.\ nat.\ x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \ldots\right]$$

Diese Reihe ist in Anwendung zu bringen, um aus gegebenen Logarithmen nächst höhere Logarithmen zu finden.

Z. B. $log.nat. 10 = log.nat. (9+1) = log.nat. (3^2+1)$
$$= log.nat.\ 3^2 + 2\left(\frac{1}{18+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{18+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{18+1}\right)^5 + \ldots\right)$$
$$= 2\ log.nat.\ 3 + 2\left(\frac{1}{19} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{19}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{19}\right)^5 + \ldots\right)$$
$$= 2{,}197224 + 2\left\{\begin{matrix} 0{,}0526316 \\ 0{,}0000486 \\ 0{,}0000001 \end{matrix}\right\}$$
$$= 2{,}197224 + 2 \times 0{,}0526803 = \left\{\begin{matrix} 2{,}197224 \\ 0{,}105361 \end{matrix}\right\}$$
$$= 2{,}302585.$$

VI. $\log_a x = \dfrac{log.\ nat.\ x}{log.\ nat.\ a}$, wo a die Grundzahl des künstlichen Logarithmensystems ist.

Z. B. $$\log_{10} x = \frac{log.\ nat.\ x}{log.\ nat.\ 10} = \frac{log.\ nat.\ x}{2{,}302585}$$
d. i. $log.\ x = 0{,}4342944.. \times log.\ nat.\ x$, und
$log.\ nat.\ x = 2{,}302585\ .. \times log.\ x.$

§. 20. Geometrische Progressionen.

Für die geometrische Progression
$$\left\{\begin{matrix} a, & ab, & ab^2, & ab^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & ab^{n-1} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots & n \end{matrix}\right\}$$
ist das $n$te oder letzte Glied:

I. $t = ab^{n-1}$ und die Summe aller Glieder:

II. $s = a\left(\frac{b^n - 1}{b - 1}\right)$; auch

III. $s = \frac{bt - a}{b - 1}$,

IV. $s = \frac{t\,(b^n - 1)}{b^{n-1}\,(b - 1)}$ und

V. $s = \frac{\sqrt[n-1]{t^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}$.

Ist der sogenannte Exponent b ein ächter Bruch, und die Zahl der Glieder (n) unendlich groß, so hat man $t = 0$ und

$$s = \frac{a}{1 - b}.$$

Beispiel 1. Wie groß ist das 10te Glied der Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{16}$ u. s. w., und welches ist die Summe der ersten zehn Glieder? Es ist das Anfangsglied $a = \frac{1}{2}$, das Verhältniß der benachbarten Glieder $b = \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$, und die Anzahl der Glieder $n = 10$, daher das zehnte Glied:

$$t = \tfrac{1}{2} \times (\tfrac{3}{2})^9 = 19{,}2217,$$

und die Summe der ersten zehn Glieder:

$$s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(\frac{3}{2})^{10} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) = (\tfrac{3}{2})^{10} - 1 = 3 \times 19{,}2217 - 1 = 56{,}6651.$$

Beispiel 2. Es ist der periodische Decimalbruch 0,378378378.... in einen gemeinen zu verwandeln.

$0{,}378378... = 0{,}378 \times 1 + 0{,}378 \times \frac{1}{1000} + 0{,}378 \times \frac{1}{1000}^2 + ...$, also $a = 0{,}378$, $b = \frac{1}{1000}$ und $n = \infty$; die Summe ist

$$s = \frac{0{,}378}{1 - \frac{1}{1000}} = \tfrac{378}{999} = \tfrac{14}{27}.$$

Beispiel 3. Dagegen ist 0,20454545...

$= 0{,}20 + 0{,}0045\,(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}^2 + \frac{1}{100}^3 + ...)$

$= 0{,}20 + \frac{0{,}0045}{1 - \frac{1}{100}} = 0{,}20 + \frac{0{,}45}{99}$

$= \frac{1}{5} + \frac{45}{9900} = \frac{1}{5} + \frac{1}{220} = \frac{225}{1100} = \frac{45}{220} = \frac{9}{44}$.

§. 21. Zinseszinsrechnung.

Ist das anfängliche Kapital $= K$ und betragen die jährlichen Zinsen $= a$ Procent, so folgt der Werth des Kapitales nach n Jahren:

$$\text{I.} \quad W = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n K, \quad \text{auch ist}$$

$$\text{II.} \quad K = \frac{W}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n},$$

$$\text{III.} \quad a = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{W}{K}} - 1\right)$$

$$\text{IV.} \quad n = \frac{\log. W - \log. K}{\log. \left(1 + \frac{a}{100}\right)}.$$

Beispiel 1. Ein Kapital von 5000 Thalern zu 4 Procent auf Zinseszins ausgeliehen, hat nach 6 Jahren den Werth:

$$W = 1{,}04^6 \times 5000,$$

$$\log. W = 6 \log. 1{,}04 + \log. 5000 = \begin{Bmatrix} 0{,}10220 \\ 3{,}69897 \end{Bmatrix} = 3{,}80117$$

$$W = 6326{,}6 \text{ Thaler.}$$

Beispiel 2. Eine Volksmenge bestand vor 20 Jahren aus 3450 Köpfen und enthält deren jetzt 5126; wie viel Procent betrug innerhalb dieser Zeit die procentalische Zunahme an Bevölkerung?

$$a = 100 \left(\sqrt[20]{\frac{5126}{3450}} - 1\right).$$

Nun ist $\log. 5126 = 3{,}70978$
$\log. 3450 = 3{,}53782$
$0{,}17196 : 20$
$num. \; 0{,}008598 = 1{,}0200,$

demnach die gesuchte procentalische Zunahme

$$a = 100 \, (1{,}0200 - 1) = 2.$$

Beispiel 3. In welcher Zeit steigt das Anlagskapital

einer Maschine von 35000 Thaler auf 50000 Thaler, die Zinsen zu drei Procent gerechnet? Es ist

$$n = \frac{log. 50000 - log. 35000}{log. 1,03} = \frac{0,1549}{0,01284} = \frac{15490}{1284}$$
$$= 12,06 \text{ Jahre.}$$

§. 22. Rentenrechnung.

Wenn ein Kapital K am Ende eines jeden Jahres noch um eine stets gleich bleibende Summe S vermehrt oder vermindert wird, so ist der Werth desselben nach n Jahren:

$$\text{I.} \quad W = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n K \pm \left(\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1\right)\frac{100}{a} S.$$

W ist kleiner als K, wenn die jährliche Wegnahme S größer ist als die Zinsen $\frac{a}{100} K$ am Ende des ersten Jahres, und es fällt sogar Null aus, wenn

$$\text{II.} \quad \frac{S}{K} = \frac{a}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1} \text{ ist.}$$

Auch ist in diesem Falle

$$\text{III.} \quad n = \frac{log. \; S - log. \left(S - \frac{a}{100} K\right)}{log. \left(1 + \frac{a}{100}\right)}.$$

Beispiel 1. Ein Kapital von 9000 Thalern zu 5 Procent auf Zinseszins ausgeliehen, bekommt jährlich noch einen Zuwachs von 300 Thalern, welches ist der Werth desselben nach 8 Jahren? Er ist

$$W = 1,05^8 \times 9000 + (1,05^8 - 1) \times \frac{100}{5} \times 300$$
$$= 1,47745 \times 9000 + 0,47745 \times 6000$$
$$= 13297 + 2864,7 = 16161,7 \text{ Thaler.}$$

Beispiel 2. Welchen baaren Werth hat eine Jahrrente von 500 Thalern, welche sechs Jahre lang ausgezahlt wird, die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$ Procent gerechnet? Es ist in

Nr. II. $S = 500$, $n = 6$ und $\frac{a}{100} = \frac{3,5}{100}$ einzusetzen, weshalb nun folgt:

$$K = \frac{100}{a} \cdot S \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n \quad 1}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n} = \frac{200}{7} \times 500 \times \frac{1,035^6 - 1}{1,035^6}$$

$$= \frac{100000}{7} \times \frac{1,22925 - 1}{1,22925} = \frac{22925}{7 \times 1,22925} = \frac{22925}{8,60475}$$

$= 2664,2$ Thaler.

Beispiel 3. Wie viel Jahre lang kann man ein auf eine Schuld von 20000 Thalern verpfändetes Grundstück benutzen, wenn dasselbe jährlich 1500 Thaler reinen Gewinn gibt, und die Zinsen zu 5 Procent gerechnet werden. Nach Nr. III. ist

$$n = \frac{log.\ 1500 - log.\ (1500 - \frac{5}{100} \times 20000)}{log.\ 1,05}$$

$$= \frac{3,17609 - 2,69897}{0,02119} = \frac{47712}{2119} = 22\tfrac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

§. 23. Arithmetische Progressionen.

Für die arithmetische Progression (arithmetische Reihe erster Ordnung)

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ \underset{4}{a+3d},\ \ldots\ \underset{n}{a+(n-1)d}$$

ist das $n$te oder letzte Glied:

I. $t = a + (n-1)d$

und die Summe der n ersten Glieder:

II. $s = \frac{a+t}{2} \cdot n$.

Auch hat man

III. $s = \left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right) n$,

IV. $s = \left(t - \frac{(n-1)d}{2}\right) n$ und

$$\text{V.}\quad s = \frac{a+t}{2} \cdot \left(\frac{t-a}{d} + 1\right).$$

Beispiel 1. Ist das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe = 3 und die Differenz = 4, die Reihe also folgende: 3, 7, 11, 15, 19 u. s. w., so ist ihr 15tes Glied:

$$t = 3 + (15-1)\,4 = 3 + 56 = 59,$$

und die Summe der ersten 15 Glieder:

$$s = \frac{3+59}{2} \times 15 = 31 \times 15 = 465.$$

Beispiel 2. Wie viel Zeit braucht ein Körper, um einen Raum von 40 Fuß zu durchlaufen, wenn er in der ersten Secunde 1, in der zweiten 3, in der dritten 5, in der vierten 7 Fuß u. s. w. durchläuft? Hier ist $s = 40$, $a = 1$ und $d = 3-1 = 5-3 = 7-5 = 2$; daher nach Nr. III.:

$$40 = \left(1 + 2\frac{(n-1)}{2}\right)n = n + n^2 - n = n^2, \text{und } n = \sqrt{40} = 6{,}324 \text{ Sec.}$$

Beispiel 3. Wenn zum Niederbringen eines 165 Fuß tiefen Schachtes 5000 Thaler verwendet, und beim Anfang für einen Fuß Tiefe nur 10 Thaler bezahlt wurden, nach welcher arithmetischen Progression mußten sich die Kosten mit der Tiefe steigern, vorausgesetzt, daß sich die Beschaffenheit des Gesteines auf die ganze Tiefe nicht ändert.

Es ist $a = 10$, $n = 165$ und $s = 5000$, daher nach Nr. III.:

$$5000 = \left(10 + \frac{(165-1)\,d}{2}\right).\,165 = (10 + 82\,d)\,.\,165;$$

$$5000 - 1650 = 165 \times 82d,\ d = \frac{3350}{82 \times 165} = \frac{335}{1353} = 0{,}2476.$$

Es kommt also jeder Fuß Schachttiefe um 0,2476, d. i. beinahe um ¼ Thaler theurer, als der nächst vorhergegangene. Der letzte Fuß kostet:

$$t = 10 + (165-1) \times 0{,}2476 = 10 + 164 \times 0{,}2476 = 50{,}606 \text{ Thlr.}$$

Es ist auch wirklich:

$$s = \left(\frac{a+t}{2}\right) n = \frac{60{,}606}{2} \times 165 = 30{,}303 \times 165$$

$$= 5000 \text{ Thaler.}$$

§. 24. Höhere arithmetische Reihe.

Ist $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n$ eine höhere arithmetische Reihe:
$b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots\ldots b_n$ ihre erste,
$c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots\ldots c_n$ ihre zweite,
$d_1, d_2, d_3, d_4 \ldots\ldots d_n$ ihre dritte
Differenzreihe, ist also $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $c_1 = b_2 - b_1$, $d_1 = c_2 - c_1$ u. s. w., so hat man das allgemeine Glied der Hauptreihe

$$\text{I.}\quad a_n = a_1 + (n-1)\,b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}c_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d_1 + \ldots,$$

dagegen die Summe aller Glieder der Hauptreihe bis zum $n$ten oder allgemeinen Gliede, das sogenannte summatorische Glied:

$$\text{II.}\quad S_n = n\,a_1 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,b_1 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,c_1 + \ldots.$$

Bei einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung ist $c_1 = c_2 = c_3 \ldots$, also $d_1 = 0$ u. s. w., daher ist für sie

$$a_n = a_1 + (n-1)\,b_1 + \tfrac{1}{2}(n-1)\,(n-2)\,c_1,$$
$$S_n = na_1 + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,b_1 + \tfrac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,c_1.$$

Die Reihen der sogenannten Polygonalzahlen sind
Zahlen des Dreieckes: 1, 3, 6, 10, 15......,
» » Viereckes: 1, 4, 9, 16, 25......,
» » Fünfeckes: 1, 5, 12, 22, 35 u. s. w.

Es ist demnach das allgemeine Glied der Dreieckszahlen:

$$a_n = 1 + 2\,(n-1) + \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) = \frac{n(n+1)}{2},$$

und das summatorische Glied:

$$S_n = n + n(n-1) + \tfrac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(n-2) = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Für die Viereckszahlen ist $a_1 = 1$, $b_1 = 4 - 1 = 3$ und $c_1 = 5 - 3 = 2$, daher

$$a_n = 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2,$$
$$S_n = n + \tfrac{3}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Beispiel. Die höhere arithmetische Reihe

2 , 10 , 30 , 68 , 130 , 222 . . . . .

hat folgende Differenzenreihen:

8 , 20 , 38 , 62 , 92

12 , 18 , 24 , 30

6 , 6 , 6

0 , 0

0

Für sie ist daher $a_1 = 2$, $b_1 = 8$, $c_1 = 12$, $d_1 = 6$, $e_1 = 0$; daher das allgemeine Glied:

$$a_n = 2 + 8(n-1) + {}^{12}/_{2}(n-1)(n-2) + {}^{6}/_{6}(n-1)(n-2)(n-3) + 0 \ldots$$
$$= 2 + 8n - 8 + 6n^2 - 18n + 12 + n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$
$$= n + n^3 = n\,(n^2 + 1),$$

das summatorische Glied:

$$S_n = 2n + 4n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + {}^1/_4 n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$= {}^1/_4 n\,(2 + 3n + 2n^2 + n^3) = {}^1/_4 n\,(n+1)(n^2+n+2).$$

Nach diesen Formeln ist z. B. das zehnte Glied der Hauptreihe $a_{10} = 10\,(10^2 + 1) = 10 \times 101 = 1010$, und die Summe der ersten zehn Glieder:

$$S_{10} = {}^1/_4 \times 10 \times 11\ (100 + 10 + 2) = 55 \times 56 = 3080.$$

§. 25. Potenzenreihen.

Bedeutet $\Sigma\,(n)$ die Summe der natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, 4 \ldots n)$ von 1 bis n, ferner $\Sigma\,(n^2)$ die Summe $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \ldots n^2)$ ihrer Quadrate, $\Sigma\,(n^3)$ die Summe $(1^3, 2^3, 3^3, 4^3 \ldots n^3)$ ihrer Cuben u. s. w., so hat man

I. $\Sigma\,(n) = {}^1/_2\, n^2 + {}^1/_2\, n,$

II. $\Sigma\,(n^2) = {}^1/_3\, n^3 + {}^1/_2\, n^2 + {}^1/_6\, n,$

III. $\Sigma\,(n^3) = {}^1/_4\, n^4 + {}^1/_2\, n^3 + {}^1/_4\, n^2,$

IV. $\Sigma\,(n^4) = {}^1/_5\, n^5 + {}^1/_2\, n^4 + {}^1/_3\, n^3 - {}^1/_{30}\, n,$

V. $\Sigma\,(n^5) = {}^1/_6\, n^6 + {}^1/_2\, n^5 + {}^5/_{12}\, n^4 - {}^1/_{12}\, n^2,$

VI. $\Sigma\,(n^6) = {}^1/_7\, n^7 + {}^1/_2\, n^6 + {}^1/_2\, n^5 - {}^1/_6\, n^3 + {}^1/_{42}\, n.$

Ist n eine unendliche oder sehr große Zahl, so hat man allgemein:

VII. $$\Sigma\,(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Z. B. $\Sigma\,(n) = \frac{1}{2} n^2$,

$\Sigma\,(n^2) = \frac{1}{3} n^3$,

$\Sigma\,(n^3) = \frac{1}{4} n^4$ u. s. w., ebenso

$\Sigma\,(n^{1/2}) = \frac{2}{3} n^{3/2}$,

$\Sigma\,(n^{3/2}) = \frac{2}{5} n^{5/2}$,

$\Sigma\,(n^{2/3}) = \frac{3}{5} n^{5/3}$ u. s. w.

Beispiele. 1) Die Summe aller Cuben von 1^3 bis 10^3 ist $\Sigma\,(10^3) = \frac{1}{4} \times 10^4 + \frac{1}{2} \times 10^3 + \frac{1}{4} \times 10^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$.

2) Die Summe aller Quadratwurzeln von $\sqrt{1}$ bis $\sqrt{10000}$ läßt sich annähernd setzen:

$$\frac{2}{3} \times \left(\sqrt{10000}\right)^3 = \frac{2}{3} \times 100^3 = 667000.$$

3) Die Summe aller Quadrate von 1^2 bis 1000^2 ist annähernd $= \frac{1}{3} \,.\, 1000^3 = 333000000$.

§. 26. Interpolation bei gleichen Intervallen.

Die in §. 24 unter (I.) gegebene Reihe

$a_n = a_0 + (n-1)\, b_0 + \frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)\, c_0 + \ldots$

dient auch zum Einschalten eines Gliedes a_n einer gegebenen Reihe a_1, a_2, a_3 u. s. w., deren Differenzreihen b_1, b_2, b_3 u. s. w., c_1, c_2, c_3 u. s. w. sind.

Beispiel 1. Die Reihe

$$\sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13} \text{ u. s. w.}$$

oder 3,16228; 3,31662; 3,46410; 3,60555 gibt die Differenzreihen:

0,15434; 0,14748; 0,14145;

— 0,00686; — 0,00603;

+ 0,00083, .

Es läßt sich daher das 1,3te Glied oder

$$\sqrt{10,3} = 3,16228 + 0,15434(1,3-1) - \tfrac{1}{2} \times 0,00686(1,3-1)(1,3-2) + \tfrac{1}{6} \times 0,00083\,(1,3-1)\,(1,3-2)\,(1,3-3)$$
$$= 3,16228 + 0,15434 \times 0,3 + 0,00343 \times 0,3 \times 0,7 + 0,00014 \times 0,3 \times 0,7 \times 1,7$$
$$= \left\{\begin{array}{l} 3,16228 \\ \;\;\cdot 4630 \\ \;\;\cdots 72 \\ \;\;\cdots\cdot 5 \end{array}\right\} = 3,20935$$ setzen.

Beispiel 2. Aus $\left\{\begin{array}{l} log.\ 100 = 2,000000, \\ log.\ 101 = 2,004321, \\ log.\ 102 = 2,008600, \\ log.\ 103 = 2,012837, \end{array}\right.$

folgen die Differenzen

0,004321		
0,004279	—0,000042	es ist daher das 1,7te Glied
0,004237	—0,000042	oder

$$log.\ 100,7 = 2,000000 + 0,004321\ (1,7-1) - \tfrac{1}{2} \times 0,000042\,(1,7-1)\,(1,7-2)$$
$$= \left\{\begin{array}{r} 2,000000 \\ 3025 \\ 4 \end{array}\right\} = 2,003029.$$

§. 27. Interpolationen bei ungleichen Intervallen.

Sind die den Grundgrößen $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ entsprechenden Werthe einer Function $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_n$, so läßt sich setzen:

$$y_n = \left\{\begin{array}{l} y_1 \dfrac{(x_n - x_2)\,(x_n - x_3)\,(x_n - x_4)\ldots\ldots}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_4)\ldots\ldots} \\ + y_2 \dfrac{(x_n - x_1)\,(x_n - x_3)\,(x_n - x_4)\ldots\ldots}{(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)\,(x_2 - x_4)\ldots\ldots} \\ + y_3 \dfrac{(x_n - x_1)\,(x_n - x_2)\,(x_n - x_4)\ldots\ldots}{(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_4)\ldots\ldots} \\ + y_4 \dfrac{(x_n - x_1)\,(x_n - x_2)\,(x_n - x_3)\ldots\ldots}{(x_4 - x_1)\,(x_4 - x_2)\,(x_4 - x_3)\ldots\ldots} \end{array}\right\}$$

Beispiel. Der Widerstand, welchen das stillstehende Wasser einem in ihm bewegten Boote entgegensetzt, war für die Geschwindigkeiten

1,925; 2,222; 2,628; 4,045 englische Meilen,

11,00; 13,08; 18,10; 47,26 englische Pfund;

wie groß ist aber dieser Widerstand bei einer Geschwindigkeit von 3 englischen Meilen (in einer Secunde)?

Es ist $x_1 = 1{,}925$ | $x_2 = 2{,}222$ | $x_3 = 2{,}628$ | $x_4 = 4{,}045$
$y_1 = 11{,}00$ | $y_2 = 13{,}08$ | $y_3 = 18{,}10$ | $y_4 = 47{,}26$,

endlich $x_n = 3$ und daher

$$y_n = \left\{\begin{array}{l} 11{,}00 \times \dfrac{0{,}778 \times 0{,}372 \times 1{,}045}{0{,}297 \times 0{,}703 \times 2{,}120} \\ -13{,}08 \times \dfrac{1{,}075 \times 0{,}372 \times 1{,}045}{0{,}297 \times 0{,}406 \times 1{,}823} \\ +18{,}10 \times \dfrac{1{,}705 \times 0{,}778 \times 1{,}045}{0{,}703 \times 0{,}406 \times 1{,}417} \\ +47{,}26 \times \dfrac{1{,}075 \times 0{,}778 \times 0{,}372}{2{,}120 \times 1{,}823 \times 1{,}417} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} \dfrac{3{,}3266}{0{,}4426} \\ -\dfrac{5{,}4661}{0{,}2198} \\ +\dfrac{15{,}8191}{0{,}4044} \\ +\dfrac{14{,}7036}{5{,}4764} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{r} 7{,}516 \\ -\ 24{,}866 \\ +\ 39{,}113 \\ +\ 2{,}685 \end{array}\right\} = 24{,}45 \text{ Pfund der gesuchte Widerstand.}$$

Zweiter Theil.

Geometrie.

Erster Abschnitt.

Tafeln.

I. Maaßtafeln.

A. Allgemeine Maaßtafel,

enthaltend die Maaße verschiedener Länder.

1) Anhalt: wie in Preußen.
2) Baden: 1 Fuß = 10 Zoll = 0,3 Meter.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Meile = 2 Wegstunden = 29629 Fuß
= $\frac{6}{5}$ geographische Meile.
1 Morgen = 400 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß = 1 Meslein = $1\frac{1}{2}$ Litre.
1 Ohm = 100 Maaß = 400 Schoppen.
1 Malter = 10 Sester = 100 Meslein.
3) Baiern: 1 Fuß = 12 Zoll = 129,38 par. Linien.
1 Elle = $2\frac{41}{48}$ Fuß. 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Morgen (Tagewerk) = 400 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß (Maaßkanne) = 0,043 Cub.-Fuß.
1 Eimer = 60 Maaß = 240 Quartel.

1 Metze = $34\frac{2}{3}$ Maaß.
1 Scheffel = 6 Metzen = 12 Viertel = 48 Maaßel = 192 Dreißiger.

4) Belgien: wie in Frankreich.

5) Braunschweig: 1 Fuß = 12 Zoll = 126,5 par. Lin.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Lachter = 80 Zoll $8\frac{1}{2}$ Linien.
1 Feldmorgen = 120 Quadrat-Ruthen.
1 Waldmorgen = 160 Quadrat-Ruthen.
1 Quartier = $52\frac{4}{11}$ preuß. Cub.-Zoll.
1 Orhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 240 Quartier.
1 Himten = 2316 Cub.-Zoll.
1 Wispel = 40 Himt. = 160 Vierfaß = 640 Metzen.

6) Bremen: 1 Fuß = 12 Zoll = 128,2677 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Stübchen = 162,4 par. Cub.-Zoll.
1 Orhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 30 Viertel = $67\frac{1}{2}$ Stübchen = 270 Quart = 1080 Mengel.
1 Scheffel = 3735,754 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 40 Scheffel = 160 Viertel = 640 Spind.

7) Dänemark: wie in Preußen.

8) England: 1 Yard = 3 Fuß = 36 Zoll = 405,3425 par. Linien.
1 Ruthe (pearch, pole, rod) = $5\frac{1}{2}$ Yard.
1 Furlong = 40 Ruth. 1 Meile = 8 Furlongs.
1 Acker (acre) = 160 Quadrat-Ruthen.
1 Gallon = 277,2738 Cub.-Zoll.
1 Quarter = 8 Bushels = 32 Peaks = 64 Gallons = 256 Quarts = 512 Pints.
1 Bushel = 8 Gallons = 2218,19 Cub.-Zoll.
1 Last = 2 Tonnen = 10 Quarters = 80 Bushels.

9) Frankfurt a. M.: 1 Fuß (Schuh) = 12 Zoll = $126\frac{1}{6}$ par. Linien.
1 Elle = 242,62 par. Linien.
1 Feldruthe = $12\frac{1}{2}$ Fuß.

1 Waldruthe = 15,849 Fuß.
1 Morgen = 160 Quadrat-Ruthen.
1 Aichmaaß = 90,384 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 20 Viert. = 80 Aichmaaß = 320 Schopp.
1 Gescheid = 1 altes oder Aichmaaß.
1 Malter = 4 Simmer = 16 Sechster = 64 Gescheid.

10) Frankreich: 1 alter Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 0,324839 Meter.
1 Toise = 6 alte Fuß.
1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter = 0,1 Decameter = 0,01 Hectometer = 0,001 Kilometer = 443,2959 par. Lin. = 3,078444 alte par. Fuß.
1 neuer Fuß = $\frac{1}{3}$ Meter.
1 neue Toise = 2 Meter.
1 Meile (lieue) = 1 Myriameter = 10000 Meter.
1 Are = 100 Quadr.-Meter. 1 Hectare = 100 Ares.
1 Liter = 1 Cub.-Decimeter. 1 Hectoliter = 100 Litres.
1 Stere = 1 Cub.-Meter.

11) Hamburg: 1 Fuß = 3 Palmen = 12 Zoll = 126,9667 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Klafter = 6 Fuß.
1 Marschruthe = 14 Fuß. 1 Geestruthe = 16 Fuß.
1 Morgen Marschland = 600 Quadr.-Marschruthen.
1 Scheffel Saatland = 200 Quadr.-Geestruthen.
1 Stübchen = 182 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quart. = 320 Oeßel.
1 Faß = 2654 par. Cub.-Zoll.
1 Wispel = 10 Scheffel = 20 Faß = 40 Himten = 160 Spint.

12) Hannover: 1 Fuß = 12 Zoll = 11½ engl. Zoll = 129,4844 par. Linien.

1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß. 1 Lachter = 851¼ par. Linien. 1 Meile = 1587½ Ruthen.

1 Morgen = 120 Quadrat-Ruthen.

1 Stübchen = 270 Cub.-Zoll.

1 Ohm = 4 Anker = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 320 Nößel.

1 Himten = 1¼ Cub.-Fuß.

1 Last = 16 Malter = 96 Himten = 384 Metzen.

13) Hessen, Großherzogthum: 1 Fuß = 10 Zoll = ¼ Meter.

1 Elle = 24 Zoll. 1 Klafter = 10 Fuß.

1 Meile = 3000 Klafter. 1 Stunde = 2000 Klafter.

1 Morgen = 4 Viertel = 400 Quadratklafter.

1 Maaß = 1 Gescheid = 2 Liter.

1 Ohm = 4 Viertel = 80 Maaß = 320 Schoppen.

1 Simmer = 2048 Cub.-Zoll.

1 Malter = 4 Simmer = 16 Kumpf = 64 Gescheid = 256 Mäschen.

14) Hessen, Kurfürstenthum: 1 Fuß = 12 Zoll = 11 preuß. Zoll = 127,5358 par. Linien.

1 Elle = 0,5704 Meter. 1 Ruthe = 3,9887 Meter.

1 Acker = 150 Quadrat-Ruthen.

1 Maaß = 1,9495 Liter. 1 neue Maaß = 144 C.-Z.

1 Ohm = 20 Viertel = 80 Maaß = 320 Schoppen.

1 Viertel = 160,48 Liter.

1 Viertel = 2 Scheffel = 16 Metzen = 64 Mäschen.

15) Holstein: wie Hamburg.

16) Lippe-Detmold: 1 Fuß = 12 Zoll = 128,34 par. Lin.

1 Ruthe = 16 Fuß.

1 Morg. = 1½ Scheffelaussaat = 120 Quadr.-Ruth.

1 Kanne = 98 Cub.-Zoll.

1 Orhoft = 1½ Ohm = 6 Anker = 30 Viertel = 162 Kannen.

1 Scheffel = 3154 Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 6 große = 8 kleine Metzen
= 24 Mahlmetzen.

17) Lippe-Schaumburg: 1 Fuß = 12 Zoll = 128,6 par. L.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Lachter = 7 Fuß.
1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Morgen = 120 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß = $\frac{1}{20}$ Cub.-Fuß.
1 Orhoft = 6 Anker = 168 Maaß = 672 Ort.
1 Himten = 2333,522 Cub.-Zoll.
1 Fuder = 12 Malter = 72 Himten = 288 Metzen.

18) Lombardei: wie in Frankreich.

19) Lübeck: 1 Fuß = 12 Zoll = 129 par. Linien.
1 Elle = 255¼ par. Lin. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Quartier = 47,2 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen
= 160 Quartier = 320 Planken = 640 Ort.
1 Scheffel = 1794 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 8 Drömt = 24 Tonnen = 96 Scheffel
= 384 Faß.

20) Mecklenburg-Schwerin: 1 Fuß = 12 Zoll
= 1 Lübecker Fuß = 129 par. Linien.
1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Pott oder Quartier = 45⅝ par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel
= 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Pott.
1 Scheffel = 1960,5 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 8 Drömt = 96 Scheffel = 384 Faß
= 1536 Metzen oder Spint.

21) Mecklenburg-Strelitz: die Längenmaaße wie in Schwerin.
1 Pott = 45⅝ par. Cub.-Zoll.
1 Orh. = 1½ Ohm = 6 Ank. = 240 Pott = 960 Pegel.
1 Scheffel = 1 preuß. Scheffel.
1 Last = 4 Wispel = 8 Drömt = 100 Scheffel
= 1600 Metzen.

22) Nassau: 1 Fuß Feldmaaß = 10 Zoll = ½ Meter.
1 Werkfuß = 12 Zoll = 0,3 Meter.
1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Morgen = 100 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß, Jungmaaß, = 85,434 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 80 Maaß = 320 Schoppen.
1 Malter = 5484 par. Cub.-Zoll.
1 Malter = 4 Viernsel = 16 Kumpf = 64 Gescheid.

23) Niederlande: wie in Frankreich.

24) Norwegen: wie in Dänemark.

25) Oesterreich: 1 Fuß = 12 Zoll = 140,127 par. Lin.
1 Elle = 2,465 Fuß. 1 Klafter = 6 Fuß.
1 Meile = 24000 Fuß.
1 Joch = 1600 Quadrat-Klafter.
1 Maaß = 0,0448 Cub.-F. = 71,335 par. Cub.-Z.
1 Eimer = 40 Maaß = 160 Seidel = 320 Pfff.
1 Metze = 1,9471 Cub.-F. = 3100⅓ par. Cub.-Z.
1 Muth = 30 Metzen = 480 Maaßel = 1920 Futtermaaßel = 3840 Becher.

26) Oldenburg: 1 Fuß = 12 Zoll = 131,162 par. Lin.
1 Ruthe = 18 oder 20 Fuß.
1 Morg. = 356 Quadr.-Ruth. à 400 Quadr.-Fuß.
1 Kanne = 74 par. Cub.-Zoll.
1 Oxhoft = 1½ Ohm = 6 Anker = 156 Kannen = 240 Quartier.
1 Scheffel = 1149,54 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 12 Molt = 18 Tonnen = 144 Scheffel.

27) Preußen: 1 Fuß = 12 Zoll = 139,13 par. Linien.
1 Elle = 25½ Zoll. 1 Lachter = 80 Zoll.
1 Ruthe = 12 Fuß.
1 Meile = 24000 Fuß.
1 Morgen = 180 Quadrat-Ruthen.
1 Quart = 64 Cub.-Zoll.
1 Oxhoft = 1½ Ohm = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart.
1 Scheffel = 3072 Cub.-Zoll = 16/9 Cub.-Fuß.

1 Tonne = 4 Scheffel = 64 Metzen = 192 Viertel.
1 Klafter = 6.6.3 = 108 Cub.-Fuß.
1 Schachtruthe = 12.12.1 = 144 Cub.-Fuß.

28) Rußland: 1 Fuß = 1 engl. Fuß = 135,114 par. Lin.
1 Arschin = 28 engl. Zoll. 1 Werst = 3500 Fuß.
1 Faden (Sashen) = 3 Arschinen = 7 Fuß = 48 Werschock = 84 Zoll = 1008 Linien.
1 Dessätine = 2400 Quadr.-Faden.
1 Wedro = 620,019 par. = 750,568 russ. Cub.-Z. = 10 Kruschki oder Stoof.
1 Tschetwerik = 1322,71 par. = 1601,212 russ. Cub.-Zoll.
1 Tschetwert = 2 Osmin = 4 Pajok = 8 Tschetwerik = 32 Tschetwerka = 64 Garnez.

29) Sachsen, Königreich: 1 Fuß = 12 Zoll = 125,537 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Lachter = 2 Meter.
1 Ruthe = 15 1/6 Fuß. 1 Meile = 32000 Fuß.
1 Acker = 300 Quadrat-Ruthen.
1 Kanne = 47,213 par. Cub.-Zoll.
1 Eimer = 72 Kannen.
1 Scheffel = 7900 Cub.-Zoll, den Fuß = 125,5 par. Linien genommen.
1 Wispel = 2 Malter = 24 Scheffel = 96 Viertel = 384 Metzen = 1536 Mäschen.
(Die Einführung eines neuen Maaßsystemes ist im Werke.)

30) Sachsen-Weimar: 1 Fuß = 12 Zoll = 125 par. Lin.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Acker = 140 Quadrat-Ruthen.
1 Eimer = 72 Kannen = 3695 5/21 par. Cub.-Z.
1 Scheffel = 3880 par. Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 74 Maaß = 148 Nößel.

31) Schleswig: wie Hamburg.

32) Schweden: 1 Fuß = 131,615 par. Linien.

1 Faden (Famn) = 3 Ellen (Alnar) = 6 Fuß (Fot) = 72 Zoll (Verthum). 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Meile = 6000 Famn.
1 Tonne Land oder Tonnstelle = 56000 Quadrat-Fuß.
1 Kanne = 100 schwed. Cub.-Decimalzoll.
1 Ohm (Am) = 4 Anker = 60 Kannen = 120 Stop.
1 Tonne = 7388,58 par. Cub.-Z. = 56 Kannen.
1 Tonne = 2 Span = 32 Kappen = 56 Kannen = 112 Stop.

33) Schweiz: das Längenmaaß wie in Baden.
1 Juchart = 400 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß (Pot) = 1½ Liter.
1 Viertel (Quateron) = 15 Liter.
1 Malter = 10 Viertel = 100 Immi.

34) Würtemberg: 1 Fuß (Schuh) = 10 Zoll = 127 par. L.
1 Elle = 2,144 Fuß. 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Morgen = 384 Quadrat-Ruthen.
1 Helleichmaaß = 78⅛ Cub.-Zoll.
1 Fuder = 6 Eimer = 96 Immi = 960 Maaß = 3840 Schoppen.
1 Simri = 942⅛ Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 8 Simri = 32 Vierling = 128 Meslein = 256 Ecklein = 1024 Viertelein.

B. Vergleichungstabellen,

enthaltend eine Vergleichung von 12 bis 13 verschiedenen Landesmaaßen unter einander.

Einrichtung und Gebrauch der Maaß-Vergleichungstabellen.

Die ersten drei der folgenden Tabellen enthalten eine vollständige Vergleichung der Fuße, Quadratfuße und Cu-

bikfuße von 12 verschiedenen Ländern. Sie sind so eingerichtet, daß alle Zahlen einer Horizontalcolumne die Größe eines und desselben Fußes, Quadrat-Fußes u. s. w. in Fußen, Quadrat-Fußen u. s. w. anderer Länder ausdrücken. Will man nun den Fuß irgend eines Landes mit dem Fuße eines andern Landes vergleichen, so sucht man in der obern Horizontalcolumne den Namen des ersten Landes auf, geht von da vertikal bis zur Stelle, wo 1 steht, herab und nun von da horizontal nach rechts oder links bis in die Vertikalcolumne, welche mit dem Namen des zweiten Landes anfängt. Hiernach ist z. B. 1 engl. Fuß = 0,93829 par. Fuß, ferner 1 österr. Quadr.-Fuß = 1,01444 preuß. Quadrat-Fuß, endlich 1 baiersch. Cubik-Fuß = 0,024861 Cubik-Meter. Um die Zurückführung einer Größe von einem Landesmaaße auf ein anderes noch zu erleichtern, sind unter die Vergleichungszahlen auch noch ihre Logarithmen gesetzt, weßhalb die ganze Reduction durch einfaches Addiren zu bewirken ist, wie folgende Beispiele vor die Augen führen.

Beispiel 1. Wie viel preuß. Fuß (x) sind 2,943 engl. Fuß?

1 engl. Fuß = 0,97114 preuß. Fuß, folglich

2,943 » » = 2,943 . 0,97114 = 2,8581 preuß. Fuß,

logarithmisch: *log.* 0,97114 = 9,98728

und *log.* 2,943 = 0,46879

x = *num.* 0,45607 = 2,8581.

Beispiel 2. Wie viel braunschweiger Cubik-Fuß (x) gehen auf 0,9354 Cubik-Meter?

1 Cubik-Meter = 43,0338 braunschweiger Cub.-Fuß.

logarithm. = 1,63381

log. 0,9354 = 9,97100

x = *num.* 1,60481 = 40,254 Cub.-Fuß.

Die übrigen Tabellen Nr. 4, 5 u. s. w. bis 10 enthalten eine Vergleichung der preuß. Feld-, Hohl- und Meilenmaaße mit denen anderer Länder. Die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tafeln sind ohne besondere Anleitung verständlich. Hiernach ist z. B. 1 preuß. Ruthe = 1,29043 bair.

Ruthe, und umgekehrt 1 sächs. Ruthe = 1,14041 preuß. Ruthe. Ebenso 1 preuß. Scheffel = 1,5121 engl. Bushels, und umgekehrt 1 österr. Maaß = 1,23589 preuß. Quart. Die untergesetzten Logarithmen erleichtern die Reductionen dieser Maaße wesentlich, indem sie nur eine einfache Addition nöthig machen.

Beispiel 1. Wie viel russische Cubikfaden (x) gehen auf 3,615 preuß. Cubik-Ruthen? 1 preuß. Cubik-Ruthe = 5,50059 Cubik-Faden.

logarithm. = 0,74041
log. 3,615 = 0,55811
x = *num.* 1,29852 = 19,885 Cubik-Faden.

Beispiel 2. Wie viel preuß. Meilen (x) gehen auf 16,35 geographische Meilen?

1 geographische Meile = 0,98509.
logarithm. = 9,99347
log. 16,35 = 1,21352
x = *num.* 1,20699 = 16,106 preuß. Meil.

Beispiel 3. Wie viel Quadrat-Toisen (x) gehen auf eine würtembergische Quadrat-Ruthe?

1 würtemberg. Quadr.-Ruthe = 0,57863 preuß. Q.-R.
1 preuß. Quadrat-Ruthe = 3,73402 Quadr.-Tois.,
folglich 1 würtemberg. Quadr.-Ruthe = 0,57863 . 3,73403
logarithm. 9,76240
0,57218
x = *num.* 0,33458 = 2,1606 Quadrat-Toisen.

Beispiel 4. Wie viel badensche Maaß (x) gehen auf 11,6 bair. Kannen?

1 bair. Kanne = 0,93362 preuß. Quart,
1 preuß. Quart = 0,76335 badensche Maaß,
folglich 11,6 bair. Kannen = 11,6 . 0,93362 . 0,76335
logarithm. 9,97017
» 9,88273
log. 11,6 = 1,06446
x = *num.* 0,91736 = 8,2672 badensche Maaß.

1) Fußtabelle.

Preußischer Fuß.	Oesterreichscher Fuß.	Baierscher Fuß.	Sächsischer Fuß.	Hannoverscher Fuß.	Würtembergscher Fuß.
1	0,99286 9,99689	1,07536 0,03155	1,10828 0,04465	1,07449 0,03120	1,09551 0,03962
1,00719 0,00311	1	1,08309 0,03467	1,11625 0,04776	1,08222 0 03432	1,10339 0,04273
0,92992 9,96845	0,92328 9,96533	1	1,03061 0,01310	0,99919 9.99965	1,01874 0,00806
0,90230 9,95535	0,89586 9,95224	0,97030 9,98690	1	0,96951 9,98655	0,98848 9,99497
0,93067 9,96880	0,92403 9,96569	1,00081 0,00035	1,03144 0,01345	1	1,01956 0,00841
0,91282 9,96038	0,90630 9,95727	0,98160 9,99194	1.01165 0,00503	0,98081 9,99159	1
0.90922 9,95867	0,90273 9,95556	0,97774 9,99022	1,00767 0,00332	0,97695 9,98987	0,99606 9,99829
0,91667 9,96221	0.91012 9 95910	0,98575 9,99377	1,01592 0,00686	0,98495 9,99341	1,00422 0,00183
0,95586 9,98039	0,94903 9,97728	1,02789 0,01195	1,05936 0,02504	1,02706 0,01160	1,04716 0,02001
0,97114 9,98728	0,96420 9,98417	1,04432 0,01883	1,07629 0,03193	1,04348 0.01848	1,06389 0,02690
1,03500 0.01494	1,02761 0,01183	1,11300 0,04650	1,14707 0,05959	1,11210 0,04615	1,13386 0,05456
3,18620 0,50327	3,16345 0,50016	3,42631 0,53483	3,53120 0,54792	3,42355 0,53448	3,49052 0,54289

1) Fußtabelle.

Braunschweiger Fuß.	Kurhessischer Fuß.	Badenscher und Schweizer Fuß.	Englischer und Russischer Fuß.	Pariser Fuß.	Meter.
1,09984 0,04133	1,09091 0,03779	1,04618 0,01961	1,02972 0,01272	0,96618 9,98506	0,31385 9,49673
1,10775 0,04444	1,09876 0,04090	1,05370 0,02272	1,03713 0,01583	0,97313 9,98817	0,31611 9,49984
1,02277 0,00978	1,01446 0,00623	0,97286 9,98805	0,95756 9,98117	0,89847 9,95350	0,29186 9,46517
0,99239 9,99668	0,98433 9,99314	0,94397 9,97496	0,92912 9,96807	0,87178 9,94041	0,28319 9,45208
1,02359 0,01013	1,01528 0,00659	0,97365 9,98840	0,95833 9,98152	0.89920 9,95386	0,29209 9,46552
1,00395 0,00171	0,99580 9,99817	0.95497 9,97999	0,93995 9,97310	0,88194 9,94544	0,28649 9,45711
1	0,99188 9,99646	0,95121 9,97828	0,93625 9,97139	0,87847 9,94373	0,28536 9.45540
1,00819 0,00354	1	0,95900 9,98182	0,94391 9,97493	0,88567 9,94727	0,28770 9,45894
1,05130 0,02172	1,04276 0,01818	1	0,98427 9,99311	0,92353 9,96545	0,30000 9,47712
1,06810 0,02861	1,05942 0,02507	1,01598 0,00689	1	0,93829 9,97234	0,30479 9,48401
1,13834 0,05627	1,12909 0,05273	1,08280 0,03455	1,06577 0,02766	1	0,32484 9,51167
3,50432 0,54460	3,47585 0,54106	3,33333 0,52288	3,28090 0,51599	3,07844 0,48833	1

2) Quadratfußtabelle.

Preußischer Quadrat-Fuß.	Oesterreichscher Q.-F.	Baierscher Q.-F.	Sächsischer Q.-F.	Hannoverscher Q.-F.	Würtembergscher Q.-F.
1	0,98577 9,99378	1,15640 0,06311	1,22828 0,08930	1,15453 0,06241	1,20015 0,07923
1,01444 0,00623	1	1,17309 0,06933	1,24601 0,09552	1,17120 0,06863	1,21747 0,08546
0,86475 9,93689	0,85245 9,93067	1	1,06216 0,02619	0,99839 9,99930	1,03783 0,01613
0,81415 9,91070	0,80256 9,90448	0,94148 9,97381	1	0,93996 9,97311	0,97709 9,98994
0,86615 9,93759	0,85382 9,93137	1,00162 0,00070	1,06388 0,02689	1	1,03951 0,01683
0,83323 9,92077	0,82137 9,91454	0,96355 9,98387	1,02344 0,01006	0,96199 9,98317	1
0,82668 9,91734	0,81492 9,91111	0,95598 9,98045	1,01540 0,00664	0,95443 9,97975	0,99214 9,99657
0,84028 9,92442	0,82832 9,91820	0,97170 9,98753	1,03210 0,01372	0,97013 9,98683	1,00846 0,00366
0,91367 9,96079	0,90067 9,95456	1,05656 0,02390	1,12224 0,05009	1,05486 0,02320	1,09654 0,04002
0,94311 9,97456	0,92968 9,96834	1,09061 0,03767	1,15840 0,06386	1,08885 0,03697	1,13186 0,05379
1,07123 0,02988	1,05599 0,02366	1,23877 0,09299	1,31578 0,11918	1,23677 0,09229	1,28564 0,10912
10,15187 1,00655	10,00739 1,00032	11,73960 1,06965	12,46936 1,09584	11,72067 1,06895	12,18372 1,08578

2) Quadratfußtabelle.

Braunschweiger Q.-F.	Kurhessischer Q.-F.	Badenscher Q.-F.	Englischer Q.-F.	Pariser Q.-F.	Quadrat-Meter.
1,20965 0,08266	1,19008 0,07558	1,09449 0,03921	1,06033 0,02544	0,93350 9,97012	0,09850 8,99345
1,22712 0,08889	1,20726 0,08180	1,11029 0,04544	1,07564 0,03166	0,94698 9,97634	0,09993 8,99968
1,04605 0,01955	1,02913 0,01247	0,94646 9,97610	0,91692 9,96233	0,80725 9,90701	0,08518 8,93035
0,98483 9,99336	0,96890 9,98628	0,89107 9,94991	0,86326 9,93614	0,76001 9,88082	0,08020 8,90416
1,04774 0,02025	1,03079 0,01317	0,94799 9,97680	0,91840 9,96303	0,80856 9,90771	0,08532 8,93105
1,00792 0,00343	0,99161 9,99634	0,91196 9,95998	0,88350 9,94621	0,77783 9,89088	0,08208 8,91422
1	0,98382 9,99292	0,90480 9,95655	0,87656 9,94278	0,77171 9,88746	0,08143 8,91079
1,01644 0,00708	1	0,91968 9,96363	0,89097 9,94986	0,78440 9,89454	0,08277 8,91788
1,10522 0,04345	1,08734 0,03637	1	0,96879 9,98623	0,85291 9,93091	0,09000 8,95424
1,14083 0,05722	1,12237 0,05014	1,03222 0,01377	1	0,88039 9,94468	0,09290 8,96801
1,29582 0,11254	1,27485 0,10546	1,17245 0,06910	1,13586 0,05532	1	0,10552 9,02334
12,28023 1,08921	12,08156 1,08212	11,11111 1,04576	10,76430 1,03199	9,47682 0,97666	1

3) Cubikfußtabelle.

Preußischer Cub.-Fuß.	Oesterreichscher Cub.-Fuß.	Baierscher Cub.-Fuß.	Sächsischer Cub.-Fuß.	Hannoverscher Cub.-F.	Würtembergscher Cub.-F.
1	0,97873 9,99066	1,24354 0,09466	1,36128 0,13395	1,24054 0,09361	1,31477 0,11885
1,02173 0,00934	1	1,27057 0,10400	1,39086 0,14328	1,26750 0,10295	1,34335 0,12819
0,80415 9,90534	0,78705 9,89600	1	1,09468 0,03929	0,99758 9,99895	1,05728 0,02419
0,73460 9,86605	0,71898 9,85672	0,91351 9,96071	1	0,91130 9,95966	0,96584 9,98490
0,80610 9,90639	0,78896 9,89705	1,00242 0,00105	1,09733 0,04034	1	1,05984 0,02524
0,76059 9,88115	0.74441 9,87181	0,94582 9,97581	1,03537 0,01510	0,94354 9,97476	1
0,75164 9,87601	0,73565 9,86667	0,93470 9,97067	1,02319 0,00996	0,93244 9,96962	0,98824 9,99486
0,77025 9,88663	0,75387 9,87730	0,95785 9,98130	1,04853 0,02058	0,95553 9,98024	1,01271 0,00549
0,87334 9,94118	0,85476 9,93185	1,08603 0,03584	1,18886 0,07513	1 08341 0,03479	1,14824 0,06003
0,91588 9,96184	0,89640 9,95250	1,13894 0,05650	1,24677 0,09579	1,13619 0,05545	1,20418 0,08069
1,10873 0,04483	1,08515 0,03549	1,37875 0,13949	1.50929 0,17877	1,37542 0,13844	1,45773 0,16368
32,34587 1,50982	31,65785 1,50048	40,22350 1,60448	44,03176 1,64377	40,12627 1,60343	42,52752 1,62867

3) Cubikfußtabelle.

Braunschweiger Cub.-Fuß.	Kurhessischer Cub.-Fuß.	Badenscher Cub.-Fuß.	Englischer Cub.-Fuß.	Pariser Cub.-F.	Cubik-Meter.
1,33043 0,12399	1,29827 0,11337	1.14503 0,05882	1,09184 0,03816	0,90193 9,95517	0,03092 8,49018
1,35934 0,13333	1,32649 0,12270	1.16992 0,06815	1,11557 0,04750	0,92154 9,96451	0,03159 8,49952
1,06987 0,02933	1,04401 0,01870	0,92078 9,96416	0,87801 9,94350	0,72529 9,86051	0,02486 8,39552
0,97734 9,99004	0,95371 9,97942	0,84114 9,92487	0,80207 9,90421	0,66256 9,82123	0,02271 8,35623
1,07246 0,03038	1,04654 0,01976	0,92301 9,96521	0,88014 9,94455	0,72705 9,86156	0,02492 8,39657
1,01191 0,00514	0,98745 9,99451	0,87090 9,93997	0,83044 9,91931	0,68600 9,83632	0,02351 8,37133
1	0,97583 9,98937	0,86065 9,93483	0,82067 9,91417	0,67793 9,83118	0,02324 8,36619
1,02477 0,01063	1	0,88197 9,94545	0,84100 9,92479	0,69472 9,84181	0,02381 8,37682
1,16191 0,06517	1,13383 0,05455	1	0,95355 9,97934	0,78769 9,89636	0,02700 8,43136
1,21852 0,08583	1,18907 0,07521	1,04872 0,02066	1	0,82607 9,91702	0,02832 8,45202
1,47508 0,16882	1,43943 0,15819	1,26953 0,10364	1,21056 0,08298	1	0,03428 8,53501
43,03380 1,63381	41,99374 1,62318	37,03704 1,56864	35,31658 1,54798	29,17385 1,46499	1

11*

4) Ruthentabelle.

Oesterreich. oder Wiener Klafter à 6 Fuß.	Baiersche Ruthe à 10 Fuß.	Sächsische Ruthe à $15\frac{1}{6}$ F.	Hannoversche Ruthe à 16 Fuß.	Würtembergsche Ruthe à 10 Fuß.	Braunschweiger Ruthe à 16 Fuß.
a. Die preuß. Ruthe, à 12 Fuß, in Ruthen,					
1,98572	1,29043	0,87688	0.80587	1,31461	0,82488
0,29792	0,11073	9,94294	9.90626	0,11880	9,91639
b. Die Ruthen, Klafter u. s. w. anderer					
0,50360	0,77493	1,14041	1,24090	0,76068	1,21230
9,70208	9,88927	0,05706	0,09374	9,88120	0,08361

5) Quadratruthentabelle.

Oesterreichsche Quadrat-Klafter.	Baiersche Q.-Ruth.	Sächsische Q.-Ruth.	Hannoversche Q.-Ruth.	Würtembergsche Q.-Ruth.	Braunschweiger Q.-Ruth.
a. Die preuß. Quadrat-Ruthe in					
3,94307	1,66521	0,76892	0,64943	1,72821	0,68043
0,59583	0,22147	9,88588	9,81253	0,23760	9,83278
b. Die Quadrat-Ruthen anderer					
0,25361	0,60052	1,30053	1,53982	0,57863	1,46967
9,40417	9,77853	0,11412	0,18747	9,76240	0,16722

6) Cubikruthentabelle.

Oesterreichsche Cubik-Klafter.	Baiersche Cub.-R.	Sächsische Cub.-R.	Hannoversche Cub.-R.	Würtembergsche Cub.-R.	Braunschweiger Cub.-R.
a. Die preuß. Cubik-Ruthe in					
7,82983	2,14884	0.67425	0,52335	2,27193	0,56127
0,89375	0,33220	9,82882	9,71879	0,35639	9,74917
b. Die Cubik-Ruthen anderer Länder					
0.12772	0,46537	1,48313	1,91076	0,44015	1.78166
9,10625	9,66780	0,17118	0,28121	9.64361	0 25083

4) Ruthentabelle.

Kurheſſ. Ruthe à 10 Fuß.	Badenſche und Schweizer Ruthe à 10 Fuß.	Engliſche Ruthe (Pole) à 16½ F.	Ruſſiſcher Faden (Sashen) à 7 Fuß.	Alte franzöſiſche Toiſe à 6 Fuß.	Decameter à 10 Fuß.
Klafter u. ſ. w. anderer Länder.					
0,93506	1,25541	0,74889	1,76524	1,93236	0,37662
9,97084	0,09879	9,87442	0,24680	0,28609	9,57591
Länder in preußiſche Ruthen.					
1,06944	0,79655	1,33531	0,56650	0,51750	2,65517
0,02916	9,90121	0,12558	9,75320	9,71391	0,42409

5) Quadratruthentabelle.

Kurheſſ. Quadr.-Ruthe.	Badenſche und Schweizer Q.-Ruth.	Engliſche Q.-Ruth.	Ruſſiſcher Q.-Faden.	Quadrat-Toiſe.	Quadrat-Decamet.
Quadrat-Ruthen anderer Länder.					
0,87435	1,57607	0,56083	3,11606	3,73402	0,14185
9,94168	0,19757	9,74883	0,49361	0,57218	9,15182
Länder in preuß. Quadrat-Ruthen.					
1,14371	0,63449	1,78306	0,32092	0,26781	7,04991
0,05832	9,80243	0,25117	9,50639	9,42782	0,84818

6) Cubikruthentabelle.

Kurheſſ. Cubik-Ruthe.	Badenſche und Schweizer Cub.-R.	Engliſche Cub.-R.	Ruſſiſcher Cubik-Faden.	Cubik-Toiſe.	Cubik-Decamet.
Cubik-Ruthen anderer Länder.					
0,81757	1,97861	0,42000	5,50059	7,21547	0,053423
9,91253	0,29636	9,62325	0,74041	0,85826	8,72772
in preuß. Cubik-Ruthen.					
1,22313	0,50540	2,38094	0,18180	0,13859	18,71868
0,08747	9,70364	0,37675	9,25959	9,14174	1,27228

7) Feldmaaßtabellen.

Oesterreich. oder Wiener Joch à 1600 □Klaft.	Baiersch. Tagewerk à 400 □Ruth.	Sächsisch. Acker à 300 □R.	Hannoverscher Morgen à 120 □R.	Würtembergscher Morgen à 384 □R.	Braunschweiger Feldmorgen à 120 □R.
a. Der preuß. Morgen, zu 180 □Ruthen,					
0,44360	0,74935	0,46135	0,97414	0,81010	1,02064
9,64699	9,87468	9,66403	9,98862	9,90854	0,00887
b. Die Morgen, Acker u. s. w. anderer					
2,25430	1,33450	2,16755	1,02655	1,23442	0,97977
0,35301	0,12532	0,33597	0,01138	0,09146	9,99113

8) Flüssigkeitsmaaßtabellen.

Oesterreichsche Maaß = 0,0448 Cub.-Fuß.	Baiersche Maaßkanne = 0,043 Cub.-Fuß.	Sächsisch-Dresden. Kanne = 47,213 par. C.-Z.	Hannoversches Stübchen = 270 Cub.-Zoll.	Würtembergsches Hellaichmaaß = $78\frac{1}{8}$ C.-Z.	Braunschweiger Quartier = $52\frac{4}{11}$ pr. C.-Z.
a. Die preuß. Quart, zu 64 Cubik-Zoll,					
0.80913	1,07110	1,22262	0,29405	0,62330	1,22222
9,90802	0,02983	0,08729	9,46843	9,79470	0,08715
b. Maaße, Kannen u. s. w. anderer					
1,23589	0,93362	0,81791	3,40074	1,60436	0,81818
0,09198	9,97017	9,91271	0,53157	0,20530	9,91285

9) Getreidemaaßtabellen.

Oesterr. od. Wien. Metze = 1,9471 Cub.-Fuß.	Baierscher Scheffel = 208 Maaßkannen.	Sächsisch-Dresden. Scheffel = 7900 Cub.-Zoll.	Hannoverscher Himten = 1,25 Cub.-Fuß.	Würtembergscher Scheffel = 7537 Cub.-Zoll.	Braunschweiger Himten = 2316 Cub.-Zoll.
a. Der preuß. Scheffel, zu 3072 Cubik-Zoll,					
0.89362	0,24718	0,52935	1,76432	0,31012	1,76471
9,95115	9,39301	9,72374	0,24658	9,49153	0,24667
b. Scheffel, Metzen u. s. w. anderer					
1,11905	4,04570	1,88912	0,56679	3,22456	0,56667
0,04885	0,60699	0,27626	9,75342	0,50847	9,75333

7) Feldmaaßtabellen.

Kurhess. Acker à 150 □R.	Hessen-Darmst. Morgen a 400 □Klaft.	Badensch. Morgen à 400 □R.	Englische Acre à 160 □R.	Russische Dessätine à 2400 □Faden.	Französ. Hectare à 100 □Decameter.
in Morgen, Acker u. s. w. anderer Länder.					
1,04922	1,02129	0,70923	0,63094	0,23370	0,25532
0,02086	0,00915	9,85079	9,79999	9,36867	9,40709
Länder in preußische Morgen.					
0,95310	0,97915	1,40998	1,58494	4,27890	3,91662
9,97914	9,99085	0,14921	0,20001	0,63133	0,59291

8) Flüssigkeitsmaaßtabellen.

Kurhess. Maaß = 144 Cub.-Zoll.	Hessen-Darmst. Maaß = 128 Cub.-Zoll.	Badensch. Maaß = 1/18 Cub.-Fuß.	Englischer Gallon = 277,274 Cub.-Zoll.	Russischer Stoof = 75 Cub.-Z.	Französ. Litre = 0,001 C.-Met.
in Maaße, Kannen u. s. w. anderer Länder.					
0,57701	0,57252	0,76335	0,25202	0,93170	1,14503
9,76118	9,75779	9,88273	9,40143	9,96928	0,05882
Länder in preußische Quart.					
1,73307	1,74668	1,31001	3,96798	1,07330	0,87334
0,23882	0,24221	0,11727	0,59857	0,03072	9,94118

9) Getreidemaaßtabellen.

Kurhess. Scheffel = 5135,3 Cub.-Zoll.	Hessen-Darmst. Malter = 8192 Cub.-Zoll.	Badensch. Malter = 100 Maaß.	Englischer Bushel = 8 Gall.	Russischer Tschetwerik = 1600 Cub.-Z.	Französ. Hectolitre = 100 Litres.
in Scheffel, Metzen u. s. w. anderer Länder.					
0,68386	0,70351	0,36641	1,51210	2,09634	0,54961
9,83497	9,84727	9,56397	0,17958	0,32146	9,74006
Länder in preußische Scheffel.					
1,46228	1,42145	2,72918	0,66133	0,47702	1,81946
0,16503	0,15273	0,43603	9,82042	9,67854	0,25994

10) Meilentabelle.

Oesterreichsche Meile = 24000 Fuß.	Sächsische Polizei-Meile = 32000 Fuß.	Hannoversche Meile = 25400 Fuß.	Braunschweiger Meile = 26000 Fuß.	Badensch. Meile = 29629 Fuß.	Hessen-Darmst. Meile = 30000 Fuß.
a. Die preußische Meile, zu 24000 Fuß,					
0,99286	0,83121	1,01527	1,01524	0,84740	1,00433
9,99689	9,91971	0,00658	0,00657	9,92809	0,00188
b. Die Meilen u. s. w. anderer Länder					
1,00719	1,20307	0,98496	0,98499	1,18007	0,99569
0,00311	0,08029	9,99342	9,99343	0,07191	9,99812

C. Verwandlungstabellen.

Die erste von folgenden Verwandlungstabellen dient, um die meist in der Praxis vorkommenden Duodecimal-Zoll und Achtelzoll in Fuß umzuwandeln. Die Zolle sucht man in der ersten Horizontal- und die Achtel in der ersten Vertikalcolumne auf; die entsprechende Fußzahl steht mit der Zollzahl in einerlei Vertikal- und mit der Achtelzollzahl in einerlei Horizontalcolumne. Hiernach ist z. B. $5\frac{3}{8}$ Zoll = 0,4479 Fuß; umgekehrt aber 0,646 Fuß = $7\frac{6}{8}$ Zoll.

Die Tafel Nr. 2 dient zur Verwandlung der Zoll und Linien in Fuß und ist wie Nr. 1 eingerichtet. Hiernach ist z. B. 4 Zoll, 5 Linien = 0,3681 Fuß; umgekehrt 0,653 Fuß = 7 Zoll 10 Linien.

Die Tabellen Nr. 3 und 4 dienen zum Umsetzen der Quadr.-Zoll und Cub.-Zoll in Quadr.-Fuß und Cub.-Fuß. Ihre Einrichtung und ihr Gebrauch ist ohne weitere Erklärung einleuchtend. Hiernach sind z. B. 8 Quadr.-Zoll = 0,055556 Quadr.-Fuß, ferner 80 Quadr.-Zoll = 0,55556 und 800 Quadr.-Zoll = 5,5556 Quadr.-Fuß. Es sind ebenso

10) Meilentabelle.

Schweizer neue Wegstunde = 16000 F.	Deutsche od. geogr. Meile, 15 auf 1 Grad.	Englische Meile = 5280 F.	Franz. u. englische Seemeile, 20 = 1 Gr.	Russische Werst = 3500 F.	Französ. Myriameter = 10000 Meter.
in Meilen u. s. w. anderer Länder.					
1,56927	1,01514	4,68055	1,35352	7,06095	0,75325
0,19570	0,00653	0,67030	0,13146	0,84886	9,87694
in preußische Meilen.					
0,63724	0,98509	0,21365	0,73882	0,14162	1,32758
9,80430	9,99347	9,32970	9,86854	9,15114	0,12306

$$236 \text{ Quadr.-Zoll} = \left\{\begin{array}{r} 1,3889 \\ 2083 \\ 417 \end{array}\right\} = 1,639 \text{ Quadr.-Fuß.}$$

$$\text{Ferner } 1269 \text{ Cubik-Zoll} = \left\{\begin{array}{r} 0,5787 \\ 1157 \\ 347 \\ 52 \end{array}\right\} = 0,7343 \text{ Cub.-Fuß.}$$

Umgekehrt 0,396 Cubik-Fuß ist = 684 Cubik-Zoll.

$$\begin{array}{r} \underline{0,3472} \\ 488 \\ \underline{463} \\ 25 \\ \underline{23} \end{array}$$

Die fünfte Tabelle ist bei Verwandlung des preußischen Fußmaaßes in Metermaaß und die sechste Tabelle im umgekehrten Falle in Anwendung zu bringen. Die Einrichtung beider Tabellen ist an sich klar, ihr Gebrauch aber wird durch folgende Beispiele vor Augen geführt:

1) Eine Länge von 5 Fuß 7 Zoll 2 Linien ist auch

$$= \left\{\begin{array}{r} 1,5693 \\ 1831 \\ 44 \end{array}\right\} = 1,7568 \text{ Meter.}$$

2) Umgekehrt 2,436 Meter ist = 7 Fuß 9 Zoll 2 Lin.

```
2,197
-----
  239
  235
  ---
    4
    4
    -
```

---

1) Verwandlung der Zoll und Achtelzoll in Fuß.

Zoll.	0	1	2	3	4	5
Achtel						
0	0,0000	0,0833	0,1667	0,2500	0,3333	0,4167
1	0,0104	0,0937	0,1771	0,2604	0,3437	0,4271
2	0,0208	0,1042	0,1875	0,2708	0,3542	0,4375
3	0,0312	0,1146	0,1979	0,2812	0,3646	0,4479
4	0,0417	0,1250	0,2083	0,2917	0,3750	0,4583
5	0,0521	0,1354	0,2187	0,3021	0,3854	0,4688
6	0,0625	0,1458	0,2292	0,3125	0,3958	0,4792
7	0,0729	0,1563	0,2396	0,3229	0,4062	0,4896

3) Eine Fläche von 6,274 Quadrat-Fuß ist auch

$$= \left\{ \begin{matrix} 0,5910 \\ 197 \\ 69 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 0,6180 \text{ Quadrat-Meter.}$$

4) Der Raum von 0,3265 Cubik-Meter ist auch

$$= \left\{ \begin{matrix} 9,7038 \\ 6469 \\ 1941 \\ 162 \end{matrix} \right\} = 10,561 \text{ Cubik-Fuß.}$$

---

1) Verwandlung der Zoll und Achtelzoll in Fuß.

6	7	8	9	10	11
0,5000	0,5833	0,6667	0,7500	0,8333	0,9167
0,5104	0,5938	0,6771	0,7604	0,8438	0,9271
0,5208	0,6042	0,6875	0,7708	0,8542	0,9375
0,5312	0,6146	0,6979	0,7812	0,8646	0,9479
0,5417	0,6250	0,7083	0,7917	0,8750	0,9583
0,5521	0,6354	0,7187	0,8021	0,8854	0,9687
0,5625	0,6458	0,7292	0,8125	0,8958	0,9792
0,5729	0,6563	0,7396	0,8229	0,9063	0,9896

2) Verwandlung der Zoll und Linien in Fuß.

Zoll.	0	1	2	3	4	5
Linien.						
0	0,0000	0,0833	0,1667	0,2500	0,3333	0,4167
1	0,0069	0,0903	0,1736	0,2569	0,3403	0,4236
2	0,0139	0,0972	0,1805	0,2639	0,3472	0,4305
3	0,0208	0,1042	0,1875	0,2708	0,3542	0,4375
4	0,0278	0,1111	0.1944	0,2778	0,3611	0,4444
5	0,0347	0,1181	0,2014	0,2847	0,3681	0,4514
6	0,0417	0,1250	0,2083	0,2917	0,3750	0,4583
7	0,0486	0,1319	0,2153	0,2986	0,3819	0.4653
8	0,0556	0,1389	0,2222	0,3056	0,3889	0.4722
9	0,0625	0,1458	0,2292	0,3125	0,3958	0,4792
10	0,0694	0,1528	0,2361	0,3194	0,4028	0,4861
11	0,0764	0,1597	0,2430	0,3264	0,4097	0,4930

3) Verwandlung der Quadrat-Zoll in Quadrat-Fuß.

Quadrat-Zoll.	1	2	3	4
Quadrat-Fuß.	0,006944	0,013889	0,020833	0,027778

4) Verwandlung der Cubik-Zoll in Cubik-Fuß.

Cubik-Zoll.	1	2	3	4
Cubik-Fuß.	0,0005787	0,0011574	0,0017361	0,0023148

2) Verwandlung der Zoll und Linien in Fuß.

6	7	8	9	10	11
0.5000	0,5833	0.6667	0,7500	0,8333	0,9167
0.5069	0,5903	0.6736	0,7569	0,8403	0,9236
0.5139	0.5972	0,6805	0,7639	0,8472	0,9305
0,5208	0,6042	0,6875	0,7708	0,8542	0,9375
0,5278	0,6111	0,6944	0,7778	0,8611	0,9444
0,5347	0,6181	0,7014	0,7847	0,8681	0,9514
0,5417	0,6250	0,7083	0,7917	0,8750	0,9583
0,5486	0,6319	0,7153	0,7986	0,8819	0,9653
0,5556	0.6389	0,7222	0,8056	0,8889	0,9722
0,5625	0,6458	0,7292	0,8125	0,8958	0,9792
0,5694	0,6528	0,7361	0,8194	0,9028	0,9861
0,5764	0,6597	0,7430	0,8264	0,9097	0,9930

3) Verwandlung der Quadrat-Zoll in Quadrat-Fuß.

5	6	7	8	9	10
0,034722	0,041667	0,048611	0,055556	0,062500	0,069444

4) Verwandlung der Cubik-Zoll in Cubik-Fuß.

5	6	7	8	9	10
0,0028935	0,0034722	0,0040509	0,0046296	0,0052083	0,0057870

5) Verwandlung des preußischen Fußmaaßes in Metermaaß.

Fuß.	Meter.	Zoll.	Meter.	Linien.	Meter.
1	0,3139	1	0,0262	1	0,0022
2	0,6277	2	0,0523	2	0,0044
3	0,9416	3	0,0785	3	0,0065
4	1,2554	4	0,1046	4	0,0087
5	1,5693	5	0,1308	5	0,0109
6	1,8831	6	0,1569	6	0,0131
7	2,1970	7	0,1831	7	0,0153
8	2,5108	8	0,2092	8	0,0174
9	2,8247	9	0,2354	9	0,0196
10	3,1385	10	0,2615	10	0,0218
11	3,4524	11	0,2878	11	0,0240
12	3,7662	12	0,3139	12	0,0262

6) Verwandlung des Metermaaßes in preußisches Fußmaaß.

	1	2	3	4
Fuß.	3,1862	6,3724	9,5586	12,7448
Quadrat-Fuß.	10,152	20,304	30,456	40,607
Cubik-Fuß.	32,346	64,692	97,038	129,383

5) Verwandlung des preußischen Fußmaaßes in Metermaaß.

Quadrat-Fuß.	Quadrat-Meter.	Cubik-Fuß.	Cubik-Meter.
1	0,0985	1	0,0309
2	0,1970	2	0,0618
3	0,2955	3	0,0927
4	0,3940	4	0,1237
5	0,4925	5	0,1546
6	0,5910	6	0,1855
7	0,6895	7	0,2164
8	0,7880	8	0,2473
9	0,8865	9	0,2782
10	0,9850	10	0,3092
11	1,0835	11	0,3401
12	1,1820	12	0,3710

6) Verwandlung des Metermaaßes in preußisches Fußmaaß.

5	6	7	8	9	10
15,9310	19,1172	22,3034	25,4896	28,6758	31,8620
50,759	60,911	71,063	81,215	91,367	101,519
161,729	194,075	226,421	258,767	291,113	323,459

II. Trigonometrische Tabellen.

Einrichtung und Gebrauch der trigonometrischen Tabellen.

Die erste der folgenden Tabellen gibt die vier trigonometrischen Linien Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente aller Winkel von 0° bis 90° mit Intervallen von 10 zu 10 Minuten an; die zweite Tabelle enthält die Logarithmen dieser Größen. Jede dieser Tabellen besteht aus 8 Vertikalcolumnen, wovon die ersten und die letzten zwei die Grade und Minuten ausdrücken und die mittleren vier die entsprechenden Werthe der trigonometrischen Linien oder die Logarithmen derselben angeben. Die Grade und Minuten und die zugehörigen trigonometrischen Linien bilden eine horizontale Zeile. Die Winkel unter 45 Grad sind in den ersten zwei und die über 45 Grad in den letzten Vertikalcolumnen enthalten. Auf jene beziehen sich die Ueber-, auf diese die Unterschriften der mittleren Vertikalcolumnen. Die Zahlen zwischen je sechs, einem ganzen Grade entsprechenden Zeilen sind die Differenzen von je zwei auf einander folgenden trigonometrischen Linien. Man findet von einem Winkel unter 45° die entsprechenden trigonometrischen Linien, oder die Logarithmen dieser, wenn man diesen Winkel in der vordersten Vertikalcolumne aufsucht, und von der gefundenen Stelle aus horizontal herübergeht bis in die Vertikalcolumne, deren Aufschrift mit dem Namen der gesuchten Linie übereinstimmt. So gibt z. B. die Tafel Nr. 1 *sin.* 11°, 20′ = 0,1965; *cos.* 11°, 20′ = 0,9805 u. s. w., weil diese Zahlen in den mit Sinus und Cosinus überschriebenen Vertikalcolumnen und zugleich in der Zeile enthalten sind, die mit 11°, 21′ anfängt. Ebenso ist *cos.* 34°,50′ = 0,8208 und *tang.* 34°,50′ = 0,6959, endlich

cotang. 41°, 30′ = 1,1303. Ebenso findet man in der Tafel Nr. 2, *log. sin.* 26°, 30′ = 9,64953; *log. cos.* 26°, 30′ = 9,95179, ferner *log. tang.* 17°, 40′ = 9,50311, *log. cotang.* 39°, 10′ = 10,08905. Für einen Winkel über 45° findet man hingegen die entsprechende trigonometrische Linie oder deren Logarithmen, wenn man die gegebene Grad- und Minutenzahl in den hintersten Vertikalcolumnen aufsucht, und von da aus horizontal herüber geht, bis man in die Vertikalcolumne kommt, an deren Fuß der Name der gesuchten Linie steht. Hiernach findet man in der ersten Tabelle *sin.* 48°, 10′ = 0,7451, und *cos.* 48°, 10′ = 0,6670, weil diese Zahlen in der Zeile stehen, an deren Ende 48°, 10′ zu lesen ist und zugleich in Vertikalreihen enthalten sind, an deren Fuß die Namen Sinus und Cosinus zu finden sind. Ebenso findet man *cos.* 61°, 30′ = 0,4772, *tang.* 61°, 30′ = 1,8418, und *cotang.* 76°, 40′ = 0,2370. Auf gleiche Weise findet man in der zweiten Tabelle *log. sin.* 50°, 40′ = 9,88844, *log. tang.* 50°, 40′ = 10,08647, *log. cos.* 81°, 10′ = 9,18628, *log. cotang.* 68°, 30′ = 9,59540.

Uebrigens ist *sin.* 50°, 40′ auch = *cos.* 39°, 20′, ferner *cos.* 61°, 30′ = *sin.* 28°, 30′, *cotang.* 68°, 30′ = *tang.* 21°, 30′ u. s. w., weil von zwei Winkeln, deren Summe 90° beträgt, der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, auch Tangente des einen gleich Cotangente des andern ist u. s. w.

Sind die Winkel bis auf Minuten genau gegeben, so hat man die in den Tabellen enthaltenen Werthe der trigonometrischen Linien mit Hilfe der Differenzen zu ergänzen, indem man das Interpolationsverfahren einschlägt. Hiernach ist

$$sin.\ 18°, 13' = sin.\ 18°, 10' + 0{,}3\ .\ 28 = \left\{\begin{matrix}0{,}3118\\ \cdots 8\end{matrix}\right\} = 0{,}3126;$$

$$sin.\ \ 56°,\ 27' = \left\{\begin{matrix}0{,}8323\\ \cdot\cdot 11\end{matrix}\right\} = 0{,}8334,$$

$$tang.\ \ 43°,\ 34' = \left\{\begin{matrix}0{,}9490\\ 22\end{matrix}\right\} = 0{,}9512, \text{ ferner}$$

$$log.\ sin.\ 26°, 16' = 9{,}64442 + 0{,}6 . 256 = \left\{\begin{matrix}9{,}64442\\ 154\end{matrix}\right\} = 9{,}64596,$$

$$log.\ tang.\ 46^{\circ},\ 21' = \left\{\begin{matrix} 10{,}02022 \\ 25 \end{matrix}\right\} = 10{,}02047.$$

Da der Cosinus und die Cotangente abnehmen, wenn der Winkel wächst, so hat man bei denselben die Tabellenwerthe durch Subtraction zu corrigiren. Es ist hiernach

$$cos.\ 18^{\circ}, 14' = cos.\ 18^{\circ}, 14' - 0{,}4\,.\,9 = \left\{\begin{matrix} 0{,}9502 \\ 4 \end{matrix}\right\} = 0{,}9498;$$

$$cos.\ 63^{\circ},\ 25' = \left\{\begin{matrix} 0{,}4488 \\ 13 \end{matrix}\right\} = 0{,}4475,$$

$$cotang.\ 34^{\circ}, 28' = \left\{\begin{matrix} 1{,}4641 \\ 73 \end{matrix}\right\} = 1{,}4568,\ \text{ferner}$$

$$log.\ cos.\ 35^{\circ},\ 52' = \left\{\begin{matrix} 9{,}90887 \\ 18 \end{matrix}\right\} = 9{,}90869,\ \text{und}$$

$$log.\ cotang.\ 62^{\circ}, 37' = \left\{\begin{matrix} 9{,}71648 \\ 217 \end{matrix}\right\} = 9{,}71431.$$

Umgekehrt dienen die in Rede stehenden Tabellen auch dazu, um aus einer gegebenen trigonometrischen Linie oder ihrem Logarithmen den entsprechenden Winkel zu finden. In diesem Falle sucht man den gegebenen Zahlenwerth in derjenigen Vertikalcolumne auf, welche den Namen desselben am Kopfe oder Fuße trägt, und geht von da links oder rechts herüber in die Grad- und Minutencolumnen. Hiernach ist z. B.

für $sin.\ x = 0{,}5568$, $x = 33^{\circ},\ 50'$,
für $sin.\ x = 0{,}7916$, $x = 52^{\circ},\ 20'$,
für $cos.\ x = 0{,}7604$, $x = 40^{\circ},\ 30'$,
für $tang.\ x = 2{,}6746$, $x = 69^{\circ},\ 30'$,
für $cotang.\ x = 1{,}5301$, $x = 33^{\circ},\ 10'$; ferner
für $log.\ sin.\ x = 9{,}29340$, $x = 11^{\circ},\ 20'$,
für $log.\ sin.\ x = 9{,}98901$, $x = 77^{\circ},\ 10'$,
für $log.\ tang.\ x = 10{,}47548$, $x = 71^{\circ},\ 30'$,
für $log.\ cotang.\ x = 9{,}98484$, $x = 46^{\circ},\ 0'$.

In der Regel ist die gegebene Größe nicht genau in den Tabellen enthalten, und daher zur schärfern Bestimmung des Winkels das Interpoliren anzuwenden. Bei den Sinus und Tangenten nehme man den der nächst kleineren, bei den Cosinus und Cotangenten aber den der nächst größeren

Zahl entsprechenden Winkel; dann dividire man die zehnfache Differenz beider Zahlen durch die Differenz, welche die Tafeln für zwei benachbarte Zahlen angeben, und endlich setze man den Quotienten zu den Minuten des erst aus den Tafeln genommenen Winkels. So ist z. B. für

$sin.\ x = 0{,}3679,\ x = 21^{\circ},\ 30' + (3679 - 3665)\ .\ \frac{10'}{27}$

$= 21^{\circ}{,}30' + \frac{140'}{27} = 21^{\circ}{,}35'{,}2$; nämlich der nächst kleineren Zahl 0,3665 entspricht $x = 21^{\circ},\ 30'$, der Quotient aus der zehnfachen Differenz von dieser und der gegebenen Zahl 0,3679 ist 140 und die von der Tabelle angegebene Differenz ist 27, folglich der Quotient beider $= 5{,}2$. Wenn ferner $tang.\ x = 0{,}9152$ ist, so hat man

$x = 42^{\circ}{,}20' + (52 - 10)\ \frac{10'}{53} = \left\{ \begin{matrix} 42^{\circ}{,}20' \\ 8 \end{matrix} \right\} = 42^{\circ}{,}28'$;

wenn $cos.\ x = 0{,}6095$, so hat man $x = 52^{\circ}{,}20' + (111 - 95)\frac{10}{23}$

$= \left\{ \begin{matrix} 52^{\circ},\ 20' \\ 7' \end{matrix} \right\} = 52^{\circ}{,}27'$, und wenn $cotang.\ x = 1{,}5630$

ist, so folgt $x = 32^{\circ},\ 30' + (697 - 630)\ \frac{10'}{101}$

$= \left\{ \begin{matrix} 32^{\circ}{,}30' \\ 6{,}6 \end{matrix} \right\} = 32^{\circ}{,}36'{,}6$. Ferner für $log.\ sin.\ x = 9{,}75344$

ist $x = 34^{\circ}{,}30' + (44 - 13)\ \frac{10'}{183} = \left\{ \begin{matrix} 34^{\circ}{,}30' \\ 1'{,}7 \end{matrix} \right\} = 34^{\circ}{,}31'{,}7$;

für $log.\ tang.\ x = 11{,}12537,\ x = 85^{\circ}{,}40' + (537 - 047)\ \frac{10'}{1710}$

$= \left\{ \begin{matrix} 85^{\circ},\ 40' \\ 3' \end{matrix} \right\} = 85^{\circ},\ 43'$; für $log.\ cos.\ x = 9{,}72104$

ist $x = 58^{\circ}{,}10' + \frac{2180 - 1040}{204} = \left\{ \begin{matrix} 58^{\circ}{,}10' \\ 5 \end{matrix} \right\} = 58^{\circ}{,}15'$;

endlich für $log.\ cotang.\ x = 10{,}28853$,

$x = 27^{\circ}{,}10' + \frac{9720 - 8530}{311} = \left\{ \begin{matrix} 27^{\circ}{,}10' \\ 3{,}5 \end{matrix} \right\} = 27^{\circ}{,}13'{,}5$.

---

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	0
	10	0,0029	1,0000	0,0029	343,77		50
	20	0,0058	1,0000	0,0058	171,89		40
	30	0,0087	1,0000	0,0087	114,59		30
	40	0,0116	0,9999	0,0116	85,940		20
	50	0,0145	0,9999	0,0145	68,750		10
		29	1	29	11,460		
1	0	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	89	0
	10	0,0204	0,9998	0,0204	49,104		50
	20	0,0233	0,9997	0,0233	42,964		40
	30	0,0262	0,9997	0,0262	38,188		30
	40	0,0291	0,9996	0,0291	34,368		20
	50	0,0320	0,9995	0,0320	31,242		10
		29	1	29	2,606		
2	0	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	88	0
	10	0,0378	0,9993	0,0378	26,432		50
	20	0,0407	0,9992	0,0407	24,542		40
	30	0,0436	0,9990	0,0437	22,904		30
	40	0,0465	0,9989	0,0466	21,470		20
	50	0,0494	0,9988	0,0495	20,206		10
		29	1	29	1,125		
3	0	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	87	0
	10	0,0552	0,9985	0,0553	18,075		50
	20	0,0581	0,9983	0,0582	17,169		40
	30	0,0610	0,9981	0,0612	16,350		30
	40	0,0640	0,9980	0,0641	15,605		20
	50	0,0669	0,9978	0,0670	14,924		10
		29	2	29	623		
4	0	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	86	0
	10	0,0727	0,9974	0,0729	13,727		50
	20	0,0756	0,9971	0,0758	13,197		40
	30	0,0785	0,9969	0,0787	12,706		30
	40	0,0814	0,9967	0,0816	12,251		20
	50	0,0843	0,9964	0,0846	11,826		10
		29	2	29	396		
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
	10	0,0901	0,9959	0,0904	11,059		50
	20	0,0929	0,9957	0,0934	10,712		40
	30	0,0958	0,9954	0,0963	10,385		30
	40	0,0987	0,9951	0,0992	10,078		20
	50	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882		10
		29	3	29	2738		
6	0	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	0
	10	0,1074	0,9942	0,1080	9,2553		50
	20	0,1103	0,9939	0,1110	9,0098		40
	30	0,1132	0,9936	0,1139	8,7769		30
	40	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555		20
	50	0,1190	0,9929	0,1198	8,3450		10
		29	4	29	2007		
7	0	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	0
	10	0,1248	0,9922	0,1257	7,9530		50
	20	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704		40
	30	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958		30
	40	0,1334	0,9911	0,1346	7,4287		20
	50	0,1363	0,9907	0,1376	7,2687		10
		29	4	29	1533		
8	0	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	0
	10	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682		50
	20	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269		40
	30	0,1478	0,9890	0,1495	6,6912		30
	40	0,1507	0,9886	0,1524	6,5606		20
	50	0,1536	0,9881	0,1554	6,4348		10
		28	4	30	1210		
9	0	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	0
	10	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970		50
	20	0,1622	0,9868	0,1644	6,0844		40
	30	0,1650	0,9863	0,1673	5,9758		30
	40	0,1679	0,9858	0,1703	5,8708		20
	50	0,1708	0,9853	0,1733	5,7694		10
		28	5	30	981		
10	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
10	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
	10	0,1765	0,9843	0,1793	5,5764		50
	20	0,1794	0,9838	0,1823	5,4845		40
	30	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955		30
	40	0,1851	0,9827	0,1883	5,3093		20
	50	0,1880	0,9822	0,1914	5,2257		10
		28	6	30	811		
11	0	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	0
	10	0,1937	0,9811	0,1974	5,0658		50
	20	0,1965	0,9805	0,2004	4,9894		40
	30	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152		30
	40	0,2022	0,9793	0,2065	4,8430		20
	50	0,2051	0,9787	0,2095	4,7729		10
		28	6	31	683		
12	0	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	0
	10	0,2108	0,9775	0,2156	4,6382		50
	20	0,2136	0,9769	0,2186	4,5736		40
	30	0,2164	0,9763	0,2217	4,5107		30
	40	0,2193	0,9757	0,2247	4,4494		20
	50	0,2221	0,9750	0,2278	4,3897		10
		28	6	31	582		
13	0	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77	0
	10	0.2278	0,9737	0,2339	4,2747		50
	20	0,2306	0,9730	0.2370	4,2193		40
	30	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653		30
	40	0,2363	0,9717	0,2432	4,1126		20
	50	0,2391	0,9710	0,2462	4,0611		10
		28	7	31	503		
14	0	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	0
	10	0,2447	0,9696	0,2524	3,9617		50
	20	0,2476	0,9689	0.2555	3,9136		40
	30	0.2504	0,9681	0,2586	3,8667		30
	40	0,2532	0,9674	0,2617	3,8208		20
	50	0,2560	0,9667	0.2648	3,7760		10
		28	7	31	439		
15	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
15	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	0
	10	0,2616	0,9652	0,2711	3,6891		50
	20	0,2644	0,9644	0,2742	3,6470		40
	30	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059		30
	40	0,2700	0,9628	0,2805	3,5656		20
	50	0,2728	0,9621	0,2836	3,5261		10
		28	8	31	387		
16	0	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	0
	10	0,2784	0,9605	0,2899	3,4495		50
	20	0,2812	0,9596	0,2931	3,4124		40
	30	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759		30
	40	0,2868	0,9580	0,2994	3,3402		20
	50	0,2896	0,9572	0,3026	3,3052		10
		28	9	31	343		
17	0	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73	0
	10	0,2952	0,9555	0,3089	3,2371		50
	20	0,2979	0,9546	0,3121	3,2041		40
	30	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716		30
	40	0,3035	0,9528	0,3185	3,1397		20
	50	0,3062	0,9520	0,3217	3,1084		10
		28	9	32	307		
18	0	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	0
	10	0,3118	0,9502	0,3281	3,0475		50
	20	0,3145	0,9492	0,3314	3,0178		40
	30	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887		30
	40	0,3201	0,9474	0,3378	2,9600		20
	50	0,3228	0,9465	0,3411	2,9319		10
		27	10	32	277		
19	0	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71	0
	10	0,3283	0,9446	0,3476	2,8770		50
	20	0,3311	0,9436	0,3508	2,8502		40
	30	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239		30
	40	0,3365	0,9417	0,3574	2,7980		20
	50	0,3393	0,9407	0,3607	2,7725		10
		27	10	33	250		
20	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
20	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	0
	10	0,3448	0,9387	0,3673	2,7228		50
	20	0,3475	0,9377	0,3706	2,6985		40
	30	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746		30
	40	0,3529	0,9356	0,3772	2,6511		20
	50	0,3557	0,9346	0,3805	2,6279		10
		27	10	34	228		
21	0	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69	0
	10	0,3611	0,9325	0,3872	2,5826		50
	20	0,3638	0,9315	0,3906	2,5605		40
	30	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386		30
	40	0,3692	0,9293	0,3973	2,5172		20
	50	0,3719	0,9283	0,4006	2,4960		10
		27	11	34	209		
22	0	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68	0
	10	0,3773	0,9261	0,4074	2,4545		50
	20	0,3800	0,9250	0,4108	2,4342		40
	30	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142		30
	40	0,3854	0,9228	0,4176	2,3945		20
	50	0,3881	0,9216	0,4210	2,3750		10
		27	11	35	191		
23	0	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67	0
	10	0,3934	0,9194	0,4279	2,3369		50
	20	0,3961	0,9182	0,4314	2,3183		40
	30	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998		30
	40	0,4014	0,9159	0,4383	2,2817		20
	50	0,4041	0,9147	0,4417	2,2637		10
		26	12	35	177		
24	0	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66	0
	10	0,4094	0,9124	0,4487	2,2286		50
	20	0,4120	0,9112	0,4522	2,2113		40
	30	0,4147	0,9100	0,4557	2,1943		30
	40	0,4173	0,9088	0,4592	2,1775		20
	50	0,4200	0,9075	0,4628	2,1609		10
		26	12	35	164		
25	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
25	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	0
	10	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283		50
	20	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123		40
	30	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965		30
	40	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809		20
	50	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655		10
		26	13	36	152		
26	0	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64	0
	10	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353		50
	20	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204		40
	30	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057		30
	40	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912		20
	50	0,4514	0,8923	0,5059	1,9768		10
		26	13	36	142		
27	0	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63	0
	10	0,4566	0,8897	0,5132	1,9486		50
	20	0,4592	0,8884	0,5169	1,9347		40
	30	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210		30
	40	0,4643	0,8857	0,5243	1,9074		20
	50	0,4669	0,8843	0,5280	1,8940		10
		26	14	37	133		
28	0	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62	0
	10	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676		50
	20	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546		40
	30	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418		30
	40	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291		20
	50	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165		10
		25	14	38	125		
29	0	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61	0
	10	0,4874	0,8732	0,5581	1,7917		50
	20	0,4899	0,8718	0,5619	1,7796		40
	30	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675		30
	40	0,4950	0,8689	0,5696	1,7556		20
	50	0,4975	0,8675	0,5735	1,7437		10
		25	15	39	116		
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
	10	0,5025	0,8646	0,5812	1,7205		50
	20	0,5050	0,8631	0,5851	1,7090		40
	30	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977		30
	40	0,5100	0,8601	0,5930	1,6864		20
	50	0,5125	0,8587	0,5969	1,6753		10
		25	15	40	110		
31	0	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59	0
	10	0 5175	0,8557	0,6048	1,6534		50
	20	0,5200	0 8542	0,6088	1,6426		40
	30	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319		30
	40	0,5250	0,8511	0,6168	1,6212		20
	50	0,5275	0,8496	0,6208	1,6107		10
		25	16	41	104		
32	0	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58	0
	10	0,5324	0,8465	0,6289	1,5900		50
	20	0,5348	0,8450	0,6330	1,5798		40
	30	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697		30
	40	0,5398	0,8418	0,6412	1,5597		20
	50	0,5422	0,8403	0,6453	1,5497		10
		24	16	41	98		
33	0	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57	0
	10	0,5471	0 8371	0,6536	1,5301		50
	20	0,5495	0,8355	0,6577	1,5204		40
	30	0,5519	0 8339	0,6619	1,5108		30
	40	0,5544	0,8323	0,6661	1,5013		20
	50	0,5568	0,8307	0,6703	1,4919		10
		24	17	42	93		
34	0	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56	0
	10	0,5616	0,8274	0,6787	1,4733		50
	20	0,5640	0,8258	0,6830	1,4641		40
	30	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550		30
	40	0,5688	0,8225	0,6916	1,4460		20
	50	0,5712	0,8208	0,6959	1,4370		10
		24	17	43	89		
35	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
35	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0
	10	0,5760	0,8175	0,7046	1,4193		50
	20	0,5783	0,8158	0,7089	1.4106		40
	30	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019		30
	40	0,5831	0,8124	0,7177	1,3934		20
	50	0,5854	0,8107	0,7221	1,3848		10
		24	17	44	84		
36	0	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54	0
	10	0,5901	0,8073	0,7310	1.3680		50
	20	0,5925	0,8056	0,7355	1,3597		40
	30	0,5948	0,8039	0,7400	1,3514		30
	40	0,5972	0,8021	0,7445	1,3432		20
	50	0,5995	0,8004	0,7490	1,3351		10
		23	18	46	81		
37	0	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53	0
	10	0,6041	0,7969	0,7581	1,3190		50
	20	0,6065	0,7951	0,7627	1,3111		40
	30	0,6088	0,7934	0,7673	1,3032		30
	40	0,6111	0,7916	0,7720	1,2954		20
	50	0,6134	0,7898	0,7766	1,2876		10
		23	18	47	77		
38	0	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52	0
	10	0,6180	0,7862	0,7860	1,2723		50
	20	0,6202	0,7844	0,7907	1,2647		40
	30	0,6225	0,7826	0,7954	1,2572		30
	40	0,6248	0,7808	0,8002	1,2497		20
	50	0,6271	0,7790	0,8050	1,2423		10
		23	19	48	74		
39	0	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51	0
	10	0,6316	0,7753	0,8146	1.2276		50
	20	0,6338	0,7735	0,8195	1,2203		40
	30	0,6361	0,7716	0,8243	1,2131		30
	40	0,6383	0,7698	0,8292	1,2059		20
	50	0,6406	0,7679	0,8342	1,1988		10
		22	19	49	70		
40	0	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
40	0	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0
	10	0,6450	0,7642	0,8441	1,1847		50
	20	0.6472	0,7623	0,8491	1,1778		40
	30	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708		30
	40	0,6517	0,7585	0,8591	1,1640		20
	50	0,6539	0,7566	0,8642	1,1571		10
		22	19	51	67		
41	0	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49	0
	10	0,6583	0,7528	0,8744	1,1436		50
	20	0,6604	0,7509	0,8796	1,1369		40
	30	0,6626	0,7490	0,8847	1,1303		30
	40	0,6648	0,7470	0,8899	1,1237		20
	50	0,6670	0,7451	0,8952	1,1171		10
		21	20	52	65		
42	0	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48	0
	10	0,6713	0,7412	0,9057	1,1041		50
	20	0,6734	0,7392	0,9110	1,0977		40
	30	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913		30
	40	0,6777	0,7353	0,9217	1,0850		20
	50	0,6799	0,7333	0,9271	1,0786		10
		21	20	54	62		
43	0	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47	0
	10	0,6841	0,7294	0,9380	1,0661		50
	20	0,6862	0,7274	0,9435	1,0599		40
	30	0,6884	0,7254	0,9490	1,0538		30
	40	0,6905	0,7234	0,9545	1,0477		20
	50	0,6926	0,7214	0,9601	1,0416		10
		21	21	56	61		
44	0	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46	0
	10	0,6967	0,7173	0,9713	1,0295		50
	20	0,6988	0,7153	0,9770	1,0235		40
	30	0.7009	0,7133	0,9827	1,0176		30
	40	0,7030	0,7112	0,9884	1,0117		20
	50	0,7050	0,7092	0,9942	1,0058		10
		21	21	58	58		
45	0	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min					G.	Min
0	0	— ∞	10,00000	— ∞	+ ∞	90	0
	10	7,46373	10,00000	7,46373	12,53627		50
	20	7,76475	9,99999	7,76476	12,23524		40
	30	7,94084	9,99998	7,94086	12,05914		30
	40	8,06578	9,99997	8,06581	11,93419		20
	50	8,16268	9,99995	8,16273	11,83727		10
		7918	2	7919	7919		
1	0	8,24186	9,99993	8,24192	11,75808	89	0
	10	8,30879	9,99991	8,30888	11,69112		50
	20	8,36678	9,99988	8,36689	11,63311		40
	30	8,41792	9,99985	8,41807	11,58193		30
	40	8,46366	9,99982	8,46385	11,53615		20
	50	8,50504	9,99978	8,50527	11,49473		10
		3778	4	3781	3781		
2	0	8,54282	9,99974	8,54308	11,45692	88	0
	10	8,57757	9,99969	8,57788	11,42212		50
	20	8,60973	9,99964	8,61009	11,38991		40
	30	8,63968	9,99959	8,64009	11,35991		30
	40	8,66769	9,99953	8,66816	11,33184		20
	50	8,69400	9,99947	8,69453	11,30547		10
		2480	7	2487	2487		
3	0	8,71880	9,99940	8,71940	11,28060	87	0
	10	8,74226	9,99934	8,74292	11,25708		50
	20	8,76451	9,99926	8,76525	11,23475		40
	30	8,78568	9,99919	8,78649	11,21351		30
	40	8,80585	9,99911	8,80674	11,19326		20
	50	8,82513	9,99903	8,82610	11,17390		10
		1845	9	1854	1854		
4	0	8,84358	9,99894	8,84464	11,15536	86	0
	10	8,86128	9,99885	8,86243	11,13757		50
	20	8,87829	9,99876	8,87953	11,12047		40
	30	8,89464	9,99866	8,89598	11,10402		30
	40	8,91040	9,99856	8,91185	11,08815		20
	50	8,92561	9,99845	8,92716	11,07284		10
		1469	11	1479	1479		
5	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805	85	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
5	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805	85	0
	10	8,95450	9,99823	8,95627	11,04373		50
	20	8,96825	9,99812	8,97013	11,02987		40
	30	8,98157	9,99800	8,98358	11,01642		30
	40	8,99450	9,99787	8,99662	11,00338		20
	50	9,00704	9,99775	9,00930	10,99070		10
		1219	14	1232	1232		
6	0	9,01923	9,99761	9,02162	10,97838	84	0
	10	9,03109	9,99748	9,03361	10,96639		50
	20	9,04262	9,99734	9,04528	10,95472		40
	30	9,05386	9,99720	9,05666	10,94334		30
	40	9,06481	9,99705	9,06775	10,93225		20
	50	9,07548	9,99690	9,07858	10,92142		10
		1041	15	1056	1056		
7	0	9,08589	9,99675	9,08914	10,91086	83	0
	10	9,09606	9,99659	9,09947	10,90053		50
	20	9,10599	9,99643	9,10956	10,89044		40
	30	9,11570	9.99627	9,11943	10,88057		30
	40	9,12519	9.99610	9,12909	10,87091		20
	50	9,13447	9,99593	9,13854	10,86146		10
		909	18	926	926		
8	0	9,14356	9,99575	9,14780	10,85220	82	0
	10	9,15245	9,99557	9,15688	10,84312		50
	20	9,16116	9,99539	9,16577	10,83423		40
	30	9,16970	9,99520	9,17450	10,82550		30
	40	9,17807	9,99501	9,18306	10,81694		20
	50	9,18628	9,99482	9,19146	10,80854		10
		805	20	825	825		
9	0	9,19433	9,99462	9,19971	10.80029	81	0
	10	9,20223	9,99442	9,20782	10.79218		50
	20	9,20999	9,99421	9,21578	10,78422		40
	30	9.21761	9,99400	9,22361	10,77639		30
	40	9,22509	9,99379	9.23130	10,76870		20
	50	9,23244	9,99357	9,23887	10,76113		10
		723	22	745	745		
10	0	9,23967	9,99335	9,24632	10,75368	80	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
10	0	9,23967	9,99335	9,24632	10,75368	80	0
	10	9,24677	9,99313	9,25365	10,74635		50
	20	9,25376	9,99290	9,26086	10,73914		40
	30	9,26063	9,99267	9,26797	10,73203		30
	40	9,26739	9,99243	9,27496	10,72504		20
	50	9,27405	9,99219	9,28186	10,71814		10
		655	24	679	679		
11	0	9,28060	9,99195	9,28865	10,71135	79	0
	10	9,28705	9,99170	9,29535	10,70465		50
	20	9,29340	9,99145	9,30195	10,69805		40
	30	9,29966	9,99119	9,30846	10,69154		30
	40	9,30582	9,99093	9,31489	10,68511		20
	50	9,31189	9,99067	9,32122	10,67878		10
		599	27	625	625		
12	0	9,31788	9,99040	9,32747	10,67253	78	0
	10	9,32378	9,99013	9,33365	10,66635		50
	20	9,32960	9,98986	9,33974	10,66026		40
	30	9,33534	9,98958	9,34576	10,65424		30
	40	9,34100	9,98930	9,35170	10,64830		20
	50	9,34658	9,98901	9,35757	10,64243		10
		551	29	579	579		
13	0	9,35209	9,98872	9,36336	10,63664	77	0
	10	9.35752	9,98843	9.36909	10,63091		50
	20	9,36289	9,98813	9,37476	10,62524		40
	30	9,36819	9,98783	9,38035	10,61965		30
	40	9,37341	9,98753	9,38589	10,61411		20
	50	9,37858	9,98722	9,39136	10,60864		10
		510	32	541	541		
14	0	9,38368	9,98690	9,39677	10,60323	76	0
	10	9,38871	9,98659	9,40212	10,59788		50
	20	9,39369	9,98627	9,40742	10,59258		40
	30	9,39860	9,98594	9,41266	10,58734		30
	40	9,40346	9,98561	9,41784	10,58216		20
	50	9,40825	9,98528	9,42297	10,57703		10
		475	34	508	508		
15	0	9,41300	9,98494	9,42805	10,57195	75	0
Gr.	Min.					G.	Min
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
15	0	9,41300	9,98494	9,42805	10,57195	75	0
	10	9,41768	9,98460	9,43308	10,56692		50
	20	9,42232	9,98426	9,43806	10,56194		40
	30	9,42690	9,98391	9,44299	10,55701		30
	40	9,43143	9,98356	9,44787	10,55213		20
	50	9,43591	9,98320	9,45271	10,54729		10
		443	36	479	479		
16	0	9,44034	9,98284	9,45750	10,54250	74	0
	10	9,44472	9,98248	9,46224	10,53776		50
	20	9,44905	9,98211	9,46694	10,53306		40
	30	9,45334	9,98174	9,47160	10,52840		30
	40	9,45758	9,98136	9,47622	10,52378		20
	50	9,46178	9,98098	9,48080	10,51920		10
		416	38	454	454		
17	0	9,46594	9,98060	9,48534	10,51466	73	0
	10	9,47005	9,98021	9,48984	10,51016		50
	20	9,47411	9,97982	9,49430	10,50570		40
	30	9,47814	9,97942	9,49872	10,50128		30
	40	9,48213	9,97902	9,50311	10,49689		20
	50	9,48607	9,97861	9,50746	10,49254		10
		391	40	432	432		
18	0	9,48998	9,97821	9,51178	10.48822	72	0
	10	9,49385	9,97779	9,51606	10 48394		50
	20	9,49768	9,97738	9,52031	10,47969		40
	30	9,50148	9,97696	9,52452	10,47548		30
	40	9,50523	9,97653	9,52870	10,47130		20
	50	9.50896	9,97610	9,53285	10.46715		10
		368	43	412	412		
19	0	9,51264	9,97567	9,53697	10,46303	71	0
	10	9,51629	9,97523	9,54106	10,45894		50
	20	9,51991	9,97479	9.54512	10,45488		40
	30	9,52350	9.97435	9,54915	10,45085		30
	40	9,52705	9,97390	9,55315	10,44685		20
	50	9,53057	9.97344	9,55712	10,44288		10
		348	45	395	395		
20	0	9,53405	9,97299	9.56107	10,43893	70	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr	Min.					G.	Min.
20	0	9,53405	9,97299	9,56107	10,43893	70	0
	10	9,53751	9,97252	9,56498	10,43502		50
	20	9,54093	9,97206	9,56887	10 43113		40
	30	9,54433	9,97159	9,57274	10,42726		30
	40	9,54769	9,97111	9,57658	10.42342		20
	50	9,55102	9,97063	9,58039	10,41961		10
		331	48	379	379		
21	0	9,55433	9,97015	9,58418	10,41582	69	0
	10	9,55761	9,96966	9 58794	10,41206		50
	20	9,56085	9,96917	9.59168	10,40832		40
	30	9.56408	9,96868	9,59540	10,40460		30
	40	9.56727	9.96818	9,59909	10.40091		20
	50	9,57044	9,96767	9,60276	10,39724		10
		314	50	365	365		
22	0	9,57358	9,96717	9,60641	10,39359	68	0
	10	9,57669	9,96665	9,61004	10,38996		50
	20	9,57978	9,96614	9.61364	10,38636		40
	30	9,58284	9,96562	9 61722	10,38278		30
	40	9,58588	9,96509	9,62079	10,37921		20
	50	9,58889	9,96456	9.62433	10,37567		10
		299	53	352	352		
23	0	9,59188	9,96403	9,62785	10,37215	67	0
	10	9,59484	9.96349	9.63135	10,36865		50
	20	9,59778	9,96294	9.63484	10.36516		40
	30	9,60070	9,96240	9,63830	10,36170		30
	40	9,60359	9,96185	9,64175	10,35825		20
	50	9,60646	9,96129	9,64517	10.35483		10
		285	56	341	341		
24	0	9,60931	9,96073	9.64858	10,35142	66	0
	10	9,61214	9,96017	9.65197	10.34803		50
	20	9,61494	9.95960	9,65535	10,34465		40
	30	9.61773	9,95902	9,65870	10,34130		30
	40	9,62049	9,95845	9,66204	10,33796		20
	50	9,62323	9,95786	9,66537	10,33463		10
		272	58	330	330		
25	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133	65	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G	Min
25	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133	65	0
	10	9,62865	9,95668	9,67196	10,32804		50
	20	9,63133	9,95609	9,67524	10,32476		40
	30	9,63398	9,95549	9,67850	10,32150		30
	40	9,63662	9,95488	9,68174	10,31826		20
	50	9,63924	9,95427	9,68497	10,31503		10
		260	61	321	321		
26	0	9,64184	9,95366	9,68818	10,31182	64	0
	10	9,64442	9,95304	9,69138	10,30862		50
	20	9,64698	9,95242	9,69457	10,30543		40
	30	9,64953	9,95179	9,69774	10,30226		30
	40	9,65205	9,95116	9,70089	10,29911		20
	50	9,65456	9,95052	9,70404	10,29596		10
		249	64	313	313		
27	0	9,65705	9,94988	9,70717	10,29283	63	0
	10	9,65952	9,94923	9,71028	10,28972		50
	20	9,66197	9,94858	9,71339	10,28661		40
	30	9,66441	9,94793	9,71648	10,28352		30
	40	9,66682	9,94727	9.71955	10,28045		20
	50	9,66923	9,94660	9,72262	10,27738		10
		238	67	305	305		
28	0	9,67161	9,94593	9,72567	10,27433	62	0
	10	9,67398	9,94526	9,72872	10,27128		50
	20	9,67633	9,94458	9,73175	10,26825		40
	30	9,67866	9,94390	9,73476	10,26524		30
	40	9,68098	9,94321	9,73777	10,26223		20
	50	9,68328	9,94252	9,74077	10,25923		10
		229	70	298	298		
29	0	9,68557	9,94182	9,74375	10,25625	61	0
	10	9,68784	9,94112	9,74673	10,25327		50
	20	9,69010	9,94041	9,74969	10.25031		40
	30	9,69234	9,93970	9,75264	10,24736		30
	40	9,69456	9,93898	9,75558	10,24442		20
	50	9,69677	9,93826	9,75852	10,24148		10
		220	73	292	292		
30	0	9,69897	9,93753	9 76144	10,23856	60	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
30	0	9,69897	9,93753	9,76144	10,23856	60	0
	10	9,70115	9,93680	9,76435	10,23565		50
	20	9,70332	9,93606	9,76726	10,23275		40
	30	9,70547	9,93532	9,77015	10,22985		30
	40	9,70761	9,93457	9,77303	10,22697		20
	50	9,70973	9,93382	9,77591	10,22409		10
		211	75	286	286		
31	0	9,71184	9,93307	9,77877	10,22123	59	0
	10	9,71393	9,93230	9,78163	10,21837		50
	20	9,71602	9,93154	9,78448	10,21552		40
	30	9,71809	9,93077	9,78732	10,21268		30
	40	9,72014	9,92999	9,79015	10,20985		20
	50	9,72218	9,92921	9,79297	10,20703		10
		203	79	282	282		
32	0	9,72421	9,92842	9,79579	10,20421	58	0
	10	9,72622	9,92763	9,79860	10,20140		50
	20	9,72823	9,92683	9.80140	10,19860		40
	30	9,73022	9,92603	9,80419	10,19581		30
	40	9,73219	9,92522	9,80697	10,19303		20
	50	9,73416	9,92441	9,80975	10,19025		10
		195	82	277	277		
33	0	9,73611	9,92359	9,81252	10,18748	57	0
	10	9,73805	9,92277	9,81528	10,18472		50
	20	9,73997	9,92194	9,81803	10,18197		40
	30	9,74189	9.92111	9,82078	10.17922		30
	40	9,74379	9,92027	9.82352	10.17648		20
	50	9,74568	9,91942	9,82626	10,17374		10
		188	85	273	273		
34	0	9,74756	9,91857	9,82899	10,17101	56	0
	10	9,74943	9,91772	9,83171	10.16829		50
	20	9,75128	9,91686	9,83442	10,16558		40
	30	9,75313	9,91599	9,83713	10,16287		30
	40	9,75496	9,91512	9,83984	10.16016		20
	50	9,75678	9,91425	9,84254	10,15746		10
		181	89	269	269		
35	0	9,75859	9,91336	9.84523	10,15477	55	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min
35	0	9,75859	9,91336	9,84523	10,15477	55	0
	10	9,76039	9,91248	9,84791	10,15209		50
	20	9,76218	9,91158	9,85059	10,14941		40
	30	9,76395	9,91069	9,85327	10,14673		30
	40	9,76572	9,90978	9,85594	10,14406		20
	50	9,76747	9,90887	9,85860	10,14140		10
		175	91	266	266		
36	0	9,76922	9,90796	9,86126	10,13874	54	0
	10	9,77095	9,90704	9,86392	10,13608		50
	20	9,77268	9,90611	9,86656	10,13344		40
	30	9,77439	9,90518	9,86921	10,13079		30
	40	9,77609	9,90424	9,87185	10,12815		20
	50	9,77778	9,90330	9,87448	10,12552		10
		168	95	263	263		
37	0	9,77946	9,90235	9,87711	10,12289	53	0
	10	9,78113	9,90139	9,87974	10,12026		50
	20	9,78280	9,90043	9,88236	10,11764		40
	30	9,78445	9,89947	9,88498	10,11502		30
	40	9,78609	9.89849	9,88759	10,11241		20
	50	9,78772	9,89752	9,89020	10,10980		10
		162	99	261	261		
38	0	9,78934	9,89653	9,89281	10,10719	52	0
	10	9,79095	9,89554	9,89541	10,10459		50
	20	9,79256	9,89455	9,89801	10,10199		40
	30	9,79415	9,89354	9,90061	10,09939		30
	40	9,79573	9,89254	9,90320	10,09680		20
	50	9,79731	9,89152	9,90578	10,09422		10
		156	102	259	259		
39	0	9,79887	9,89050	9,90837	10,09163	51	0
	10	9,80043	9,88948	9,91095	10,08905		50
	20	9,80197	9,88844	9,91353	10.08647		40
	30	9,80351	9,88741	9.91610	10,08390		30
	40	9,80504	9,88636	9.91868	10,08132		20
	50	9,80656	9,88531	9,92125	10,07875		10
		151	106	256	256		
40	0	9,80807	9,88425	9,92381	10,07619	50	0
Gr.	Min.					G.	Min
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
G.	Min.					G.	Min.
40	0	9,80807	9,88425	9,92381	10,07619	50	0
	10	9,80957	9,88319	9,92638	10,07362		50
	20	9 81106	9,88212	9,92894	10 07106		40
	30	9,81254	9,88105	9,93150	10,06850		30
	40	9,81402	9,87996	9,93406	10,06594		20
	50	9,81549	9,87887	9,93661	10,06339		10
		145	109	255	255		
41	0	9,81694	9,87778	9,93916	10,06084	49	0
	10	9,81839	9,87668	9,94171	10,05829		50
	20	9 81983	9,87557	9,94426	10,05574		40
	30	9,82126	9,87446	9,94681	10,05319		30
	40	9,82269	9,87334	9,94935	10,05065		20
	50	9,82410	9,87221	9,95190	10,04810		10
		141	114	254	254		
42	0	9,82551	9,87107	9,95444	10,04556	48	0
	10	9,82691	9,86993	9,95698	10,04302		50
	20	9,82830	9,86879	9,95952	10,04048		40
	30	9,82968	9,86763	9,96205	10,03795		30
	40	9,83106	9,86647	9,96459	10,03541		20
	50	9,83242	9,86530	9,96712	10,03288		10
		136	117	254	254		
43	0	9,83378	9,86413	9,96966	10,03034	47	0
	10	9,83513	9,86295	9,97219	10,02781		50
	20	9,83648	9,86176	9,97472	10,02528		40
	30	9,83781	9,86056	9,97725	10 02275		30
	40	9,83914	9,85936	9,97978	10,02022		20
	50	9,84046	9,85815	9,98231	10,01769		10
		131	122	253	253		
44	0	9,84177	9,85693	9,98484	10,01516	46	0
	10	9,84308	9,85571	9,98737	10,01263		50
	20	9,84437	9,85448	9,98989	10,01011		40
	30	9,84566	9,85324	9,99242	10,00758		30
	40	9,84694	9,85200	9,99495	10,00505		20
	50	9,84822	9,85074	9,99747	10,00253		10
		127	125	253	253		
45	0	9,84949	9,84949	10,00000	10,00000	45	0
G.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

III. Kreistafeln.

1) Einrichtung und Gebrauch der Bogentabelle.

Die Bogentabelle gibt in zwei neben einander stehenden Vertikalcolumnen die jedem Grade und jeder Minute entsprechende Länge des Kreisbogens bei dem Halbmesser = Eins. Links steht die Grad- oder Minutenzahl, rechts die Länge des zugehörigen Bogens. Hiernach ist z. B.

arc. 135° oder Bogen von 135°, = 2,3562; ferner

$arc.\, 0^0,56' = 0{,}0163$, ferner $arc.\, 105^0,21' = \left\{\begin{matrix} 1{,}8326 \\ 61 \end{matrix}\right\} = 1{,}8387$;

auch $arc.\, 69^0, 27', 40'' = \left\{\begin{matrix} 1{,}2043 \\ 79 \\ 2 \end{matrix}\right\} = 1{,}2124$. Umgekehrt folgt für den Bogen 2,0071, der Winkel 115°; für den Bogen $x = 3{,}7365$ aber, da

$$\begin{array}{rl} 3{,}7350 & = \text{Bogen von } 214^0, \text{ und} \\ \hline 15 & = \text{Bogen von } 5' \text{ ist,} \end{array}$$

$x^0 = 214^0,5'$; ferner für

den Bogen $x = 0{,}6521$, da

$$\begin{array}{rl} 0{,}6458 & = \text{Bogen von } 37^0, \\ \hline 63 & \\ 61 & = \text{Bogen von } 21', \\ \hline 2 & \\ 2 & = \text{Bogen von } 40'', \end{array}$$

$x^0 = 37^0, 21', 40''$.

2) Einrichtung und Gebrauch der Umfangstabelle.

Diese Tabelle gibt die gegebenen Durchmessern entsprechenden Kreisumfänge an. Ihre Einrichtung stimmt mit der Einrichtung der Potenzentafeln, Wurzeltafeln u. s. w. vollkommen überein. Man findet daher in ihr den einem in 3 Ziffern ausgedrückten Durchmesser entsprechenden Kreisumfang, wenn man die vorderste Ziffer der gegebenen Zahl in der obersten Horizontal- und die hinteren Ziffern in der ersten Vertikalcolumne aufsucht, und nun zusieht, welche Zahl mit jener Ziffer in einer Vertikal- und mit diesen Ziffern in einer Horizontalreihe sich befindet. Es ist hiernach für den Durchmesser $d = 237$ Zoll der Umfang $p = 744{,}56$ Zoll, für $d = 5{,}08$, $p = 15{,}9593$, für $d = 0{,}87$, $p = 2{,}7332$. Umgekehrt entspricht dem Umfange $p = 2114{,}3$ Fuß, der Durchmesser $d = 673$, und $p = 116{,}553$ gibt $d = 27{,}1$. Ferner $d = 59{,}36$ gibt

$p = 186{,}27 + 0{,}6 \,.\, (0{,}611 - 0{,}270) = 186{,}27 + 0{,}205$
$= 186{,}475$ und $p = 1{,}5191$ Fuß entspricht

$$d = 0{,}483 + \frac{1{,}5191 - 1{,}51739}{1{,}52053 - 1{,}51739} \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}483 + \frac{171}{314} \cdot \frac{1}{1000}$$

$= 0{,}483 + 0{,}00054 = 0{,}48354$ Fuß.

3) Einrichtung und Gebrauch der Inhaltstabelle.

Mit Hilfe dieser Tabelle läßt sich aus dem Durchmesser eines Kreises der Inhalt desselben, und aus dem Inhalte der Durchmesser finden. Die Einrichtung dieser Tabelle weicht von der Einrichtung der Umfangstabelle nicht ab. Hiernach ist z. B. für den Durchmesser $d = 431$ Fuß der Inhalt $F = 145897$ Quadr.-Fuß, für $d = 4{,}9$, $F = 18{,}857$; $d = 26{,}73$, $F = 559{,}90 + 0{,}3 \,.\, (56{,}411 - 55{,}990)$ $= 559{,}90 + 1{,}26 = 561{,}16$; umgekehrt dem Inhalte $F = 1690{,}93$ Quadrat-Zoll entspricht der Durchmesser $d = 46{,}4$, ferner $F = 169{,}72$ gibt $d = 14{,}7$, endlich

$$F = 8{,}367 \text{ gibt } d = 3{,}26 + \frac{8{,}3670 - 8{,}3469}{8{,}3982 - 8{,}3469} \cdot \frac{1}{100} = 3{,}264.$$

Beim Setzen des Decimalstriches ist zu berücksichtigen, daß zwei Decimalziffern in F nur einer Decimalziffer in d entsprechen.

4) Einrichtung und Gebrauch der Segmententafel.

Diese Tabelle enthält die Höhen und Inhalte der Segmente, welche gegebenen Centriwinkeln beim Halbmesser 1 entsprechen. Die erste Columne enthält die Gradzahl der Winkel, die zweite die Bogenhöhe und die dritte den Inhalt des entsprechenden Segmentes. Hiernach ist für das dem Centriwinkel 116° entsprechende Segment beim Halbmesser 1, die Bogenhöhe $h = 0{,}4701$ und der Inhalt $F = 0{,}56289$, und daher beim Halbmesser $3\frac{1}{2}$ Fuß, $h = 0{,}4701 \,.\, 3{,}5 = 1{,}645$ Fuß, und $F = 0{,}56289 \,.\, 3{,}5^2$ $= 6{,}895$ Quadr.-Fuß. Umgekehrt, dem Inhalte $F = 0{,}42242$ Quadr.-Fuß, entspricht bei 1 Fuß Halbmesser der Centriwinkel $\varphi = 104^\circ$ und die Bogenhöhe $h = 0{,}3843$ Fuß. Ist ferner beim Halbmesser $r = 5$ Fuß der Inhalt 16,425 Quadrat-Fuß, also für den Halbmesser 1, der Inhalt

$$F = \frac{16{,}425}{5^2} = 0{,}657, \text{ so hat man den Centriwinkel}$$

$$\varphi = 123^\circ + \frac{0{,}65700 - 0{,}65404}{0{,}66759 - 0{,}65404} \,.\, 60' = 139^\circ + \frac{296 \,.\, 60}{355}$$

$= 123^\circ, 50'$, und die Bogenhöhe $= 5 \,.\, (0{,}5228 + \frac{5}{6} \,.\, 0{,}0077)$
$= 5 \,.\, (0{,}5228 + 0{,}0064) = 2{,}646$ Fuß.

1) Bogentabelle.

Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.
1	0,0175	31	0,5411	61	1,0647	91	1.5882
2	0,0349	32	0,5585	62	1,0821	92	1,6057
3	0.0524	33	0,5760	63	1,0996	93	1,6232
4	0,0698	34	0,5934	64	1,1170	94	1,6406
5	0,0873	35	0,6109	65	1,1345	95	1,6581
6	0,1047	36	0,6283	66	1.1519	96	1,6755
7	0,1222	37	0,6458	67	1,1694	97	1,6930
8	0,1396	38	0,6632	68	1,1868	98	1,7104
9	0,1571	39	0,6807	69	1,2043	99	1,7279
10	0,1745	40	0,6981	70	1,2217	100	1,7453
11	0,1920	41	0,7156	71	1,2392	101	1,7628
12	0,2094	42	0,7330	72	1,2566	102	1,7802
13	0,2269	43	0,7505	73	1,2741	103	1,7977
14	0,2443	44	0,7679	74	1,2915	104	1,8151
15	0,2618	45	0.7854	75	1,3090	105	1,8326
16	0,2793	46	0,8029	76	1,3265	106	1,8500
17	0,2967	47	0,8203	77	1,3439	107	1,8675
18	0,3142	48	0 8378	78	1,3614	108	1.8850
19	0,3316	49	0,8552	79	1,3788	109	1,9024
20	0,3491	50	0,8727	80	1,3963	110	1,9199
21	0,3665	51	0,8901	81	1,4137	111	1.9373
22	0.3840	52	0,9076	82	1,4312	112	1,9548
23	0,4014	53	0.9250	83	1,4486	113	1,9722
24	0,4189	54	0.9425	84	1,4661	114	1.9897
25	0,4363	55	0,9599	85	1,4835	115	2,0071
26	0,4538	56	0,9774	86	1,5010	116	2,0246
27	0,4712	57	0.9948	87	1,5184	117	2 0420
28	0,4887	58	1,0123	88	1,5359	118	2,0595
29	0,5061	59	1,0297	89	1,5533	119	2 0769
30	0,5236	60	1,0472	90	1,5708	120	2,0944

1) Bogentabelle.

Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.
121	2,1118	151	2,6354	181	3,1590	211	3,6826
122	2,1293	152	2,6529	182	3,1765	212	3,7001
123	2,1468	153	2,6704	183	3,1940	213	3,7176
124	2,1642	154	2,6878	184	3,2114	214	3,7350
125	2,1817	155	2,7053	185	3,2289	215	3,7525
126	2,1991	156	2,7227	186	3,2463	216	3,7699
127	2,2166	157	2,7402	187	3,2638	217	3,7874
128	2,2340	158	2,7576	188	3,2812	218	3,8048
129	2,2515	159	2,7751	189	3,2987	219	3,8223
130	2,2689	160	2,7925	190	3,3161	220	3,8397
131	2.2864	161	2,8100	191	3,3336	221	3,8572
132	2,3038	162	2,8274	192	3,3510	222	3,8746
133	2,3213	163	2,8449	193	3,3685	223	3,8921
134	2,3387	164	2,8623	194	3,3859	224	3.9095
135	2,3562	165	2,8798	195	3,4034	225	3,9270
136	2,3736	166	2,8972	196	3,4208	226	3,9444
137	2,3911	167	2,9147	197	3,4383	227	3,9619
138	2,4086	168	2.9322	198	3,4558	228	3,9794
139	2,4260	169	2,9496	199	3,4732	229	3,9968
140	2,4435	170	2,9671	200	3,4907	230	4,0143
141	2,4609	171	2.9845	201	3,5081	231	4,0317
142	2,4784	172	3,0020	202	3,5256	232	4,0492
143	2,4958	173	3,0194	203	3,5430	233	4,0666
144	2,5133	174	3,0369	204	3,5605	234	4,0841
145	2,5307	175	3,0543	205	3,5779	235	4,1015
146	2,5482	176	3,0718	206	3,5954	236	4,1190
147	2,5656	177	3,0892	207	3,6128	237	4,1364
148	2,5831	178	3,1067	208	3,6303	238	4,1539
149	2,6005	179	3,1241	209	3.6477	239	4,1713
150	2,6180	180	3,1416	210	3,6652	240	4,1888

1) Bogentabelle.

Grad.	Bogen.	Grad.	Bogen.	Grad.	Bogen.
241	4,2062	271	4,7298	301	5,2534
242	4,2237	272	4,7473	302	5,2709
243	4,2412	273	4,7647	303	5,2883
244	4,2586	274	4,7822	304	5,3058
245	4,2761	275	4,7997	305	5,3233
246	4,2935	276	4,8171	306	5,3407
247	4,3110	277	4,8346	307	5,3582
248	4,3284	278	4,8520	308	5,3756
249	4,3459	279	4,8695	309	5,3931
250	4,3633	280	4,8869	310	5,4105
251	4,3808	281	4,9044	311	5,4280
252	4,3982	282	4,9218	312	5,4454
253	4,4157	283	4,9393	313	5,4629
254	4,4331	284	4,9567	314	5,4803
255	4,4506	285	4,9742	315	5,4978
256	4,4680	286	4,9916	316	5,5152
257	4,4855	287	5,0091	317	5,5327
258	4,5029	288	5,0265	318	5,5501
259	4,5204	289	5,0440	319	5,5676
260	4,5379	290	5,0615	320	5,5851
261	4,5553	291	5,0789	321	5,6025
262	4,5728	292	5,0964	322	5,6200
263	4,5902	293	5,1138	323	5,6374
264	4,6077	294	5,1313	324	5,6549
265	4,6251	295	5,1487	325	5,6723
266	4,6426	296	5,1662	326	5,6898
267	4,6600	297	5,1836	327	5,7072
268	4,6775	298	5,2011	328	5,7247
269	4,6949	299	5,2185	329	5,7421
270	4,7124	300	5,2360	330	5,7596

1) Bogentabelle.

Grad.	Bogen.	Minuten.			
		Min.	Bogen.	Min.	Bogen.
331	5,7770	1	0,0003	31	0,0090
332	5,7945	2	0,0006	32	0,0093
333	5,8119	3	0,0009	33	0,0096
334	5,8294	4	0,0012	34	0,0099
335	5,8469	5	0,0015	35	0,0102
336	5,8643	6	0,0017	36	0,0105
337	5,8818	7	0,0020	37	0,0108
338	5,8992	8	0,0023	38	0,0111
339	5,9167	9	0,0026	39	0,0113
340	5,9341	10	0,0029	40	0,0116
341	5,9516	11	0,0032	41	0,0119
342	5,9690	12	0,0035	42	0,0122
343	5,9865	13	0,0038	43	0,0125
344	6,0039	14	0,0041	44	0,0128
345	6,0214	15	0,0044	45	0,0131
346	6,0388	16	0,0047	46	0,0134
347	6,0563	17	0,0049	47	0,0137
348	6,0737	18	0,0052	48	0,0140
349	6,0912	19	0,0055	49	0,0143
350	6,1087	20	0,0058	50	0,0145
351	6,1261	21	0,0061	51	0,0148
352	6,1436	22	0,0064	52	0,0151
353	6,1610	23	0,0067	53	0,0154
354	6,1785	24	0,0070	54	0,0157
355	6,1959	25	0,0073	55	0,0160
356	6,2134	26	0,0076	56	0,0163
357	6,2308	27	0,0079	57	0,0166
358	6,2483	28	0,0081	58	0,0169
359	6,2657	29	0,0084	59	0,0172
360	6,2832	30	0,0087	60	0,0175

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	0	100	200	300	400
0	0,00000	314,16	628,32	942,48	1256,64
1	3,1416	317,30	631,46	945,62	1259,78
2	6,2832	320,44	634,60	948,76	1262,92
3	9,4248	323,58	637,74	951,90	1266,06
4	12,566	326,73	640,89	955,04	1269,20
5	15,708	329,87	644,03	958,19	1272,35
6	18,850	333,01	647,17	961,33	1275,49
7	21,991	336,15	650,31	964,47	1278,63
8	25,133	339,29	653,45	967,61	1281,77
9	28,274	342,43	656,59	970,75	1284,91
10	31,416	345,58	659,73	973,89	1288,05
11	34,558	348,72	662,88	977,04	1291,19
12	37,699	351,86	666,02	980,18	1294,34
13	40,841	355,00	669,16	983,32	1297,48
14	43,982	358,14	672,30	986,46	1300,62
15	47,124	361,28	675,44	989,60	1303,76
16	50,265	364,42	678,58	992,74	1306,91
17	53,407	367,57	681,73	995,88	1310,05
18	56,549	370,71	684,87	999,03	1313,19
19	59,690	373,85	688,01	1002,17	1316,33
20	62,832	376,99	691,15	1005,31	1319,47
21	65,973	380,13	694,29	1008,45	1322,61
22	69,115	383,27	697,43	1011,59	1325,75
23	72,257	386,42	700,58	1014,73	1328,89
24	75,398	389,56	703,72	1017,88	1332,04
25	78,540	392,70	706,86	1021,02	1335,18
26	81,681	395,84	710,00	1024,16	1338,32
27	84,823	398,98	713,14	1027,30	1341,46
28	87,965	402,12	716,28	1030,44	1344,60
29	91,106	405,27	719,42	1033,58	1347,74

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	500	600	700	800	900
0	1570,80	1884,96	2199,11	2513,27	2827,43
1	1573,94	1888,10	2202,26	2516,42	2830,58
2	1577,08	1891,24	2205,40	2519,56	2833,72
3	1580,22	1894,38	2208,54	2522,70	2836,86
4	1583,36	1897,52	2211,68	2525,84	2840,00
5	1586,50	1900,66	2214,82	2528,98	2843,14
6	1589,65	1903,81	2217,96	2532,12	2846,28
7	1592,79	1906,95	2221,11	2535,27	2849,42
8	1595,93	1910,09	2224,25	2538,41	2852,57
9	1599,07	1913,23	2227,39	2541,55	2855,71
10	1602,21	1916,37	2230,53	2544,69	2858,85
11	1605,35	1919,51	2233,67	2547,83	2861,99
12	1608,50	1922,65	2236,81	2550,97	2865,13
13	1611,64	1925,80	2239,96	2554,11	2868,27
14	1614,78	1928,94	2243,10	2557,26	2871,42
15	1617,92	1932,08	2246,24	2560,40	2874,56
16	1621,06	1935,22	2249,38	2563,54	2877,70
17	1624,20	1938,36	2252,52	2566,68	2880,84
18	1627,35	1941,50	2255,66	2569,82	2883,98
19	1630,49	1944,65	2258,81	2572,96	2887,12
20	1633,63	1947,79	2261,95	2576,11	2890,27
21	1636,77	1950,93	2265,09	2579,25	2893,41
22	1639,91	1954,07	2268,23	2582,39	2896,55
23	1643,05	1957,21	2271,37	2585,53	2899,69
24	1646,20	1960,35	2274,51	2588,67	2902,83
25	1649,34	1963,50	2277,65	2591,81	2905,97
26	1652,48	1966,64	2280,80	2594,96	2909,11
27	1655,62	1969,78	2283,94	2598,10	2912,26
28	1658,76	1972,92	2287,08	2601,24	2915,40
29	1661,90	1976,06	2290,22	2604,38	2918,54

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	0	100	200	300	400
30	94,248	408,41	722,57	1036,73	1350,89
31	97,389	411,55	725,71	1039,87	1354,03
32	100,53	414,69	728,85	1043,01	1357,17
33	103,67	417,83	731,99	1046,15	1360,31
34	106,81	420,97	735,13	1049,29	1363,45
35	109,96	424,12	738,27	1052,43	1366,59
36	113,10	427,26	741,42	1055,58	1369,73
37	116,24	430,40	744,56	1058,72	1372,88
38	119,38	433,54	747,70	1061,86	1376,02
39	122,52	436,68	750,84	1065,00	1379,16
40	125,66	439,82	753,98	1068,14	1382,30
41	128,81	442,96	757,12	1071,28	1385,44
42	131,95	446,11	760,27	1074,42	1388,58
43	135,09	449,25	763,41	1077,57	1391,73
44	138,23	452,39	766,55	1080,71	1394,87
45	141,37	455,53	769,69	1083,85	1398,01
46	144,51	458,67	772,83	1086,99	1401,15
47	147,65	461,81	775,97	1090,13	1404,29
48	150,80	464,96	779,12	1093,27	1407,43
49	153,94	468,10	782,26	1096,42	1410,58
50	157,08	471,24	785,40	1099,56	1413,72
51	160,22	474,38	788,54	1102,70	1416,86
52	163,36	477,52	791,68	1105,84	1420,00
53	166,50	480,66	794,82	1108,98	1423,14
54	169,65	483,81	797,96	1112,12	1426,28
55	172,79	486.95	801,11	1115,27	1429,42
56	175,93	490.09	804,25	1118,41	1432,57
57	179,07	493,23	807,39	1121,55	1435,71
58	182,21	496,37	810,53	1124,69	1438.85
59	185,35	499,51	813,67	1127,83	1441.99

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	500	600	700	800	900
30	1665,04	1979,20	2293,36	2607,52	2921,68
31	1668,19	1982,35	2296,50	2610,66	2924,82
32	1671,33	1985,49	2299,65	2613,81	2927,96
33	1674,47	1988,63	2302,79	2616,95	2931,11
34	1677,61	1991,77	2305,93	2620,09	2934,25
35	1680,75	1994,91	2309,07	2623,23	2937,39
36	1683,89	1998,05	2312,21	2626,37	2940,53
37	1687,04	2001,19	2315,35	2629,51	2943,67
38	1690,18	2004,34	2318,50	2632,65	2946,81
39	1693,32	2007,48	2321,64	2635,80	2949,96
40	1696,46	2010,62	2324,78	2638,94	2953,10
41	1699,60	2013,76	2327,92	2642,08	2956,24
42	1702,74	2016,90	2331,06	2645,22	2959,38
43	1705,88	2020,04	2334,20	2648,36	2962,52
44	1709,03	2023,19	2337,34	2651,51	2965,66
45	1712,17	2026,33	2340,49	2654,65	2968,81
46	1715,31	2029,47	2343,63	2657,79	2971,95
47	1718,45	2032,61	2346,77	2660,93	2975,09
48	1721,59	2035,75	2349,91	2664,07	2978,23
49	1724,73	2038,89	2353,05	2667,21	2981,37
50	1727,88	2042,04	2356,19	2670,35	2984,51
51	1731,02	2045,18	2359,34	2673,50	2987,65
52	1734,16	2048,32	2362,48	2676,64	2990,80
53	1737,30	2051,46	2365,62	2679,78	2993,94
54	1740,44	2054,60	2368,76	2682,92	2997,08
55	1743,58	2057,74	2371,90	2686,06	3000,22
56	1746,73	2060,88	2375,04	2689,20	3003,36
57	1749,87	2064,03	2378,19	2692,34	3006,50
58	1753,01	2067,17	2381,33	2695,49	3009,65
59	1756,15	2070,31	2384,47	2698,63	3012,79

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	0	100	200	300	400
60	188,50	502,65	816,81	1130,97	1445,13
61	191,64	505,80	819,96	1134,12	1448,27
62	194,78	508,94	823,10	1137,26	1451,42
63	197,92	512,08	826,24	1140,40	1454,56
64	201,06	515,22	829,38	1143,54	1457,70
65	204,20	518,36	832,52	1146,68	1460,84
66	207,35	521,50	835,66	1149,82	1463,98
67	210,49	524,65	838,81	1152,97	1467,12
68	213,63	527,79	841,95	1156,11	1470,27
69	216,77	530,93	845,09	1159,25	1473,41
70	219,91	534,07	848,23	1162,39	1476,55
71	223,05	537,21	851,37	1165,53	1479,69
72	226,19	540,35	854,51	1168,67	1482,83
73	229,34	543,50	857,66	1171,81	1485,97
74	232,48	546,64	860,80	1174,96	1489,12
75	235,62	549,78	863,94	1178,10	1492,26
76	238,76	552,92	867,08	1181,24	1495,40
77	241,90	556,06	870,22	1184,38	1498,54
78	245,04	559,20	873,36	1187,52	1501,68
79	248,19	562,35	876,50	1190,66	1504,82
80	251,33	565,49	879,65	1193,81	1507,96
81	254,47	568,63	882,79	1196,95	1511,11
82	257,61	571,77	885,93	1200,09	1514,25
83	260,75	574,91	889,07	1203,23	1517,39
84	263,89	578,05	892,21	1206,37	1520,53
85	267,04	581,19	895,35	1209,51	1523,67
86	270,18	584,34	898,50	1212,66	1526,81
87	273,32	587,48	901,64	1215,80	1529,96
88	276,46	590,62	904,78	1218,94	1533,10
89	279,60	593,76	907,92	1222,08	1536,24

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	500	600	700	800	900
60	1759,29	2073,45	2387,61	2701,77	3015,93
61	1762,43	2076,59	2390,75	2704,91	3019,07
62	1765,58	2079,73	2393,89	2708,05	3022,21
63	1768,72	2082,88	2397,04	2711,19	3025,35
64	1771,86	2086,02	2400,18	2714,34	3028,50
65	1775,00	2089,16	2403,32	2717,48	3031,64
66	1778,14	2092,30	2406,46	2720,62	3034,78
67	1781,28	2095,44	2409,60	2723,76	3037,92
68	1784,42	2098,58	2412,74	2726,90	3041,06
69	1787,57	2101,73	2415,88	2730,04	3044,20
70	1790,71	2104,87	2419,03	2733,19	3047,34
71	1793,85	2108,01	2422,17	2736,33	3050,49
72	1796,99	2111,15	2425,31	2739,47	3053,63
73	1800,13	2114,29	2428,45	2742,61	3056,77
74	1803,27	2117,43	2431,59	2745,75	3059,91
75	1806,42	2120,58	2434,73	2748,89	3063,05
76	1809,56	2123,72	2437,88	2752,04	3066,19
77	1812,70	2126,86	2441,02	2755,18	3069,34
78	1815,84	2130,00	2444,16	2758,32	3072,48
79	1818,98	2133,14	2447,30	2761,46	3075,62
80	1822,12	2136,28	2450,44	2764,60	3078,76
81	1825,27	2139,42	2453,58	2767,74	3081,90
82	1828,41	2142,57	2456,73	2770,88	3085,04
83	1831,55	2145,71	2459,87	2774,03	3088,19
84	1834,69	2148,85	2463,01	2777,17	3091,33
85	1837,83	2151,99	2466,15	2780,31	3094,47
86	1840,97	2155,13	2469,29	2783,45	3097,61
87	1844,11	2158,27	2472,43	2786,59	3100,75
88	1847,26	2161,42	2475,58	2789,73	3103,89
89	1850,40	2164,56	2478,72	2792,88	3107,04

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	0	100	200	300	400
90	282,74	596,90	911,06	1225,22	1539,38
91	285,88	600,04	914,20	1228,36	1542,52
92	289,03	603,19	917,35	1231,50	1545,66
93	292,17	606,33	920,49	1234,65	1548,81
94	295,31	609,47	923,63	1237,79	1551,95
95	298,45	612,61	926,77	1240,93	1555,09
96	301,59	615,75	929,91	1244,07	1558,23
97	304,73	618,89	933,05	1247,21	1561,37
98	307,88	622,04	936,19	1250,35	1564,51
99	311,02	625,18	939,34	1253,50	1567,65
100	314,16	628,32	942,48	1256,64	1570,80

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser	Inhalt.				
	0	100	200	300	400
0	0,00000	7854,0	31416	70686	125664
1	0,78540	8011,9	31731	71158	126293
2	3,1416	8171,3	32047	71631	126923
3	7,0686	8332,3	32365	72107	127556
4	12,566	8494,9	32685	72583	128190
5	19,635	8659,0	33006	73062	128825
6	28,274	8824,7	33329	73542	129462
7	38,485	8992,0	33654	74023	130100
8	50,265	9160,9	33979	74506	130741
9	63,617	9331,3	34307	74991	131382

2) Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	500	600	700	800	900
90	1853,54	2167,70	2481,86	2796,02	3110,18
91	1856,68	2170,84	2485,00	2799,16	3113,32
92	1859,82	2173,98	2488,14	2802,30	3116,46
93	1862,69	2177,12	2491,28	2805,44	3119,60
94	1866,11	2180,27	2494,42	2808,58	3122,74
95	1869,25	2183,41	2497,57	2811,73	3125,88
96	1872,39	2186,55	2500,71	2814 87	3129,03
97	1875,53	2189,69	2503,85	2818,01	3132,17
98	1878,67	2192,83	2506,99	2821,15	3135,31
99	1881,81	2195,97	2510,13	2824,29	3138,45
100	1884,96	2199,11	2513,27	2827,43	3141,59

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser	Inhalt.				
	500	600	700	800	900
0	196350	282743	384845	502655	636173
1	197136	283687	385945	503912	637587
2	197923	284631	387047	505171	639003
3	198713	285578	388151	506432	640421
4	199504	286526	389256	507694	641840
5	200296	287475	390363	508958	643261
6	201090	288426	391471	510223	644683
7	201886	289379	392580	511490	646107
8	202683	290333	393692	512758	647533
9	203482	291289	394805	514028	648960

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	0	100	200	300	400
10	78,540	9503,3	34636	75477	132025
11	95,033	9676,9	34967	75964	132670
12	113,10	9852,0	35299	76454	133317
13	132,73	10029	35633	76945	133965
14	153,94	10207	35968	77437	134614
15	176,71	10387	36305	77931	135265
16	201,06	10568	36644	78427	135918
17	226,98	10751	36984	78924	136572
18	254,47	10936	37325	79423	137228
19	283,53	11122	37668	79923	137885
20	314,16	11310	38013	80425	138544
21	346,36	11499	38360	80928	139205
22	380,13	11690	38708	81433	139867
23	415,48	11882	39057	81940	140531
24	452,39	12076	39408	82448	141196
25	490,87	12272	39761	82958	141863
26	530,93	12469	40115	83469	142531
27	572,56	12668	40471	83982	143201
28	615,75	12868	40828	84496	143872
29	660,52	13070	41187	85012	144545
30	706,86	13273	41548	85530	145220
31	754,77	13478	41910	86049	145896
32	804,25	13685	42273	86570	146574
33	855,30	13893	42638	87092	147254
34	907,92	14103	43005	87616	147934
35	962,11	14314	43374	88141	148617
36	1017,88	14527	43744	88668	149301
37	1075,21	14741	44115	89197	149987
38	1134,11	14957	44488	89727	150674
39	1194,59	15175	44863	90259	151363

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	500	600	700	800	900
10	204282	292247	395919	515300	650388
11	205084	293206	397035	516573	651818
12	205887	294166	398153	517848	653250
13	206692	295128	399272	519124	654684
14	207499	296092	400393	520402	656118
15	208307	297057	401515	521681	657555
16	209117	298024	402639	522962	658993
17	209928	298992	403765	524245	660433
18	210741	299962	404892	525529	661874
19	211556	300934	406020	526814	663317
20	212372	301907	407150	528102	664761
21	213189	302882	408282	529391	666207
22	214008	303858	409416	530681	667654
23	214829	304836	410550	531973	669103
24	215651	305815	411687	533267	670554
25	216475	306796	412825	534562	672006
26	217301	307779	413965	535858	673460
27	218128	308763	415106	537157	674915
28	218956	309748	416248	538456	676372
29	219787	310736	417393	539758	677831
30	220618	311725	418539	541061	679291
31	221452	312715	419686	542365	680753
32	222287	313707	420835	543671	682216
33	223123	314700	421986	544979	683680
34	223961	315696	423139	546288	685147
35	224801	316692	424293	547599	686615
36	225642	317690	425448	548912	688084
37	226484	318690	426604	550226	689555
38	227329	319692	427762	551541	691028
39	228175	320695	428922	552858	692502

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	0	100	200	300	400
40	1256,6	15394	45239	90792	152053
41	1320,3	15615	45617	91327	152745
42	1385,4	15837	45996	91863	153439
43	1452,2	16061	46377	92401	154134
44	1520,5	16286	46759	92941	154830
45	1590,4	16513	47144	93482	155528
46	1661,9	16742	47529	94025	156228
47	1734,9	16972	47916	94569	156930
48	1809,6	17203	48305	95115	157633
49	1885,7	17437	48695	95662	158337
50	1963,5	17671	49087	96211	159043
51	2042,8	17908	49481	96762	159751
52	2123,7	18146	49876	97314	160460
53	2206,2	18385	50273	97868	161171
54	2290,2	18627	50671	98423	161883
55	2375,8	18869	51071	98980	162597
56	2463,0	19113	51472	99538	163313
57	2551,8	19359	51875	100098	164030
58	2642,1	19607	52279	100660	164748
59	2734,0	19856	52685	101223	165468
60	2827,4	20106	53093	101788	166190
61	2922,5	20358	53502	102354	166914
62	3019,1	20612	53913	102922	167639
63	3117,2	20867	54325	103491	168365
64	3217,0	21124	54739	104062	169093
65	3318,3	21382	55155	104635	169823
66	3421,2	21642	55572	105209	170554
67	3525,7	21904	55990	105785	171287
68	3631,7	22167	56410	106362	172021
69	3739,3	22432	56832	106941	172757

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	500	600	700	800	900
40	229022	321699	430084	554177	693978
41	229871	322705	431247	555497	695455
42	230722	323713	432412	556819	696934
43	231574	324722	433578	558142	698415
44	232428	325733	434746	559467	699897
45	233283	326745	435916	560794	701380
46	234140	327759	437087	562122	702865
47	234998	328775	438259	563452	704352
48	235858	329792	439433	564783	705840
49	236720	330810	440609	566116	707330
50	237583	331831	441786	567450	708822
51	238448	332853	442965	568786	710315
52	239314	333876	444146	570124	711810
53	240182	334901	445328	571463	713307
54	241051	335927	446511	572803	714803
55	241922	336955	447697	574146	716303
56	242795	337985	448883	575490	717804
57	243669	339016	450072	576835	719306
58	244545	340049	451262	578182	720810
59	245422	341084	452453	579530	722316
60	246301	342119	453646	580880	723823
61	247181	343157	454841	582232	725332
62	248063	344196	456037	583585	726842
63	248947	345237	457234	584940	728354
64	249832	346279	458434	586297	729867
65	250719	347323	459635	587655	731382
66	251607	348368	460837	589014	732899
67	252497	349415	462041	590375	734417
68	253388	350464	463247	591738	735937
69	254281	351514	464454	593102	737458

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	0	100	200	300	400
70	3848,5	22698	57256	107521	173494
71	3959,2	22966	57680	108103	174234
72	4071,5	23235	58107	108687	174974
73	4185,4	23506	58535	109272	175716
74	4300,8	23779	58965	109858	176460
75	4417,9	24053	59396	110447	177205
76	4536,5	24328	59828	111036	177952
77	4656,6	24606	60263	111628	178701
78	4778,4	24885	60699	112221	179451
79	4901,7	25165	61136	112815	180203
80	5026,6	25447	61575	113411	180956
81	5153,0	25730	62016	114009	181711
82	5281,0	26016	62458	114608	182467
83	5410,6	26302	62902	115209	183225
84	5541,8	26590	63347	115812	183984
85	5674,5	26880	63794	116416	184745
86	5808,8	27172	64242	117021	185508
87	5944,7	27465	64692	117628	186272
88	6082,1	27759	65144	118237	187038
89	6221,1	28055	65597	118847	187805
90	6361,7	28353	66052	119459	188574
91	6503,9	28652	66508	120072	189345
92	6647,6	28953	66966	120687	190117
93	6792,9	29255	67426	121304	190890
94	6939,8	29559	67887	121922	191665
95	7088,2	29865	68349	122542	192442
96	7238,2	30172	68813	123163	193221
97	7389,8	30481	69279	123786	194000
98	7543,0	30791	69747	124410	194782
99	7697,7	31103	70215	125036	195565
100	785 ,0	31416	70686	125664	196350

3) Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	500	600	700	800	900
70	255176	352565	465663	594468	738981
71	256072	353618	466873	595835	740506
72	256970	354673	468085	597204	742032
73	257869	355730	469298	598575	743559
74	258770	356788	470513	599947	745088
75	259672	357847	471730	601320	746619
76	260576	358908	472948	602696	748151
77	261482	359971	474168	604073	749685
78	262389	361035	475389	605451	751221
79	263298	362101	476612	606831	752758
80	264208	363168	477836	608212	754296
81	265120	364237	479062	609595	755837
82	266033	365308	480290	610980	757378
83	266948	366380	481519	612366	758922
84	267865	367453	482750	613754	760466
85	268783	368528	483982	615143	762013
86	269702	369605	485216	616534	763561
87	270624	370684	486451	617927	765111
88	271547	371764	487688	619321	766662
89	272471	372845	488927	620717	768214
90	273397	373928	490167	622114	769769
91	274325	375013	491409	623513	771325
92	275254	376099	492652	624913	772882
93	276184	377187	493897	626315	774441
94	277117	378276	495143	627718	776002
95	278052	379367	496391	629124	777564
96	278986	380459	497641	630530	779128
97	279923	381554	498892	631938	780693
98	280862	382649	500145	633348	782260
99	281802	383746	501399	634760	783828
100	282743	384845	502655	636173	785398

4) Kreissegmentetabelle.

Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1-\cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi-\sin.\varphi}{2}$	Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1-\cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi-\sin.\varphi}{2}$
1	0,0000	0,00000	33	0,0412	0,01566
2	0,0002	0,00000	34	0,0437	0,01711
3	0,0003	0,00001	35	0.0463	0,01864
4	0,0006	0,00003	36	0,0489	0,02027
5	0,0010	0,00006	37	0,0517	0,02198
6	0,0014	0,00010	38	0,0545	0,02378
7	0,0019	0,00015	39	0,0574	0,02568
8	0,0024	0,00023	40	0,0603	0,02767
9	0,0031	0,00032	41	0,0633	0,02976
10	0 0038	0,00044	42	0,0664	0,03195
11	0,0046	0,00059	43	0,0696	0,03425
12	0,0055	0,00076	44	0,0728	0,03664
13	0,0064	0,00097	45	0,0761	0,03915
14	0,0075	0,00121	46	0,0795	0,04176
15	0,0086	0,00149	47	0,0829	0,04448
16	0,0097	0,00181	48	0.0865	0.04731
17	0,0110	0,00217	49	0,0900	0,05025
18	0,0123	0,00257	50	0,0937	0,05331
19	0,0137	0,00302	51	0,0974	0 05649
20	0,0152	0,00352	52	0,1012	0,05978
21	0,0167	0,00408	53	0,1051	0 06319
22	0,0184	0,00468	54	0,1090	0,06673
23	0,0201	0,00535	55	0,1130	0,07039
24	0,0219	0,00607	56	0,1171	0,07417
25	0,0237	0,00686	57	0,1212	0,07808
26	0,0256	0,00771	58	0,1254	0,08212
27	0,0276	0,00862	59	0,1296	0,08629
28	0,0297	0,00961	60	0,1340	0,09059
29	0,0319	0,01067	61	0,1384	0,09502
30	0,0341	0,01180	62	0,1428	0,09958
31	0,0364	0,01301	63	0,1474	0,10428
32	0,0387	0,01429	64	0,1520	0,10911

4) Kreissegmentetabelle.

Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1-\cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi-\sin.\varphi}{2}$	Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1-\cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi-\sin.\varphi}{2}$
65	0,1566	0,11408	97	0,3374	0,35021
66	0,1613	0,11919	98	0,3439	0,36008
67	0,1661	0,12443	99	0,3506	0,37009
68	0,1710	0,12982	100	0,3572	0,38026
69	0,1759	0,13535	101	0,3639	0,39058
70	0,1808	0,14102	102	0,3707	0,40104
71	0,1859	0,14683	103	0,3775	0,41166
72	0,1910	0,15279	104	0,3843	0,42242
73	0,1961	0,15389	105	0 3912	0 43334
74	0,2014	0,16514	106	0,3982	0.44439
75	0,2066	0,17154	107	0,4052	0,45560
76	0,2120	0 17808	108	0,4122	0,46695
77	0,2174	0 18477	109	0,4193	0,47844
78	0,2229	0,19160	110	0,4264	0,49008
79	0,2284	0,19859	111	0,4336	0,50187
80	0,2340	0,20573	112	0,4408	0,51379
81	0,2396	0,21301	113	0,4481	0,52586
82	0,2453	0,22045	114	0,4554	0,53807
83	0,2510	0,22804	115	0,4627	0,55041
84	0,2569	0,23578	116	0,4701	0,56289
85	0,2627	0,24367	117	0,4775	0,57551
86	0,2686	0,25171	118	0,4850	0,58827
87	0,2746	0,25990	119	0,4925	0,60116
88	0,2807	0,26825	120	0,5000	0,61418
89	0,2867	0,27675	121	0,5076	0,62734
90	0,2929	0,28540	122	0,5152	0,64063
91	0,2991	0,29420	123	0,5228	0,65404
92	0,3053	0,30316	124	0,5305	0,66759
93	0,3116	0,31226	125	0,5383	0,68125
94	0,3180	0,32152	126	0,5460	0,69505
95	0,3244	0,33093	127	0,5538	0,70897
96	0,3309	0,34050	128	0,5616	0,72301

4) Kreissegmentetabelle.

Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1-\cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi-\sin.\varphi}{2}$	Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1-\cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi-\sin.\varphi}{2}$
129	0,5695	0,73716	155	0,7836	1,14132
130	0,5774	0,75144	156	0.7921	1,15799
131	0,5853	0,76584	157	0,8006	1,17472
132	0,5933	0,78034	158	0.8092	1,19151
133	0,6013	0,79497	159	0,8178	1,20835
134	0,6093	0,80970	160	0,8264	1,22525
135	0,6173	0,82454	161	0,8350	1,24221
136	0,6254	0,83949	162	0,8436	1,25921
137	0,6335	0,85455	163	0,8522	1,27626
138	0,6416	0,86971	164	0,8608	1,29335
139	0,6498	0,88497	165	0,8695	1,31049
140	0,6580	0,90034	166	0,8781	1,32766
141	0,6662	0,91580	167	0,8868	1,34487
142	0,6744	0,93135	168	0,8955	1,36212
143	0,6827	0,94700	169	0,9042	1.37940
144	0,6910	0,96274	170	0,9128	1,39671
145	0,6993	0,97858	171	0,9215	1,41404
146	0,7076	0,99449	172	0,9302	1,43140
147	0,7160	1,01050	173	0,9390	1,44878
148	0,7244	1,02658	174	0,9477	1,46617
149	0,7328	1,04275	175	0,9564	1,48359
150	0,7412	1.05900	176	0,9651	1,50101
151	0,7496	1,07532	177	0,9738	1,51845
152	0,7581	1,09171	178	0,9825	1,53589
153	0,7666	1,10818	179	0,9913	1,55334
154	0,7750	1,12472	180	1,0000	1,57080

Zweiter Abschnitt.

Formeln und Regeln der theoretischen Geometrie.

Erstes Kapitel.

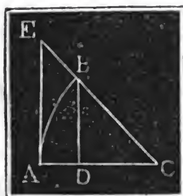
Planimetrie.

---

§. 1. Trigonometrische Linien einfacher Winkel.

In Fig. 1 sei $CA = CB = 1$, der Winkel $ACB = \alpha$ und der Winkel $CBD = CEA = \beta$. Dann hat man

Fig. 1.



$$BD = sin.\ \alpha = cos.\ \beta,$$
$$CD = cos.\ \alpha = sin.\ \beta,$$
$$AE = tang.\ \alpha = cotang.\ \beta;$$

überdies noch

$$CE = sec.\alpha = cosec.\beta = \frac{1}{cos.\alpha} = \frac{1}{sin.\beta}$$

und

$$AD = sin.vers.\alpha = cos.vers.\beta = 1 - cos.\alpha$$
$$= 1 - sin.\beta.$$

Es ist $sin.0^0 = 0, cos.\ 0^0 = 1, tang.\ 0^0 = 0,\ cotang.\ 0^0 = \infty;$

$sin.\ 30^0 = \frac{1}{2},\ cos.\ 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ tang.\ 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3},$
$cotang.\ 30^0 = \sqrt{3};$

$sin.\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ cos.\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ tang.\ 45^0 = 1,$
$cotang.\ 45^0 = 1;$

$sin.\ 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ cos.\ 60^0 = \frac{1}{2},\ tang.\ 60^0 = \sqrt{3},$
$cotang.\ 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3};$

$sin.\ 90^0 = 1,\ cos.\ 90^0 = 0,\ tang.\ 90^0 = \infty,\ cotang.\ 90^0 = 0.$

Folgende Formeln drücken die Abhängigkeiten der trigonometrischen Linien unter einander aus:

I. $(sin.\alpha)^2 + (cos.\alpha)^2 = 1$, weshalb folgt: $sin.\alpha = \sqrt{1-(cos.\alpha)^2}$,

und $cos.\ \alpha = \sqrt{1-(sin.\alpha)^2}$.

II. $tang.\alpha . colang.\alpha = 1$, weshalb sich $tang.\alpha = \frac{1}{cotang.\ \alpha}$

und $cotang.\ \alpha = \frac{1}{tang.\ \alpha}$ herausstellt.

III. $tang.\ \alpha = \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha}$ und $cotang.\ \alpha = \frac{cos.\ \alpha}{sin.\ \alpha}$;

hiernach $sin.\ \alpha = \frac{tang.\ \alpha}{\sqrt{1+(tang.\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(cot.\alpha)^2}}$

und $cos.\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(tang.\alpha)^2}} = \frac{cotang.\ \alpha}{\sqrt{1+(cotang.\alpha)^2}}$.

§. 2. Trigonometrische Linien zusammengesetzter Winkel.

Ist in Fig. 2 der Winkel $ACB = \alpha$, und der Winkel $BCD = BCE = \beta$, so gibt an:

Fig. 2.

$BG = sin.\alpha$, $CG = cos.\alpha$, $KD = KE = sin.\beta$, $CK = cos.\beta$;
$DF = sin.(\alpha+\beta)$, $CF = cos.(\alpha+\beta)$;
$EH = sin.(\alpha-\beta)$, $CH = cos.(\alpha-\beta)$.

Nun aber gelten folgende allgemeine Regeln:

I. $sin.\ (\alpha \pm \beta) = sin.\ \alpha\ cos.\ \beta \pm cos.\ \alpha\ sin.\ \beta$,

II. $cos.\ (\alpha \pm \beta) = cos.\ \alpha\ cos.\ \beta \mp sin.\ \alpha\ sin.\ \beta$.

Hieraus folgt:

III. $sin.\ 2\alpha = 2\ sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha$,

IV. $sin.\ 3\alpha = 3\ sin.\ \alpha - 4\ (sin.\ \alpha)^3$,

V. $cos\ 2\alpha = (cos.\alpha)^2 - (sin.\alpha)^2 = 2(cos.\alpha)^2 - 1 = 1 - 2(sin.\alpha)^2$,

VI. $cos.\ 3\alpha = 4\ (cos.\alpha)^3 - 3\ cos.\alpha$. Ferner

VII. $sin.\ \alpha + sin.\beta = 2\ sin.\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ cos.\ \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

VIII. $\sin.\alpha - \sin.\beta = 2\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

IX. $\cos.\alpha + \cos.\beta = 2\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

X. $\cos.\alpha - \cos.\beta = -2\sin.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Für die Potenzen der trigonometrischen Linien ist

XI. $(\sin.\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos.2\alpha)$; also $\sin.\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos.2\alpha}{2}}$,

auch $\sin.\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{2}}$,

XII. $(\cos.\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos.2\alpha)$; also $\cos.\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos.2\alpha}{2}}$,

auch $\cos.\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos.\alpha}{2}}$.

XIII. $(\sin.\alpha)^3 = \frac{1}{4}(3\sin.\alpha - \sin.3\alpha)$,
XIV. $(\cos.\alpha)^3 = \frac{1}{4}(3\cos.\alpha + \cos.3\alpha)$,
XV. $(\sin.\alpha)^4 = \frac{1}{8}(3-4\cos.2\alpha + \cos.4\alpha)$,
XVI. $(\cos.\alpha)^4 = \frac{1}{8}(3+4\cos.2\alpha + \cos.4\alpha)$,
XVII. $(\sin.\alpha)^5 = \frac{1}{16}(10\sin.\alpha - 5\sin.3\alpha + \sin.5\alpha)$,
XVIII. $(\cos.\alpha)^5 = \frac{1}{16}(10\cos.\alpha + 5\cos.3\alpha + \cos.5\alpha)$.

Für die Tangenten und Cotangenten stellt sich heraus:

XIX. $\tang.(\alpha \pm \beta) = \frac{\tang.\alpha \pm \tang.\beta}{1 \mp \tang.\alpha\,\tang.\beta}$.

XX. $\cotang.(\alpha \pm \beta) = \frac{\cotang.\alpha\,\cotang\,\beta \mp 1}{\pm\cotang.\alpha + \cotang.\beta}$.

Hieraus folgt

XXI. $\tang.2\alpha = \frac{2\tang.\alpha}{1-(\tang.\alpha)^2}$,

XXII. $\cotang.2\alpha = \frac{(\cotang.\alpha)^2 - 1}{2\cotang.\alpha}$. Umgekehrt

XXIII. $\tang.\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos.2\alpha}} = \frac{\sin.2\alpha}{1+\cos.2\alpha} = \frac{2\tang.\frac{1}{2}\alpha}{1-(\tang.\frac{1}{2}\alpha)^2}$.

XXIV. $\cotang.\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos.2\alpha}{1-\cos.2\alpha}} = \frac{\sin.2\alpha}{1-\cos.2\alpha} = \frac{(\cotg.\frac{1}{2}\alpha)^2-1}{2\cotang.\frac{1}{2}\alpha}$.

XXV. $tang.\ \alpha \pm tang.\ \beta = \frac{sin.\ (\alpha \pm \beta)}{cos.\ \alpha\ cos.\ \beta}$,

XXVI. $cotang.\ \beta \pm cotang.\ \alpha = \frac{sin.\ (\alpha \pm \beta)}{sin.\ \alpha\ sin.\ \beta}$.

XXVII. $\frac{sin.\ \alpha + sin.\ \beta}{sin.\ \alpha - sin.\ \beta} = \frac{tang.\ \frac{1}{2}\ (\alpha+\beta)}{tang.\ \frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)}$.

§. 3. Trigonometrische Linien in verschiedenen Quadranten.

Es ist $sin. 0^\circ = 0$, $sin. 90^\circ = 1$, $sin. 180^\circ = 0$, $sin. 270^\circ = -1$,
$cos. 0^\circ = 1$, $cos. 90^\circ = 0$, $cos\ 180^\circ = -1$, $cos. 270^\circ = 0$,
$tang.\ 0^\circ = 0$, $tang.\ 90^\circ = \infty$, $tang.\ 180^\circ = 0$,
$tang.\ 270^\circ = -\infty$.
$cotang. 0^\circ = \infty$, $cotang. 90^\circ = 0$, $cotang. 180^\circ = -\infty$,
$cotang.\ 270^\circ = 0$.

Ferner:

$sin.\ (90^\circ \pm \alpha) = cos.\ \alpha$, $cos.\ (90^\circ \pm \alpha) = \mp sin.\ \alpha$,
$tang. (90^\circ \pm \alpha) = \mp cotang. \alpha$, $cotang. (90^\circ \pm \alpha) = \mp tang. \alpha$,
$sin\ (180^\circ \pm \alpha) = \mp sin.\ \alpha$, $cos.\ (180^\circ \pm \alpha) = - cos. \alpha$,
$tang. (180^\circ \pm \alpha) = \pm tang\ \alpha$, $cotang. (180^\circ \pm \alpha) = \pm cotang. \alpha$,
$sin.\ (270^\circ \pm \alpha) = - cos. \alpha$, $cos.\ (270^\circ \pm \alpha) = \pm sin. \alpha$,
$tang. (270^\circ \pm \alpha) = \mp cotang. \alpha$, $cotang. (270^\circ \pm \alpha) = \mp tang. \alpha$,
$sin.\ (360^\circ \pm \alpha) = \pm sin. \alpha$, $cos.\ (360^\circ \pm \alpha) = cos. \alpha$,
$tang. (360^\circ \pm \alpha) = \pm tang. \alpha$, $cotang. (360^\circ \pm \alpha) = \pm cotang. \alpha$.

Endlich:

$sin.\ (-\alpha) = - sin.\ \alpha$, $cos.\ (-\alpha) = cos.\ \alpha$,
$tang.\ (-\alpha) = - tang.\ \alpha$, $cotang.\ (-\alpha) = - cotang\ \alpha$.

Regel 1. Von zwei Winkeln, welche einander zu 90° ergänzen, ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, und umgekehrt, der Cosinus des einen auch gleich dem Sinus des andern, auch Tangente des einen gleich Cotangente des andern, sowie Cotangente des einen gleich Tangente des andern.

Regel 2. Winkel, welche einander zu 180° ergänzen, haben gleiche Sinus, und gleich große entgegengesetzte Cosinus, Tangenten und Cotangenten.

Die Zeichen der trigonometrischen Linien in verschiedenen Quadranten gibt folgende Tabelle an:

Winkel.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.
im ersten Quadranten (0° bis 90°)	+	+	+	+
im zweiten Quadranten (90° bis 180°)	+	−	−	−
im dritten Quadranten (180° bis 270°)	−	−	+	+
im vierten Quadranten (270° bis 360°)	−	+	−	−

§. 4. Trigonometrische Reihen.

I. $sin.\ x = x - \frac{x^3}{2\,.\,3} + \frac{x^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{x^7}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \ldots,$

II. $cos.\ x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots,$

III. $tang.\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{3\,.\,5} + \frac{17\,x^7}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,3} + \ldots,$

IV. $colang.\ x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2\,x^5}{3.5.7.9} - \frac{x^7}{3.5.7.9.5} - \ldots,$

V. $x = sin.\ x + \frac{1.(sin.\ x)^3}{2\,.\,3} + \frac{1.3.(sin.\ x)^5}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1.3.5.(sin.\ x)^7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \ldots,$

VI. $x = tang.\ x - \frac{1}{3}(tang.\ x)^3 + \frac{1}{5}(tang.\ x)^5 - \frac{1}{7}(tang.\ x)^7 + \ldots,$

VII. $tang.\ x = sin.\ x + \frac{1}{2}(sin.\ x)^3 + \frac{1.3}{2.4}(sin.\ x)^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}(sin.\ x)^7 + \ldots,$

VIII. $log.\ sin.\ x = log.\ x - m\left(\frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{4.9.5} + \frac{x^6}{9.5.7.9} + \ldots\right),$

15

$$\text{IX. } \log.\cos.x = -m\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.9}+\frac{17x^8}{5.7.8.9}+\cdots\right),$$

$$\text{X. } \log.\,\mathrm{tang}.x = \log.x + m\left(\frac{x^2}{3}+\frac{7x^4}{9.10}+\frac{62x^6}{5.7.9^2}+\cdots\right).$$

Hierin bezeichnet für briggische Logarithmen

$$m = 0{,}4342945.$$

Uebrigens ist $x = arc.\, x = \frac{x^0}{180^0}\cdot\pi = 0{,}0174533..\, x^0 = 0{,}000290888..\, x' = 0{,}00000484813\, ..\, x''$ einzusetzen.

Umgekehrt hat man

$$x^0 = \frac{x}{\pi}.180^0 = 57^0{,}2958.\, x,\; x' = 3437'{,}46x = 206265''.x.$$

Beispiel. Welche trigonometrische Linien entsprechen dem Winkel von $7^1/_2{}^0$, oder dem Bogen $0{,}0174533\,.\,7{,}5 = 0{,}13089975$.

Es ist:

$sin.\, x = 0{,}13089975 - 0{,}00037382 + 0{,}00000032 = 0{,}1305262$,

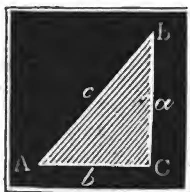
und

$tang.\, x = 0{,}13089975 + 0{,}00074764 + 0{,}00000512 = 0{,}1316525$.

§. 5. Tafeln der Formeln zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke.

In dem rechtwinkeligen Dreiecke *ABC*, Fig. 3, bezeichne *c* die Hypothenuse *AB*, *a* die dem Winkel *A* gegenüber liegende Kathete *BC* und *b* die dem Winkel *B* gegenüberstehende Kathete *AC*. Wie aus einer Seite und noch einem anderen Stücke eines solchen Dreieckes die übrigen sich bestimmen lassen, gibt folgende Tafel an.

Fig. 3.



Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b	A	$\text{tang. } A = \frac{a}{b}$,
	B	$\text{tang. } B = \frac{b}{a}$, auch $B = 90^\circ - A$,
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sin. A} = \frac{b}{\cos. A}$.
a, c	A	$\sin. A = \frac{a}{c}$,
	B	$\cos. B = \frac{a}{c}$, auch $B = 90^\circ - A$,
	b	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)\ (c-a)}$.
a, A	b	$b = a \text{ cotang. } A$,
	c	$c = \frac{a}{\sin. A}$.
b, A	a	$a = b \text{ tang. } A$,
	c	$c = \frac{b}{\cos. A}$.
c, A	a	$a = c \sin. A$,
	b	$b = c \cos. A$.

Beispiele. 1) Eine senkrechte Stange von 25 Fuß Länge wirft auf den horizontalen Boden einen Schatten von 16,3 Fuß Länge, wie hoch steht die Sonne zu dieser Zeit? Hier ist $a = 25$, $b = 16{,}3$ und A der gesuchte Höhenwinkel. Nach der Formel $\text{tang. } A = \frac{a}{b}$ berechnet sich A auf folgende Weise:

$log.\ 25 \quad = 1{,}39794$
$log.\ 16{,}3 = 1{,}21219$
$log.\ tang.\ A = 10{,}18575, \quad A = 56^0,\ 54'.$

2) Eine Bergstraße soll auf 106 Fuß Länge 4,5 Fuß ansteigen, welches ist ihr Steigwinkel? Hier hat man $c = 106$, $a = 4{,}5$ und $sin.\ A = \frac{a}{c}$; logarithmisch:

$log.\ 4{,}5 = 0{,}65321$
$log.\ 106 = 2{,}02531$
$log.\ sin.\ A = 8{,}62790, \quad A = 2^0, 26'$ das Ansteigen.

3) Wie hoch wird ein Dach und wie lang werden die dazu nöthigen Sparren ausfallen, wenn die Tiefe des Hauses 24 Ellen und der Neigungswinkel des Daches 35° betragen soll? Es ist $b = {}^{24}/_2 = 12$ Ellen und $A = 35^0$, daher die Höhe $a = b\ tang.\ A = 12\ tang.\ 35^0 = 12 \,.\, 0{,}7002$ $= 8{,}4024$ Ellen, und die Sparrenlängen

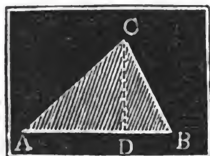
$$c = \frac{b}{cos.\ A} = \frac{12}{cos. 35^0} = \frac{12}{0{,}81915} = 14{,}65 \text{ Ellen,}$$

auch $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 70{,}6003} = \sqrt{214{,}6003}$ $= 14{,}65$ Ellen.

§. 6. Tafel der Formeln zur Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke.

In dem schiefwinkeligen Dreiecke ABC, Fig. 4, bezeichnen a, b und c die den Winkeln A, B und C gegenüber liegenden Seiten BC, AC und AB. Wie aus einer Seite und zwei anderen Stücken eines solchen Dreieckes die übrigen zu berechnen sind, gibt folgende Tafel an. Bei den Formeln in dieser Tafel sind die Winkel A, B und C spitz angenommen; ist aber einer der Winkel stumpf, so hat man bei dem Cosinus, bei der Tangente und der Cotangente das Vorzeichen zu ändern.

Fig. 4.



Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b, c	A	$\cos. A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, oder wenn $a+b+c = s$ ist, $\sin. A = \frac{2}{bc}\sqrt{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s-a)\,(\frac{1}{2}s-b)\,(\frac{1}{2}s-c)}$, auch $\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\,s\,(\frac{1}{2}\,s-a)}{bc}}$ und $\sin. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)\,(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$
a, b, A	B	$\sin. B = \frac{b \sin. A}{a}$; übrigens kann $B \gtrless 180^0$ sein; ist $b \gtrless a$, so hat man auch $B \gtrless A$.
	C	$C = 180^0 - (A+B)$,
	c	$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}$.
a, b, C	A B	$\tang. A = \frac{a \sin. C}{b - a \cos. C}$ oder $\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$ und $\tang. \left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \cotang. \frac{C}{2}$, hiernach $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$ und $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$.
	c	$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab \cos. C}$ oder, nachdem A und B bestimmt ist, $c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}$

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, A, B	b	$b = \frac{a \sin. B}{\sin. A}$
	C	$C = 180^0 - (A + B)$
	c	$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A} = \frac{a \sin. (A + B)}{\sin. A}$.
a, B, C	A	$A = 180^0 - (B + C)$
	b	$b = \frac{a \sin. B}{\sin. A} = \frac{a \sin. B}{\sin. (B + C)}$
	c	$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A} = \frac{a \sin. C}{\sin. (B + C)}$.

Beispiel 1. Sind die drei Seiten eines Dreieckes folgende: $a = 33{,}5$ Ruthen, $b = 41{,}7$ R. und $c = 29{,}1$ R., so hat man für den Winkel A desselben:

$$\cos. A = \frac{41{,}7^2 + 29{,}1^2 - 33{,}5^2}{2 \cdot 41{,}7 \cdot 29{,}1} = \frac{1463{,}45}{2 \cdot 41{,}7 \cdot 29{,}1}, \text{ nun ist}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log. 1463{,}45 = 3{,}16538 \\ \log. 2 = 0{,}30101 \\ \log. 41{,}7 = 1{,}62014 \\ \log. 29{,}1 = 1{,}46389 \end{array}\right\}$$

$$3{,}38506$$

$\log. \cos. A = 9{,}78032$, daher $A = 52^0, 55'$; B folgt $= 83^0, 13'$ und $C = 43^0, 52'$.

Da $a + b + c = 104{,}3$, so folgt auf anderem Wege:

$$\cos. \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{52{,}15 \cdot 18{,}65}{41{,}7 \cdot 29{,}1}}; \text{ aber}$$

$\log. 52{,}15 = 1{,}71725$
$\log. 18{,}65 = 1{,}27068$
$2{,}98793$
$3{,}05403$
$1{,}90390 - 2$
$2)\ 0{,}95195 - 1$

$\log. 41{,}7 = 1{,}62014$
$\log. 29{,}1 = 1{,}46389$
$3{,}08403$

$log.\ cos.\ \frac{1}{2}A = 9{,}95195,\ \frac{A}{2} = 26^0{,}27\frac{1}{2}',\ A = 52^0{,}55'.$

Beispiel 2. Aus den zwei Seiten $a = 402{,}58$, $b = 361{,}27$ Fuß und aus dem eingeschlossenen Winkel $C = 117^0{,}9'$ folgt für die übrigen Winkel

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2} = 90^0 - 58^0{,}34\frac{1}{2}' = 31^0{,}25\frac{1}{2}$$ und

$$tang.\ \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\, cotang.\ \frac{C}{2} = \frac{41{,}31.cotg.58^0{,}34\frac{1}{2}'}{763{,}85};$$

$$\begin{aligned} \text{nun ist } log.\ 41{,}31 &= 1{,}61606 \\ log.\ cotang.\ 58^0{,}34\frac{1}{2}' &= \underline{9{,}78604} \\ & 11{,}40210 \\ log.\ 763{,}85 &= \underline{2{,}88301} \end{aligned}$$

$$log.\ tang.\ \left(\frac{A-B}{2}\right) = 8{,}51909,\ \frac{A-B}{2} = 1^0,\ 53\frac{1}{2}',$$

aber $\frac{A+B}{2} = 31^0{,}25\frac{1}{2}'$, folglich

$$A = 33^0{,}19' \text{ und } B = 29^0{,}32'.$$

Für die Seite c ist nun $c = \frac{a\ sin.\ C}{sin.\ A}$, aber,

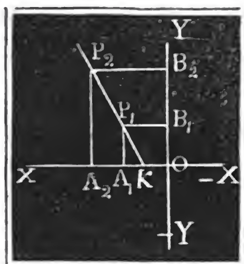
$$\begin{aligned} log.\ 402{,}58 &= 2{,}60485 \\ log.\ sin.\ 117^0{,}9' &= \underline{9{,}94930} \\ & 12{,}55415 \\ log.\ sin.\ 33^0{,}19' &= \underline{9{,}73978} \\ log.\ c &= 2{,}81437,\ c = 652{,}2 \text{ Fuß}. \end{aligned}$$

Unmittelbar ergibt sich die Seite c durch die Formel $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\ cos.\ C}$. Nun ist aber $a^2+b^2 = 292587$ und $2ab\ cos.\ C = -2.402{,}58.361{,}27.cos.62^0{,}51' = -132735$; es folgt daher $c = \sqrt{425322} = 652{,}2$ Fuß.

§. 7. Coordinatenformeln.

Hinsichtlich zweier rechtwinkeligen Coordinatenaxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ ist bestimmt:

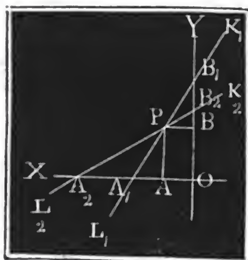
Fig. 5.



1) ein Punkt P_1, Fig. 5, durch die Coordinaten oder Perpendikel $O A_1 = B_1 P_1 = x_1$ und $O B_1 = A_1 P_1 = y_1$.

2) eine Linie $K_1 L_1$, Fig. 6, durch die Parameter oder Abschnitte $OA_1 = a$ und $O B_1 = b$ oder durch die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, zwischen den Coordinaten $OA = x$ und $OB = y$ eines jeden Punktes P in derselben.

Fig. 6.



Die Entfernung zweier durch die Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 bestimmten Punkte P_1 und P_2, Fig. 5, gibt die Formel $\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ an; der Winkel $P_1 K A_1 = \alpha$, welchen diese Linie mit der Axe $O X$ einschließt, ist bestimmt durch die Formel

$$tang.\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Die Gleichung einer Linie durch den Punkt P_1 ist $\frac{x_1 - x}{a_1} + \frac{y_1 - y}{b_1} = 0$, und die einer Linie durch P_2: $\frac{x_2 - x}{a_2} + \frac{y_2 - y}{b_2} = 0$, daher die Gleichung der Linie durch beide Punkte:

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y}.$$

Der Winkel $O A_1 B_1 = \alpha_1$, Fig. 6, welchen eine Linie $K_1 L_1$ mit einer Axe $O X$ einschließt, ist bestimmt durch die Formel:

$$tang.\ a_1 = \frac{b_1}{a_1}.$$

Die Coordinaten des Punktes P, in welchem sich zwei Linien $K_1 L_1$ und $K_2 L_2$ mit den Parametern $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$ schneiden, sind

$$OA = x_1 = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \text{ und } OB = y_1 = \frac{b_1 b_2 (a_1 . a_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

und der Winkel $K_1 P K_2 = \varphi$, um welchen sie von einander abweichen, ist bestimmt durch die Gleichung:

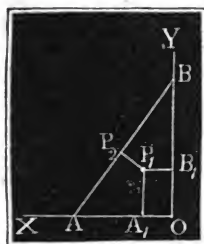
$$tang.\ \varphi = tang.\ (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{a_2\ b_1 - a_1\ b_2}{a_1\ a_2 + b_1\ b_2}, \text{ oder}$$

$$cos. \varphi = cos. \alpha_1\, cos. \alpha_2 + sin. \alpha_1\, sin. \alpha_2 = \frac{a_1\ a_2 + b_1\ b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$$

Zwei Linien sind parallel, wenn $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, und rechtwinkelig, wenn $a_1 : a_2 = -\ b_2 : b_1$.

Der Fußpunkt P_2, Fig. 7, des Perpendikels von einem durch die Coordinaten x_1, y_1 gegebenen Punkte P_1 gegen eine durch die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ gegebene Linie AB ist bestimmt durch die Coordinaten $x_2 = \frac{a\ (b^2 + a\, x_1 - b\, y_1)}{a^2 + b^2}$, $y_2 = \frac{b(a^2 + b\, y_1 - a\, x_1)}{a^2 + b^2}$, und die Länge des Abstandes durch die Formel

Fig. 7.



$$\overline{P_1 P_2} = \frac{ab - ay_1 - b\, x_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Beispiel. Zwei Punkte sind durch die Coordinaten $x_1 = 2$, $y_1 = 1{,}3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 3{,}5$ gegeben, man sucht ihre Entfernung u. s. w. Die Entfernung ist

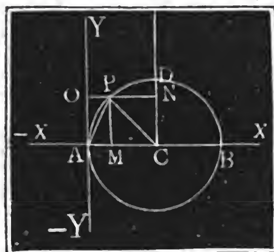
$\overline{P_1\ P_2} = \sqrt{(3-2)^2 + (3{,}5 - 1{,}3^2} = \sqrt{1 + 4{,}84} = \sqrt{5{,}84}$ $= 2{,}417$; der Neigungswinkel gegen die erste Axe ist bestimmt durch $tang.\ \alpha = \frac{2{,}2}{1} = 2{,}2$, daher $\alpha = 65^0{,}33\frac{1}{2}'$; die Gleichung der Verbindungslinie ist endlich

$\frac{2-x}{3-x} = \frac{1{,}3-y}{3{,}5-y}$, oder zusammengezogen, $2{,}2\,x - y = 3{,}1$, oder in die gewöhnliche Form gebracht, $\frac{x}{1{,}409} - \frac{y}{3{,}1} = 1$; es sind also die Parameter dieser Linie $a = 1{,}409$ und $b = -3{,}1$.

§. 8. Kreisformeln.

Ist r der Halbmesser $CA = CD$ eines Kreises, Fig. 8, und sind x und y die im Mittelpunkte C anfangenden Coordinaten CM und CN eines Punktes P im Umfange, so gilt die Kreisgleichung

Fig. 8.



I. $x^2 + y^2 = r^2$ oder $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$; es ist also $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Sind aber x und y die in einem Punkte A des Umfanges anfangenden Coordinaten AM und $AO = MP = y$, so gilt die Kreisgleichung

II. $y^2 = x\,(2r - x)$, es ist also 1) $y = \sqrt{x(2r - x)}$, 2) $x = r - \sqrt{r^2 - y^2}$ oder wenn x und y klein sind gegen r, $= \frac{y^2}{2r}$, genauer $= \frac{y^2}{2r}\left(1 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2\right)$;

3) $r = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$.

Bezeichnet φ den Centriwinkel ACP, so ist $\frac{\varphi}{2} = APM$, daher 4) $tang.\ \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{y}$; und 5) $r = \frac{y}{sin.\ \varphi}$.

Bezeichnet noch ψ den Winkel CAP und z die Sehne AP, so hat man auch

III. $z = 2r\ cos.\ \psi$ und $z^2 = 2rx$.

Das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser oder des halben Umfanges zum Halbmesser ist
$\pi = 3{,}14159265359\ldots$, läßt sich meist genau genug
$= 3{,}1416$ setzen und annähernd durch die Brüche
$= \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$ ausdrücken.

Uebrigens sind folgende Ausdrücke mit π häufig in Anwendung:

$$\pi = 3{,}14159, \quad log.\ \pi = 0{,}49715,$$
$$2\pi = 6{,}28319, \quad log.\ 2\pi = 0{,}79818,$$
$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831, \quad log.\ \frac{1}{\pi} = 0{,}50285-1,$$
$$\frac{1}{2\pi} = 0{,}15915, \quad log.\ \left(\frac{1}{2\pi}\right) = 0{,}20182-1,$$
$$\frac{2}{\pi} = 0{,}63662, \quad log.\ \frac{2}{\pi} = 0{,}80388-1,$$
$$\tfrac{1}{2}\pi = 1{,}57080, \quad log.\ \frac{\pi}{2} = 0{,}19612,$$
$$\frac{\pi}{3} = 1{,}04720, \quad log.\ \frac{\pi}{3} = 0{,}02003,$$
$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78540, \quad log.\ \frac{\pi}{4} = 0{,}89509-1,$$
$$\frac{\pi}{6} = 0{,}52360, \quad log.\ \frac{\pi}{6} = 0{,}71900-1,$$
$$\pi^2 = 9{,}86960, \quad log.\ \pi^2 = 0{,}99430,$$
$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245, \quad log.\ \sqrt{\pi} = 0{,}24857,$$
$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}56419, \quad log.\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} - 0{,}75142-1.$$

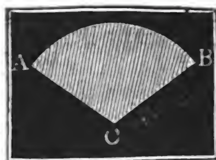
Aus dem Halbmesser r oder dem Durchmesser $d = 2r$ ergibt sich der Kreisumfang durch die Formel:

IV. $p = \pi d = 2\pi r$. Umgekehrt ist $d = \frac{p}{\pi}$ und

$r = \frac{p}{2\pi}$.

Aus dem Halbmesser $CA = CB = r$ und dem Centriwinkel $ACB = \beta^0$, Fig. 9, folgt die Länge des entsprechenden Bogens AB:

Fig. 9.



$$V.\ b = \frac{\beta^0}{360^0} \cdot p = \frac{\beta^0 \pi d}{360^0} = \frac{\beta^0 \pi r}{180^0},$$

umgekehrt ist $\beta^0 = \frac{b}{\pi r} \cdot 180^0$ und

$$r = \frac{180^0 . b}{\beta^0 . \pi}.$$

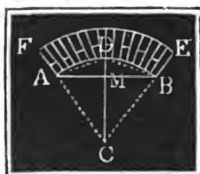
Ist der Halbmesser $= 1$, so hat man den Bogen:

$$\beta = \frac{\beta^0 \pi}{180^0} = 0{,}017453 \,.\, \beta^0,$$ so wie umgekehrt

$$\beta^0 = 57^0{,}2958 \,.\, \beta$$ (s. §. 4).

Beispiel 1. Aus der Weite $AB = 2AM = 2y = 7$ Fuß eines Gewölbbogens, Fig. 10, und aus der Höhe $MD = x = 1{,}5$ Fuß desselben folgt für den halben Centriwinkel $ACM = \varphi$:

Fig. 10.



$$tang. \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{y} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = 0{,}42857,$$

$$\frac{\varphi}{2} = 23^0{,}11',$$ daher $\varphi = 46^0{,}22'$,

und der Halbmesser des Gewölbes:

$$r = \frac{y}{sin. \varphi} = \frac{3{,}5}{sin. 46{,}22} = 4{,}835 \text{ Fuß};$$

unmittelbar ist $r = \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{2{,}25 + 12.25}{3} = \frac{14{,}5}{3} = 4{,}833$ Fuß.

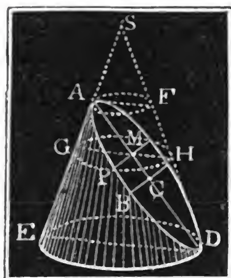
Beispiel 2. Die Länge eines Kreisbogens von $106^0{,}21'$ ist bei dem Halbmesser $r = 2{,}35$ Zoll, $b = \frac{\beta^0 \pi r}{180^0} = 106{,}35 \,.\, 0{,}017453 \,.\, 2{,}35 = 4{,}362$ Zoll.

Beispiel 3. Einem Bogen von 365 Fuß Länge entspricht bei einem Halbmesser von 2544 Fuß Länge ein Centriwinkel $\beta^0 = \frac{b}{\pi r} \,.\, 180^0 = \frac{365 \,.\, 57^0{,}2958}{2544} = 8^0{,}2204 = 8^0, 13', 14''$.

§. 9. Die Ellipse.

Bezeichne in der einen Kegelschnitt bildenden Ellipse *APD*, Fig. 11, a die große Halbaxe $CA = CD$, b die kleine Halbaxe CB, $x = AM$ die erste Coordinate oder Abscisse und $y = MP$ die zweite Coordinate oder Ordinate eines Punktes P dieser Curve, bezeichnen endlich c und d die Durchmesser der Begrenzungskreise DE und AF; dann ist

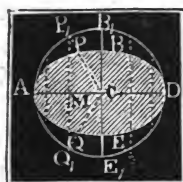
Fig. 11.



$$y^2 = \frac{cd}{4a^2}(2ar - x^2);$$ oder da für $x = a, y = b$, also $b^2 = \frac{cd}{4}$ ist, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2$ und $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$.

Führt man statt x, $CA - CM = a - x$ ein, so erhält man die Gleichung aus dem Mittelpunkte:

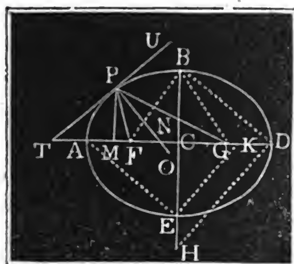
Fig. 12.



$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ und } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus beiden Gleichungen der Ellipse folgt, daß sich die Ordinate *MP*, Fig. 12, der Ellipse zu der Ordinate MP_1 des Kreises, welcher die große Halbaxe dieser Curve zum Halbmesser hat, wie die kleine zur großen Halbaxe verhält.

Fig. 13.



Die Brennpunkte F und G einer Ellipse *AB*, Fig. 13, ergeben sich, wenn man $BF = BG = a$ macht, oder die Excentricität $c = CF = CG = \sqrt{a^2 - b^2}$ aufträgt.

Der erste Radius *FP* eines Punktes *P* ist

$z = a - \frac{ex}{a}$ und der zweite Radius *GP*: $z_1 = a + \frac{cx}{a}$,

beide zusammen sind aber $= 2a$. Setzt man den Drehungswinkel $AFP = \varphi$, so hat man auch

$$z = \frac{b^2}{a + e\ cos.\ \varphi}.$$

Die Normale *PN* halbirt den Winkel *FPG* zwischen den Radien, die Tangente *TU* schließt daher mit denselben die gleichen Winkel *TPF* und *UPG* ein. Der in der Richtung der Normale befindliche Krümmungshalbmesser *OP* eines

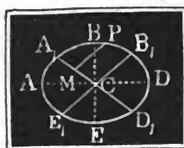
Punktes *P* ist $r = \frac{(z.z_1)^{3/2}}{ab}$, daher für den Endpunkt *A*

der großen Halbaxe $r_1 = \frac{b^2}{a}$ und für den Endpunkt *B*

der kleinen Halbaxe $r_2 = \frac{a^2}{b}$.

Schneiden zwei conjugirte Durchmesser A_1D_1 und B_1E_1 die große Axe der Ellipse, Fig. 14, unter den Winkeln α und β, so ist $a_1{}^2 + b_1{}^2 = a^2 + b^2$ und $a_1 b_1\ sin.\ (\alpha + \beta) = ab$, übrigens gilt für die mit diesem Durchmesser parallelen Coordinaten $CM = x_1$ und $MP = y_1$ die Gleichung

Fig. 14.



$$\frac{x_1{}^2}{a_1{}^2} + \frac{y_1{}^2}{b_1{}^2} = 1.$$

Der Umfang einer Ellipse ist

$$p = \pi(a+b)\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \tfrac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \ldots\right].$$

Setzt man $a + b =$ dem Durchmesser *d* eines Kreises, so erhält man für das Verhältniß des Umfanges der Ellipse zu dem Umfange dieses Kreises:

$$\mu = 1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \ldots,$$

und es ist:

für $\frac{a-b}{a+b}=$	$^0/_{10}$	$^1/_{10}$	$^2/_{10}$	$^3/_{10}$	$^4/_{10}$	$^5/_{10}$
$\mu =$	1,000	1,003	1,010	1,023	1,040	1,063

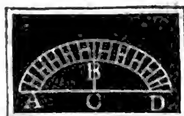
für $\frac{a-b}{a+b}=$	$^6/_{10}$	$^7/_{10}$	$^8/_{10}$	$^9/_{10}$	$^{10}/_{10}$
$\mu =$	1,092	1,127	1,167	1,216	1,273.

Für einen durch die Coordinaten x und y gegebenen Ellipsenbogen hat man, wenn $\frac{x}{a} = sin.\ \varphi$ oder $\frac{y}{b} = cos.\ \varphi$ und $\frac{a-b}{a+b} = k$ gesetzt wird,

$$s = \frac{a+b}{2}\Big[\varphi(1+{}^1/_4k^2+{}^1/_{64}k^4+..)+k\,sin.\,2\varphi\left(1-\frac{k^2}{8}+...\right) - \frac{k^2}{8}sin.\,4\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{4}\right)+\frac{k^3}{8}sin.\,6\varphi - {}^5/_{256}\,k^4 sin.\,8\varphi+..\Big].$$

Beispiel. Für ein halbelliptisches Gewölbe, Fig. 15, dessen Weite 10 Fuß und Höhe 3 Fuß ist, hat man die Krümmungshalbmesser $r_1 = \frac{3^2}{5} = 1{,}8$ Fuß und $r_2 = \frac{5^2}{3} = 8^2/_3$ Fuß, und die Bogenlänge, da $\frac{a-b}{a+b} = {}^1/_4$, also $\mu = 1{,}0165$ ist,

Fig. 15.



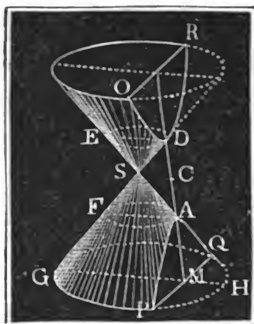
$p = {}^1/_2 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 13 \,.\, 1{,}0165 = 20{,}75$ Fuß.

§. 10. Die Hyperbel.

In Fig. 16 (s. folg. S.) seien APQ und DOR die durch einen Kegelschnitt gebildeten zwei Zweige einer Hy-

perbel. Bezeichnet a die eine Halbare $CA = CD$, c den Durchmesser AF und d den Durchmesser DE der durch die Scheitel A und D gehenden Parallelkreise, ist ferner x die Abscisse AM und y die entsprechende Ordinate PM eines Punktes P, so gilt die Gleichung:

Fig. 16.

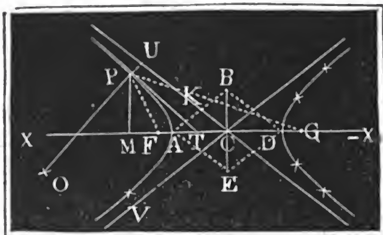


$y^2 = \frac{cd}{4a^2}(2ax + x^2)$, oder für $\frac{cd}{4} = b^2$, d. i. das Quadrat der zweiten Halbare eingeführt, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ und $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax + x^2}$. Setzt man den Anfangspunkt nach der Mitte c, führt also statt x, $x - a$ ein, so erhält man die Hyperbelgleichung aus dem Mittelpunkte:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Die Brennpunkte F und G einer Hyperbel, Fig. 17, ergeben sich, wenn man die Excentricität $CF = CG = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ vom Mittelpunkte C aus auf beiden Seiten der Are aufträgt. Es ist der eine Radius

Fig. 17.



$FP = z = \frac{ex}{a} - a$

und der andere

$GP = z_1 = \frac{ex}{a} + a$;

die Differenz beider ist $z_1 - z = 2a$.

Setzt man den Umdrehungswinkel $AFP = \varphi$, so hat man $z = \frac{b^2}{a + e \cos.\varphi}$.

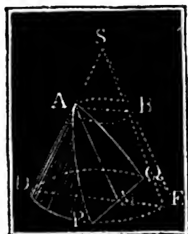
Die Tangente PT eines Punktes P halbirt den Winkel FPG zwischen den Radien FP und FG, und der Krümmungshalbmesser OP desselben ist: $r = \frac{(z z_1)^{3/2}}{a b}$. Im Scheitel ist dieser Halbmesser $r_1 = \frac{b^2}{a}$, am kleinsten, je entfernter ein Element vom Scheitel liegt, je größer ist auch sein Krümmungshalbmesser.

Der Winkel $UCM = VCM = \alpha$, unter welchem die Axe $X\bar{X}$ von den Asymptoten geschnitten wird, ist bestimmt durch die Gleichung $tang.\ \alpha = \frac{b}{a}$. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $b = a$, daher $tang.\ \alpha = 1$ und $\alpha = 45^\circ$. Nimmt man die Coordinaten in den Richtungen der Asymptoten, setzt man die Abscisse $CU = u$, und die entsprechende Ordinate $UP = v$, so gilt die Gleichung $uv = \frac{a^2 + b^2}{4}$, oder die sogenannte Potenz $\frac{a^2 + b^2}{4}$ der Hyperbel durch p^2 bezeichnet, $uv = p^2$.

§ 11. Die Parabel.

Wenn der Schnitt APQ, Fig. 18, eines Kegels DSE einer Seite SE parallel läuft, und auf der Axenebene DSE rechtwinkelig steht, so ist die Durchschnittsfigur eine Parabel. Bezeichnet c den Durchmesser AB des Kreises durch den Scheitel, d die Seite BS parallel zum Schnitte, x die Abscisse AM und y die Ordinate MP, so hat man die Parabelgleichung

Fig. 18.



$$y^2 = \frac{c^2 x}{d},$$ oder den Parameter $$p = \frac{c^2}{d}$$ eingeführt, $y^2 = p x$.

Trägt man den gegebenen Parameter $p = MQ$, Fig. 19, an das Ende einer Abscisse $x = AM$, und beschreibt man über AQ einen Kreis, so schneidet dieser die entsprechende Ordinate MP von dem Perpendikel in M ab. Für $x = p$ ist auch $y = p$. Der Brennpunkt F ergibt sich, wenn man die Brennweite $AF = \frac{p}{4}$ aufträgt. Der Radius FP ist nun $z = x + \frac{p}{4}$, oder durch den Umdrehungswinkel $AFP = \varphi$ ausgedrückt, $z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos.\varphi}$.

Fig. 19.

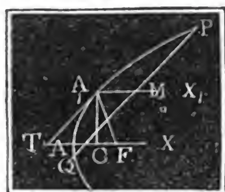
Die Subtangente MT ist $= 2x$, d. i. gleich der doppelten Abscisse, und die Subnormale MN ist dem halben Parameter $\left(\frac{p}{2}\right)$ gleich. Uebrigens schließt die Tangente PT mit der Abscissenaxe $X\bar{X}$ und mit dem Radius FP gleiche Winkel $PTF = TPF = \alpha$ ein.

Der Krümmungshalbmesser PO eines Punktes P ist $r = \frac{(4x+p)^{3/2}}{2\sqrt{p}}$, also für den Scheitel $r = \frac{1}{2}p$.

Die Leitlinie $Y\bar{Y}$ steht auf der Axe $X\bar{X}$ winkelrecht, und vom Scheitel A um $AL = \frac{p}{4}$ ab. Es ist $PK = PF = x + \frac{p}{4}$, d. h. jeder Punkt P der Parabel steht von der Leitlinie eben so viel ab, wie vom Brennpunkte F.

Der mit der Axe AX parallel laufende Durchmesser $A_1 X_1$, Fig. 20, halbirt alle Sehnen PQ parallel zur Tangente $A_1 T$. Bezeichnen x_1 und y_1 die in den letzten Richtungen genommenen Coordinaten $A_1 M_1$ und $M_1 P$, so hat man wie für die in A anfangenden Coordinaten $y_1{}^2 = p_1 x_1$, und es ist der entsprechende Parameter $p_1 = \frac{p}{sin. a^2} = 4$ Radius FA.

Fig. 20.



Die Länge eines gedrückten Parabelbogens PAQ, Fig. 21, ist annähernd $p = s\left(1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{h}{s}\right)^2\right)$, wenn s die Sehne PQ und h die Bogenhöhe AM bezeichnet. Diese Formel läßt sich übrigens auf alle Bogen anwenden, deren Höhe h klein gegen die Sehne s ist.

Fig. 21.



Beispiel. Ein gedrückter Bogen, dessen Sehne 10mal so groß ist als seine Höhe, hat annähernd die Länge

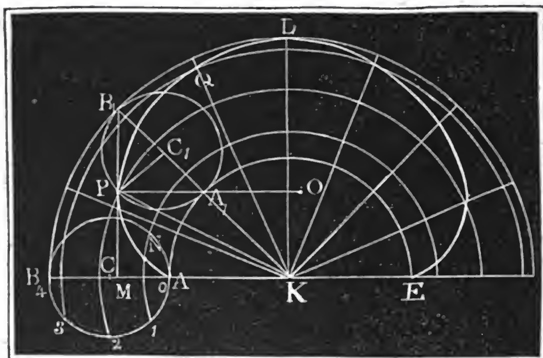
$$p = \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = \left(1 + \frac{8}{300}\right) s = 1{,}027 \, . \, s.$$

§. 12. Rolllinien.

Wenn ein Kreis AB, Fig. 22 (s. folgd. S.), auf einem anderen Kreise AE rollt oder sich wälzt, so beschreibt jeder Punkt desselben, z. B. A eine Epicycloide, wie $APDE$. Erfolgt dieses Wälzen innerhalb des Grundkreises, so wird eine Hypocycloide erzeugt. Ist der Grundkreis unendlich groß gegen den Erzeugungskreis, so geht ein Theil desselben in eine gerade Linie über, und dann ist die erzeugte Curve eine Cycloide. Bei dem Rollen oder Wälzen ist der auf dem Grundkreise zurückgelegte bogenförmige Weg AA_1 gleich dem Drehungsbogen $A_1 P$ des Erzeugungskreises.

Ist r der Halbmesser $AC = BC$ des Erzeugungskreises, und R der Halbmesser $AK = A_1K$ des Grundkreises, fer-

Fig. 22.



ner ψ der Umdrehungswinkel A_1C_1P des Erzeugungs- und φ der entsprechende Centriwinkel AKA_1 des Grundkreises, so hat man $r\psi = R\varphi$, und daher $\varphi = \frac{r}{R}\psi$. Für eine halbe Umdrehung oder für eine halbe Epicycloide ist $\psi = 180°$, daher $AKD = \varphi = \frac{r}{R} . 180°$. Theilt man nun den Winkel AKD und den Halbkreis AB in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, so ergeben sich Punkte N, P, Q der Epicycloide, wenn man $1N$, $2P$, $3Q$ u. s. w. den Bögen gleich macht, welche bei entsprechenden Halbmessern einen, zwei, drei Theile u. s. w. des Centriwinkels AKD zwischen sich fassen. Für die Coordinaten $KM = x$ und $MP = y$ eines Punktes hat man

$$x = (R+r) \cos. \varphi - r \cos. (\varphi+\psi) \text{ und}$$
$$y = (R+r) \sin. \varphi - r \sin. (\varphi+\psi).$$

Die Normale PA_1 in einem Punkte P der Epicycloide geht durch den Punkt A_1, in welchem der Erzeugungskreis den Grundkreis berührt, die Tangente PB_1 aber geht durch

den gegenüberliegenden Punkt B_1 des Erzeugungskreises. Der Krümmungshalbmesser PO ist $\frac{R+r}{R+2r}$ mal die doppelte Sehne $A_1 P$. Die Bogenlänge ANP ist $\frac{R+r}{R}$ mal die doppelte Differenz, zwischen dem Durchmesser $A_1 B_1$ und der Sehne PB_1. Algebraisch ist

$$PO = z = \frac{4\,(R+r)\,r}{R+2r}\ sin.\ {}^1\!/_2\ \psi \text{ und}$$

$$ANP = s = \frac{4r(R+r)}{R}\ (1 - cos.\ {}^1\!/_2\ \psi).$$

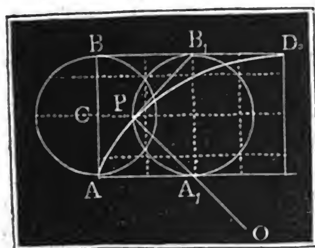
Im Anfangspunkte A ist $z=0$, im Scheitel D: $z = \frac{4(R+r)r}{R+2r}$. Die Länge der vollständigen Epicycloide ADE ist

$$= \frac{8r\ (R+r)}{R}.$$

Für die Hypocycloide geht $R+r$ in $R-r$ und $R+2r$ in $R-2r$ über, es ist daher die Länge einer vollständigen Hypocycloide $= \frac{8r\ (R-r)}{R}$, z. B. für $r = {}^1\!/_2 R$, $s = 2R$.

Ein Kreis, welcher sich im Innern eines doppelt so großen Kreises wälzt, beschreibt allerdings eine mit dem Durchmesser des letzteren zusammenfallende Hypocycloide.

Fig. 23.



Bei der gemeinen Cycloide APD, Fig. 23, ist $R = \infty$, daher der Krümmungshalbmesser $PO = 4\,r\ sin.\ {}^1\!/_2\ \psi$, d. i. der doppelten Sehne PA_1 gleich, und die Bogenlänge $= 4r\,(1 - cos.\ {}^1\!/_2\ \psi)$, d. i. gleich der doppelten Differenz zwischen dem Durchmesser $A_1 B_1$ und der Sehne PB_1. Die ganze Länge der Cycloide ist $8r$.

§. 13. Die Kreisevolvente.

Die Kreisevolvente und die Cycloide stehen in genauer Beziehung zu einander. Während die Cycloide von einem Punkte eines sich auf einer geraden Linie wälzenden Kreises beschrieben wird, entsteht die Kreisevolvente dadurch, daß sich eine gerade Linie auf dem Kreise wälzt. Um die letztere zu construiren, mache man den Bogen AOD, Fig. 24, des Grundkreises AD der gegebenen Erzeugungslinien AB gleich, theile beide in gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte des ersten Tangenten und trage auf diese die 1, 2, 3fachen Theile u. s. w. der Geraden AB. Mechanisch construirt man dieselbe durch einen Faden AB und mit Hilfe einer kreisförmigen Schablone. Man legt diesen Faden allmälig auf den Umfang der Schablone auf, indem man das übrig bleibende Stück tangential auszieht.

Fig. 24.

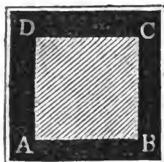
Man findet die Normale in einem Punkte P dieser Curve, wenn man eine Berührungslinie PO nach dem Grundkreise zieht, daher die Tangente, wenn man ein Perpendikel PT auf PO errichtet. Der Krümmungshalbmesser der Kreisevolvente ist der Tangente PO des Grundkreises gleich, die Evolventenlänge DP ist $s = \frac{z^2}{2r}$, wenn z den abgewickelten Bogen $OD = OP$, r aber den Halbmesser $CA = CO$ des Grundkreises bezeichnet.

§. 14. Flächenräume geradliniger Figuren.

Ist die Seite $AB = BC$ eines Quadrates, Fig. 25, $= a$, so hat man für den Inhalt desselben:

I. $F = a^2$, und umgekehrt $a = \sqrt{F}$.

Fig. 25.



Ist die Grundlinie eines recht- oder schiefwinkeligen Parallelogrammes AC, Fig. 26 oder Fig. 27, $= a$ und die Höhe $= h$, so hat man für den Inhalt desselben:

$$\text{II.} \quad F = a\,h.$$

Aus den Seiten $AB = a_1$ und $AD = BC = b_1$ ergibt sich mit Hilfe

Fig. 26.

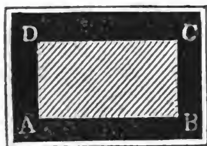
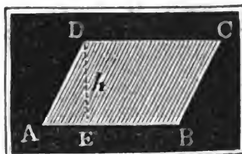


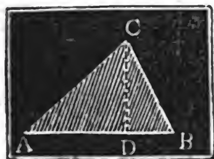
Fig. 27.



des Winkels A der Inhalt des letzteren $F = ab \sin. A$.

Aus der Grundlinie $AB = c$ und der Höhe $CD = h$ ergibt sich der Inhalt eines Dreieckes ABC, Fig. 28, durch

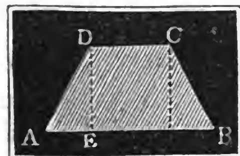
Fig. 28.



die Formel $F = \frac{ch}{2}$. Mit Hilfe der Seiten $AB = c$ und $AC = b$ und des eingeschlossenen Winkels A aber: $F = \frac{1}{2}\, bc \sin. A$, aus den Winkeln und einer Seite $AB = c$ folgt: $F = \frac{c^2 \sin. A \sin. B}{2 \sin. C}$.

Mit Hilfe aller drei Seiten a, b, c, deren Summe $a+b+c = s$ sein möge, $F = \sqrt{\frac{1}{2} s\, (\frac{1}{2} s - a)\, (\frac{1}{2} s - b)\, \frac{1}{2} s - c)}$.

Fig. 29.



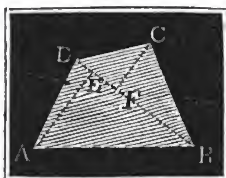
Aus den parallelen Seiten $AB = a_1$ und $CD = a_2$ und aus der Höhe $DE = h$ folgt der Inhalt eines Trapezes, Fig. 29:

$$\text{III.} \quad F = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) h.$$

Der Inhalt eines Trapezoi-

des, Fig. 30, ergibt sich aus der Diagonale $BD = d$ und den Höhen $AE = h_1$ und $CF = h_2$ der Dreiecke, in welche diese Figur durch die Diagonale getheilt wird, durch die Formel:

Fig. 30.



$$\text{IV.}\quad F = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) d.$$

Die Inhalte von Polygonen, wie Fig. 31, 32 und 33, findet

Fig. 31.

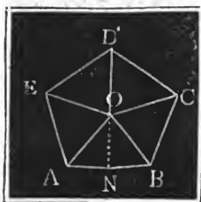


Fig. 32.

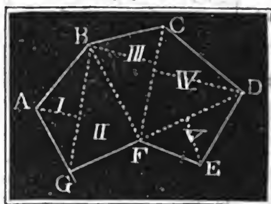
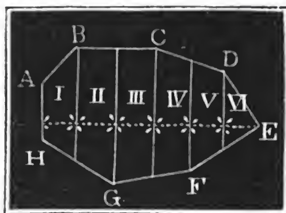


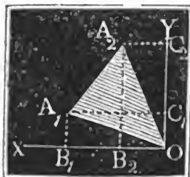
Fig. 33.



man, wenn man diese in Dreiecke oder Trapeze zerlegt und die Inhalte dieser addirt.

Aus den Coordinaten $OB_1 = x_1$, $OC_1 = y_1$ und $OB_2 = x_2$ und $OC_2 = y_2$ zweier Endpunkte eines Dreieckes A_1A_2O, dessen dritter Endpunkt O, Fig. 34, mit dem Anfangspunkte der Axen zusammenfällt, ergibt sich der Inhalt desselben:

Fig. 34.



$$\text{V.}\quad F = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel läßt sich nun auch der Inhalt eines Polygones ACE, Fig. 35, finden, wenn dessen Endpunkte ebenfalls rücksichtlich zweier Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ bestimmt sind.

Beispiel 1. Das Siebeneck, Fig. 31, besteht aus fünf Dreiecken mit folgenden Dimensionen und Inhalten:

Nummer.	Grundlinie.	Höhe.	Inhalt.
I.	75,2 Fuß.	25,0	940 □Fuß.
II.	75,2 »	38,0	1428,8 »
III.	68,7 »	41,6	1429,0 »
IV.	68,7 »	54,2	1861,8 »
V.	69,0 »	29,0	1000,5 »

Inhalt der ganzen Fläche 6660,1 □F.

Beispiel 2. Aus der Seite $AB = s$, eines regelmäßigen Fünfeckes, Fig. 32, folgt der Halbmesser

$$AO = r = s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},$$ und daher die Höhe

$$ON = h = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = s\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}};$$

demnach ist der Inhalt des regelmäßigen Fünfeckes:

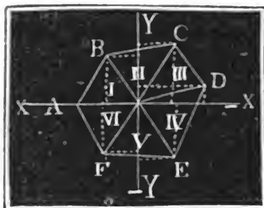
$$F = 5 \cdot \frac{sh}{2} = 5\,s^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = \frac{s^2}{2}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$
$$= 0{,}3441 \cdot s^2.$$

Beispiel 3. Das Achteck $ACEF$, Fig. 33, läßt sich in sechs Trapeze mit folgenden Verhältnissen zerlegen:

Nummer.	Erste Grundlinie	Zweite Grundlinie	Höhe.	Inhalt.
I.	37,0 Ruth	66,2	17,6	908,16 □R.
II.	66,2 »	80,4	24,0	1759,20 »
III.	80,4 »	77,0	23,2	1825,84 »
IV.	77,0 »	65,0	21,7	1540,70 »
V.	65,0 »	49,8	16,2	929,88 »
VI.	49,8 »	0,0	23,2	577,68 »

Inhalt der ganzen Fläche 7541,46 □R.

Fig. 35.



Beispiel 4. Das Sechseck *ACE*, Fig. 35, ist durch folgende Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben, und läßt sich daher in folgende Dreiecke zerlegen:

Eckpunkte.	Coordinaten.		Dreiecke.	
	x	*y*	Nummer.	Inhalte.
A	36,0	0	I.	504,00
B	19,2	28,0	II.	595,76
C	—17,8	36,1	III.	634,68
D	—39,6	9,0	IV.	733,14
E	—23,0	—31,8	V.	683,30
F	22,0	—29,0	VI.	522,00

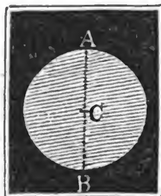
Hiernach ist der Inhalt der ganzen Figur: 3672,88.

§. 15. Flächenräume krummliniger Figuren.

Der Inhalt einer Kreisfläche, Fig. 36, ergibt sich aus dem Halbmesser $CA = CB = r$ durch die Formel:

$$\text{I.}\quad F = \pi r^2,$$

Fig. 36.



und aus dem Durchmesser $AB = d = 2r$ durch die Formel:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854 \, . \, d^2.$$

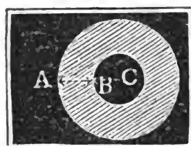
Umgekehrt entspricht dem kreisförmigen Flächenraume F der Halbmesser

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}5642 \sqrt{F},$$

und der Durchmesser $d = 1{,}1284 \sqrt{F}$.

Für die Ringfläche, Fig. 37, mit den Halbmessern $CA = r_1$ und $CB = r_2$ ist:

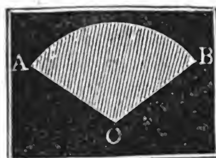
Fig. 37.



II. $F = \pi (r_1^2 - r_2^2)$
$= \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$.

Für den Kreisausschnitt, Fig. 38, mit dem Halbmesser $CA = r$ und dem Centriwinkel $ACB = \beta^0$ ist

Fig. 38.



III. $F = \frac{1}{2} br = \frac{1}{2} \beta r^2 = \frac{\beta^0}{360^0} . \pi r^2$

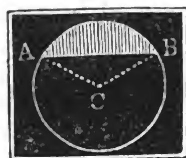
$= 0{,}008727\ \beta^0\ r^2$, wenn β den Bogen vom Halbmesser 1 und b den Bogen AB des Ausschnittes mit dem Halbmesser r bezeichnet. Umgekehrt ist:

$$\beta^0 = \frac{F}{\pi\ r^2} . 360^0 \text{ und}$$

$$r = \sqrt{\frac{360^0}{\beta^0} \cdot \frac{F}{\pi}} = \sqrt{\frac{2F}{\beta}}.$$

Für den Kreisabschnitt AB, Fig. 39, mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ und dem Centriwinkel $ACB = \beta^0$ hat man:

Fig. 39.



IV. $F = (\beta - sin.\ \beta) \frac{r^2}{2}$

$= \left(\frac{\beta^0 \pi}{180^0} - sin.\ \beta\right) \frac{r^2}{2}$

$= (0{,}017453 \beta^0 - sin. \beta) \frac{r^2}{2}$.

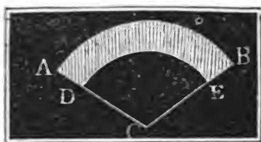
Um aus dem Inhalte F und dem Halbmesser r den Centriwinkel zu finden, muß man den Näherungsweg einschlagen. Es ist nämlich $\beta - sin.\ \beta = \frac{r^2}{2F}$ zu setzen. Ist β_1 ein Näherungswerth von β, so läßt sich setzen:

$$\beta = \left(\frac{r^2}{2\ F} + sin. \beta_1 - \beta_1\ cos. \beta_1\right) : (1 - cos. \beta_1).$$

Diese Bestimmung wird durch die Tafel III. wesentlich erleichtert.

Der Inhalt des Ringstückes *AE*, Fig. 40, ergibt sich aus den Halbmessern $CA = r_1$ und $CD = r_2$ und aus den Centriwinkeln $ACB = \beta$ durch die Formel:

Fig. 40.



$$\text{V.} \quad F = \frac{\beta\,(r_1^2 - r_2^2)}{2}$$

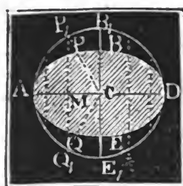
$$= \frac{\beta^0 \pi}{360^0}\,(r_1^2 - r_2^2)$$

$$= 0{,}008727\ \beta^0\,(r_1^2 - r_2^2).$$

Der Inhalt einer Ellipse, Fig. 41, wird aus beiden Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ durch die Formel

$F = \pi a b$ gefunden.

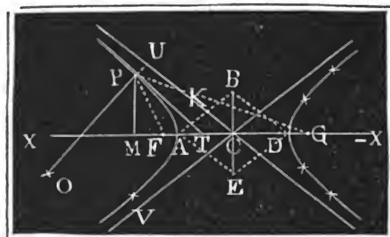
Fig. 41.



Der Inhalt des elliptischen Segmentes *APQ* ist $= \frac{b}{a}$mal Kreissegment $A_1 P_1 Q_1 = (\beta - \sin.\beta)\frac{ab}{2}$, wenn β den Centriwinkel $P_1 C Q_1$ des entsprechenden Kreissegmentes bezeichnet.

Sind a und b die Halbaxen *CA* und *CB* einer Hyperbel, Fig. 42, und ist e die Excentricität $\sqrt{a^2+b^2}$, u aber eine Abscisse auf der einen Asymptote, so hat man für das durch die Ordinaten *KA* und *UP* begrenzte und zwischen der Curve und zwischen der Asymptote liegende Flächenstück:

Fig. 42.



$$F = \frac{ab}{2} \log nat. \left(\frac{2u}{e}\right).$$

Daher der Name hyperbolische Logarithmen.

Der Inhalt eines Parabelsegmentes *AMP*, Fig. 43, ist zwei Drittel von dem umschließenden Rechtecke *AMPQ* $= \frac{2}{3} xy$. Ebenso läßt sich für ein niedriges Segment *PQ*, Fig. 44, setzen: $F = \frac{2}{3}\, s\, h$, wenn *s* die Sehne *PQ* und *h* die Höhe *AM* bezeichnet.

Fig. 43.

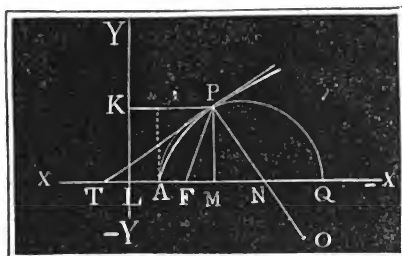
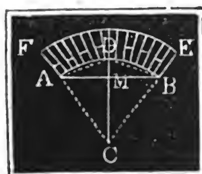


Fig. 44.



Fig. 45.



Beispiel 1. Von der Stirnfläche *AE* eines Gewölbes, Fig. 45, mißt der innere Halbmesser *CA* = 8,5 Fuß, die Dicke *AF* = $1\frac{3}{4}$ Fuß und der Centriwinkel 104°, 15′, welches ist der Inhalt derselben? $F =$ $0{,}008727 . 104^{0}{,}25 . (8{,}5 + 10{,}25) . 1{,}75$ $= 0{,}008727 . 104^{0}{,}25 . \frac{525}{16} = 29{,}85$ Quadrat-Fuß.

Beispiel 2. Von dem elliptischen Segmente *APQ*, Fig. 41, mißt die Höhe *AM* = 5 Zoll, die Sehne *PQ* = 16 Zoll und die Halbaxe $CA = a = 15$ Zoll, man sucht den Inhalt desselben. Zunächst ist für den Centriwinkel $P_1 C Q_1 = \beta$ des entsprechenden Kreissegmentes:

$$cos.\ \tfrac{1}{2}\beta = \frac{CM}{CP_1} = \frac{15-5}{15} = \tfrac{10}{15} = \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{2}\beta = 48^{0}, 11', 23'',$$

daher $\beta = 96^{0}, 22', 46''$, und die halbe Sehne des Kreises: $P_1 M = 15\ sin.\ \frac{1}{2}\beta = 11{,}18$ Zoll, hieraus die Halbaxe

$$CB = b = \frac{P\ M}{P_1\ M}\ .\ CB_1 = \frac{8\ .\ 15}{11{,}18} = 10{,}736 \text{ Zoll, und}$$

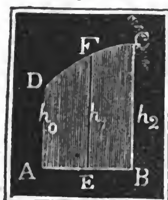
endlich der gesuchte Inhalt des elliptischen Segmentes:

$$F = (\beta - \sin.\ \beta)\ \frac{ab}{2} = (1{,}68214 - 0{,}99381)\ \frac{15\ .\ 10{,}736}{2}$$
$= 55{,}42$ Quadrat=Zoll.

§. 16. Simpson's Regel.

Aus der Grundlinie $AB = a$ und den drei in gleichen Abständen gemessenen Höhen h_0, h_1 und h_2 der Figur in Fig. 46 ergibt sich die mittlere Höhe durch die Formel:

Fig. 46.

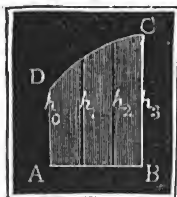


$h = \dfrac{h_0 + 4\,h_1 + h_2}{6}$ und der Inhalt, jedoch nur annähernd, wenn CD kein Parabelbogen ist:

$$\text{I.}\quad F = ah = \frac{a\,(h_0 + 4h_1 + h_2)}{6}.$$

Aus der Grundlinie $A\ B = a$, Fig. 47, und den vier in gleichen Abständen von einander liegenden Höhen h_0, h_1, h_2, h_3 folgt der mittlere Werth dieser Höhen:

Fig. 47.

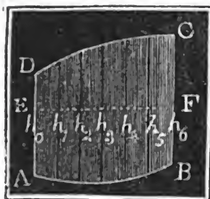


$h = \dfrac{h_0 + 3\,(h_1 + h_2) + h_3}{8}$ und daher der Inhalt:

$$\text{II.}\quad F = \frac{a\,[h_0 + 3\,(h_1 + h_2) + h_3]}{8}.$$

Für den Inhalt einer durch die Länge $EF = a$ und durch die Höhen h_0, h_1, h_2 . . . h_n gegebenen Figur, Fig. 48, hat man annähernd:

Fig. 48.



$$\text{III.}\quad F = (\tfrac{1}{2}\,h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,h_n)\ a,$$ oder genauer, wenn die Zahl der Theile eine gerade ist:

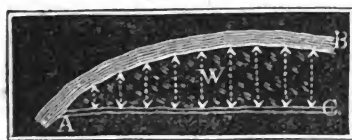
$$\text{IV.}\quad F = [h_0 + 4(h_1 + h_3 + \ldots + h_{n-1}) + 2\,(h_2 + h_4 + \ldots + h_{n-2}) + h_n]\ \frac{a}{3n}.$$

Die letzte Formel ist unter dem Namen der Simpson=

schen Regel bekannt, und läßt sich auch in dem Falle anwenden, wenn die Zahl der gleich breiten Streifen, in welche die Fläche durch die Höhen h_0, h_1, h_2 u. s. w. zerlegt wird, eine ungerade ist. In diesem Falle berechnet man ein Stück mit 3 Streifen nach der Regel II. und das übrige Stück nach der letzten Formel IV.

Beispiel. Um den Inhalt einer Wiese W, Fig. 49, zu finden, hat man über der 45 Ruthen langen Grundlinie in gleichen Abständen 10 Perpendikel errichtet und für ihre Längen folgende Werthe gefunden: 0 Ruthen; 4,8; 6,8; 8,7; 10,0; 12,1; 12,3; 13,0; 12,0; 11,2.

Fig. 49.



Hieraus berechnet sich der Flächenraum über den ersten 30 Ruthen Grundfläche:

$$F_1 = [0 + 4(4{,}8 + 8{,}7 + 12{,}1) + 2(6{,}8 + 10{,}0) + 12{,}3]\,\frac{30}{18}$$

$$= 148{,}3 \,.\, {}^5\!/_3 = 237{,}16 \text{ Quadratruthen;}$$

und der Flächenraum über den letzten 15 Ruthen:

$$F_2 = [12{,}3 + 3\,(13 + 12) + 11{,}2]\,\frac{15}{8}$$

$$= 98{,}5 \,.\, {}^{15}\!/_8 = 184{,}69 \text{ Quadratruthen;}$$

es ist demnach der Flächenraum der ganzen Wiese

$$F = F_1 + F_2 = 421{,}85 \text{ Quadrat-Ruthen.}$$

Zweites Kapitel.

Stereometrie.

---

§. 17. Sphärische Dreiecke.

Die Summe aller drei Seiten eines sphärischen Dreieckes ist größer als Null und kleiner als 2π (vier Rechtwinkel). Die Summe aller drei Winkel eines sphärischen Dreieckes ist größer als zwei und kleiner als sechs Rechtwinkel. In jedem Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel, sowie dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Ein sphärisches Dreieck ist durch drei Stücke gegeben, so daß sich aus ihnen die übrigen drei Stücke construirend und rechnend finden lassen. Sind drei Seiten gegeben, so fordert die Möglichkeit eines Dreieckes, daß zwei zusammen die dritte an Größe übertreffen; sind drei Winkel gegeben, so muß die Summe zweier kleiner sein, als die Summe aus 2 Rechtwinkeln und dem dritten Winkel.

Ein sphärisches Dreieck heißt ein rechtwinkeliges, wenn es einen Rechtwinkel enthält. Doch kann es deren auch zwei enthalten, und es können selbst alle drei Winkel Rechtwinkel sein.

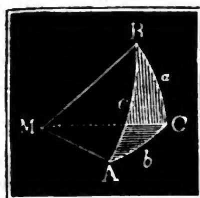
Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Seiten, und ebenso die Winkel unter sich gleich.

Ein gleichschenkeliges Dreieck hat zwei gleiche Seiten, sowie auch zwei gleiche Winkel (in der Grundlinie).

§. 18. Auflösung rechtwinkelig sphärischer Dreiecke.

Wenn in einem rechtwinkelig sphärischen Dreiecke ABC, Fig. 50 (s. folg. S.), die dem Rechtwinkel C gegenüber

Fig. 50.



liegende Seite oder Hypothenuse AB durch c, die beiden anderen Seiten oder Katheten BC und AC aber durch a und b bezeichnet werden, so gibt die folgende Tafel an, wie aus je zwei Stücken desselben die übrigen durch Rechnung zu finden sind.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b	c	$\cos. c = \cos. a \cos. b.$
	A	$\text{tang.} A = \frac{\text{tang.} a}{\sin. b}.$
	B	$\text{tang.} B = \frac{\text{tang.} b}{\sin. a}.$
a, c	b	$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}.$
	A	$\sin. A = \frac{\sin. a}{\sin. c}.$
	B	$\cos. B = \text{tang.} a \text{ cotang.} c.$
a, A	b	$\sin. b = \text{tang.} a \text{ cotang.} A.$
	c	$\sin. c = \frac{\sin. a}{\sin. A}.$
	B	$\sin. B = \frac{\cos. A}{\cos. a}.$
b, A	a	$\text{tang.} a = \sin. b \text{ tang.} A.$
	c	$\text{tang.} c = \frac{\text{tang.} b}{\cos. A}.$
	B	$\cos. B = \cos. b \sin. A.$

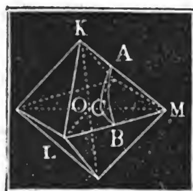
Gegeben.	Gesucht.	Formel.
c, A	a	$sin.\ a = sin.\ c\ sin.\ A.$
	b	$tang.\ b = tang.\ c\ cos.\ A.$
	B	$cotang.\ B = cos.\ c\ tang.\ A.$
A, B	a	$cos.\ a = \frac{cos.\ A}{sin.\ B}.$
	b	$cos.\ b = \frac{cos\ B}{sin.\ A}.$
	c	$cos.\ c = cotang.\ A\ cotang.\ B$

Beispiel 1. Unter welchem Winkel stoßen zwei Ebenen *MAC* und *MAB*, Fig. 50, zusammen, wenn eine Linie *MB* in der zweiten Ebene mit der ersten Ebene den Winkel *BMC* = 57°, 16′ und mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie den Winkel *BMA* = 76°, 35′ einschließt? Hier ist a = 57°, 16′ und c = 76°, 35′ gegeben und A gesucht, daher zu setzen: $sin.\ A = \frac{sin.\ a}{sin.\ c}$.

$log.\ sin.\ 57°,16' = 0,92490-1$
$log.\ sin.\ 76°,35' = 0,98798-1$
$log.\ sin.\ A = 9,93692,\quad A = 59°, 51', 40''.$

Beispiel 2. Man hat gefunden, daß bei dem in Figur 51 abgebildeten Schwefelkrystall die Flächen in der Polkante *MK* unter dem Winkel von 84°, 24′ und an der Mittelkante *ML* unter dem Winkel von 143°, 8′ zusammenstoßen und sucht nun die Axenverhältnisse dieses Krystalles. Es läßt sich aus *M* ein rechtwinkelig sphärisches Dreieck *ABC* beschreiben, in welchem $A = \frac{84°,24'}{2}$

Fig. 51.

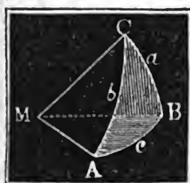


$= 42^\circ, 12'$ und $B = \frac{143^\circ,8'}{2} = 71^\circ,34'$ ist, und die Katheten $BC = a$ und $AC = b$ durch die Formeln: $cos.\ a = \frac{cos. 42^\circ,12'}{sin. 71^\circ,34'}$ und $cos. b = \frac{cos.\ 71^\circ,34'}{sin.\ 42^\circ,12'}$ bestimmt werden.

Es ergibt sich so $a = 38^\circ,39\frac{1}{2}'$ und $b = 61^\circ,55'$. Setzt man nun die Halbare $OK = 1$, so folgt die Halbare $OM = cotang.\ b = cotang.\ 61^\circ,55' = 0,5336$ und die Halbare $OL = OM\ tang.\ a = 0,5336 \cdot 0,8 = 0,4268.$

§. 19 Auflösung schiefwinkelig sphärischer Dreiecke.

Fig. 52.



In dem schiefwinkelig sphärischen Dreiecke ABC, Fig. 52, bezeichnen a, b, c die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten BC, AC und AB. Aus drei dieser sechs Stücken ergeben sich die übrigen drei mit Hilfe folgender Formeln:

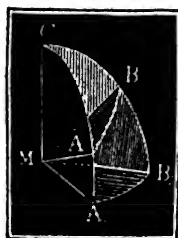
Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b, c	A	$cos. A = \frac{cos. a - cos\ b\, cos. c}{sin.\ b\ sin.\ c}$ oder, $a + b + c = s$ gesetzt, $cos\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sin. \frac{s}{2}\ sin.\ \left(\frac{s}{2} - a\right)}{sin.\ b\ sin.\ c}}$, auch $sin.\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sin. \left(\frac{s}{2} - b\right) sin. \left(\frac{s}{2} - c\right)}{sin.\ b\ sin.\ c}}$ u. s. w.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b, A	B	$\sin. B = \frac{\sin.\ b\ \sin.\ A}{\sin.\ a}$.
	c	$\operatorname{tang}. \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tang}. \left(\frac{a-b}{2}\right) \sin. \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin. \left(\frac{A-B}{2}\right)}$.
	C	$\operatorname{tang}. \frac{C}{2} = \frac{\sin. \left(\frac{a\ \ b}{2}\right)}{\operatorname{tang}. \left(\frac{A-B}{2}\right) \sin. \left(\frac{a+b}{2}\right)}$.
a, b, C	A	$\operatorname{tang}. \left(\frac{A-B}{2}\right) = \operatorname{cotg}. \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin. \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin. \left(\frac{a+b}{2}\right)}$,
	B	$\operatorname{tang}. \left(\frac{A+B}{2}\right) = \operatorname{cotg}. \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos. \left(\frac{a\ \ b}{2}\right)}{\cos. \left(\frac{a+b}{2}\right)}$, hieraus $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$, $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$.
	c	$\sin.\ c = \frac{\sin.\ a\ \sin.\ C}{\sin.\ A}$, oder unmittelbar $\cos.\ c = \cos. a\ \cos. b + \sin. a\ \sin. b\ \cos.\ C$.
A, B, C	a	$\cos.\ a = \frac{\cos.\ A + \cos. B\ \cos.\ C}{\sin.\ B\ \sin.\ C}$, oder $A + B + C = S$ gesetzt, $\cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos.\left(\frac{S}{2} - B\right) \cos.\left(\frac{S}{2} - C\right)}{\sin.\ B\ \sin.\ C}}$, oder $\sin. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos. \frac{S}{2}\ \cos.\ \left(\frac{S}{2} - A\right)}{\sin.\ B\ \sin.\ C}}$.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
A, B, a	b	$\sin. b = \frac{\sin. B \sin. a}{\sin. A}$ Die übrigen Stücke wie oben.
A, B, c	a	$\tang. \left(\frac{a-b}{2}\right) = \tang. \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin. \left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin. \left(\frac{A+B}{2}\right)}$,
	b	$\tang. \left(\frac{a+b}{2}\right) = \tang. \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos. \left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos. \left(\frac{A+B}{2}\right)}$, hieraus $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ und $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$.
	C	$\sin. C = \frac{\sin. c \sin. A}{\sin. a}$, oder unmittelbar $\cos. C = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B \cos. c$.

Beispiel. Man soll die Horizontalprojection $A_1 M B_1$ des Winkels AMB, Fig. 53, mit Hilfe der Elevationswinkel AMA_1 und BMB_1, der Schenkel MA und MB berechnen. Es sei $AMB = 57^\circ, 40'$, $AMA_1 = 19^\circ, 15'$ und $BMB_1 = 34^\circ, 35'$. Durch Ergänzung der Elevationswinkel zu 90° gelangt man zu einem sphärischen Dreiecke ABC, in welchem die Seite $AB = c$ der gegebene Winkel $57^\circ, 40'$ ist, die Seiten $AC = b$ und $BC = a$ aber die Ergänzungen der Elevationswinkel zu 90°

Fig. 53.



sind und der Winkel C der gesuchten Projection A_1MB_1 gleich ist. Man hat hiernach:

$$\left.\begin{array}{l} c = 57^\circ,\ 40' \\ b = 70^\circ,\ 45' \\ a = 55^\circ,\ 25' \end{array}\right\} s = 183^\circ,\ 50' \left\{\begin{array}{l} \frac{s}{2} = 91^\circ,\ 55' \\ \frac{s}{2} - c = 34^\circ, 15' \end{array}\right\} \text{ und}$$

$$\text{daher } \cos.\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin.\ 91^\circ,\ 55' \ .\ \sin.\ 34^\circ,\ 15'}{\sin.\ 55^\circ,\ 25' \ .\ \sin.\ 70^\circ,\ 45'}}.$$

$log. sin. 91^\circ, 55' = 0,99976-1$ $log. sin. 55^\circ, 25' = 0,91556-1$

$log. sin. 34^\circ, 15' = 0,75036-1$ $log. sin. 70^\circ, 45' = 0,97501-1$

$0,75012-1$ $0,89057-1$

$0,89057-1$

$1,85955-2 : 2$

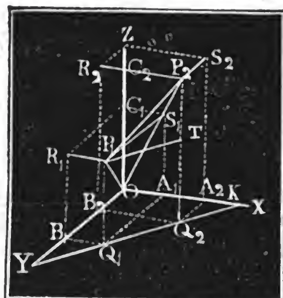
$log. cos. \frac{C}{2} = 9,92977$, $\frac{C}{2} = 31^\circ, 43'$, daher

$\angle A_1MB_1 = 62^\circ, 46'$.

§. 20. Coordinaten im Raume.

Ein Punkt P_1 im Raume, Fig. 54, ist durch seine Projectionen Q_1, R_1, S_1 in drei rechtwinkelig zu einander stehenden Coordinatebenen oder durch die drei Coordinaten $OA_1 = P_1R_1 = x_1$, $OB_1 = P_1S_1 = y_1$ und $OC_1 = P_1Q_1 = z_1$ bestimmt. Ist noch ein Punkt P_2 durch seine Coordinaten $OA_2 = x_2$, $OB_2 = y_2$ und $OC_2 = z_2$ gegeben, so hat man für die Entfernung beider Punkte:

Fig. 54.



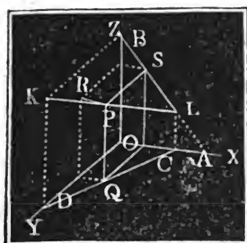
$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, für ihre Horizontalprojection: $\overline{Q_1Q_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, für ihren Neigungswinkel $P_2P_1T = \varphi$ gegen die Horizontalebene

$$tang.\ \varphi = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},$$ und für den Winkel $Q_1KO = \psi$, welche ihre Horizontalprojection mit der ersten Axe $X\bar{X}$ einschließt,

$$tang.\ \psi = - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Eine Linie *KL* im Raume, Fig. 55, ist durch zwei ihrer Projectionen *AB* und *CD*, und also auch durch die Gleichungen dieser gegeben. Sind die Parameter *OA* und *OB* der ersten Projection *a* und *b* und die Parameter *OC* und *OD* der zweiten *c* und *d*, so hat man die Gleichungen der Graden

Fig 55.

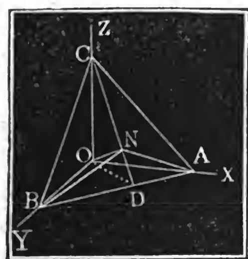


$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ und } \frac{x}{c}+\frac{z}{d}=1,$$

und es bezeichnen x, y, z die zusammengehörigen Coordinaten eines Punktes *P* in derselben.

Eine Ebene *ABC*, Fig. 56, ist durch die Grundschnitte *AB*, *AC* und *BC*, oder durch die drei Parameter $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ bestimmt, und für jeden Punkt *P* in derselben gilt die Gleichung

Fig. 56.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Der Winkel $CDO = \varphi$, unter dem die Ebene *ABC* die Grundebene *XY* schneidet, ist bestimmt durch die Gleichung

$$tang.\ \varphi = \frac{CO}{DO} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$

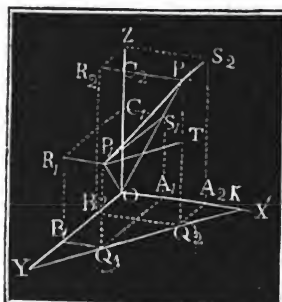
und die Winkel $OAN = \alpha$, $OBN = \beta$, $OCN = \gamma$, unter welchen sie die Axe schneidet, ergeben sich aus der Nor-

malen $ON = n = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ durch die Formeln

$$\sin.\ \alpha = \frac{n}{a},\ \sin.\ \beta = \frac{n}{b},\ \sin.\ \gamma = \frac{n}{c}.$$

Der Winkel $POP_1 = \varphi$, zwischen zwei aus dem Anfangspunkte O gehenden Linien OP_1 und OP_2, Fig. 57, ist mittels der Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zweier Punkte P_1 und P_2 in diesen Linien durch die Formel:

Fig. 57.



$$\cos.\ \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}$$

oder, wenn die Linien mit den Axen OX, OY und OZ die Winkel α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 einschließen, durch

$$\cos.\ \varphi = \cos.\alpha_1 \cos.\alpha_2 + \cos.\beta_1 \cos.\beta_2 + \cos.\gamma_1 \cos.\gamma_2$$

bestimmt. Auch ist $\cos.\alpha_1^2 + \cos.\beta_1^2 + \cos.\gamma_1^2 = 1$,
und $\cos.\alpha_2^2 + \cos.\beta_2^2 + \cos.\gamma_2^2 = 1$.

Zwei Linien

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{a_1} + \dfrac{y}{b_1} = 1 \\ \dfrac{x}{c_1} + \dfrac{z}{d_1} = 1 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{a_2} + \dfrac{y}{b_2} = 1 \\ \dfrac{x}{c_2} + \dfrac{z}{d_2} = 1 \end{array}\right\}$$

schneiden sich, wenn $\dfrac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{b_1 a_2 - a_1 b_2} = \dfrac{c_1 c_2 (d_1 - d_2)}{d_1 c_2 - c_1 d_2}$ ist, und für den Durchschnittswinkel φ gilt die Formel:

$$\cos.\varphi = \frac{1 + \dfrac{b_1\ b_2}{a_1\ a_2} + \dfrac{d_1 d_2}{c_1\ c_2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d_1}{c_1}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{c_2}\right)^2}}.$$

Für den Winkel ψ, unter welchem sich die Ebenen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ und } \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 1$$

schneiden, ist $\cos.\psi = \frac{\frac{1}{aa_1} + \frac{1}{bb_1} + \frac{1}{cc_1}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}}}$.

Beispiel. Zwei Punkte P_1 und P_2 sind durch folgende in der Mittagslinie, in der Ostwestlinie und in der Schwerrichtung eines Punktes O gemessene Coordinaten $x_1 = 31{,}5$ Ruthen, $y_1 = 16{,}4$ R., $z_1 = 1{,}5$ R.; $x_2 = 103{,}1$ R., $y_2 = -19{,}8$ R., $z_2 = 7{,}4$ R. bestimmt, man sucht die Größe und Lage der Verbindungslinie. Die Größe ist:

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(103{,}1 - 31{,}5)^2 + (19{,}8 + 16{,}4)^2 + (7{,}4 - 1{,}5)^2}$
$= \sqrt{71{,}6^2 + 36{,}2^2 + 5{,}9^2} = \sqrt{6471{,}8} = 80{,}45$ Ruthen; ferner für den Winkel, welchen die Horizontalprojection mit der Mittagslinie einschließt, $\tan g.\ \psi = \frac{36{,}2}{71{,}6}$, oder $\log.\ \tan g.\ \psi = 9{,}70380$, $\psi = 26^0{,}49'$, und für den Winkel φ des Ansteigens:

$\sin.\ \varphi = \frac{5{,}9}{80{,}45}$, $\log.\ \sin.\ \varphi = 8{,}86534$, $\varphi = 4^0,\ 12^1/_3{}'$.

§. 21. Inhalte ebenflächiger Körper.

Der Inhalt eines Würfels BCD, Fig. 58, ergibt sich aus einer Seite $AB = AC = AD = a$ durch die Formel:

$$V = a^3;$$

auch ist umgekehrt:

$$a = \sqrt[3]{V}.$$

Fig. 58.

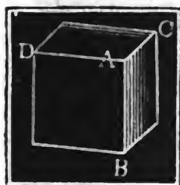
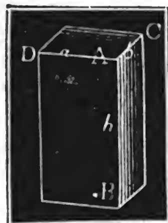


Fig. 59.



Der Inhalt eines geraden Parallelepipedes BCD, Fig. 59, ergibt aus seinen drei rechtwinkelig aufeinander stehenden Seiten a, b, h; $V = abh$.

Der Inhalt eines schiefwinkeligen Parallelepipedes ABD,

Fig. 60, wie der eines Prismas überhaupt, z. B. *ABD*, Fig. 61, ist, wenn F die Grundfläche und h die senkrechte Höhe bezeichnet:

Fig. 60.

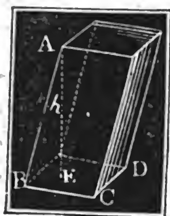
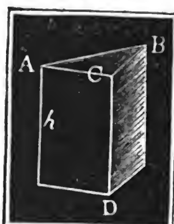


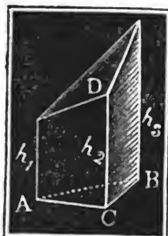
Fig. 61.



$$V = Fh.$$

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas *ABD*, Fig. 62, bestimmt sich aus der Grundfläche $ABC = F$ und den drei Höhen h_1, h_2, h_3 durch

Fig. 62.



$$V = \frac{F\,(h_1 + h_2 + h_3)}{3}.$$

Der Inhalt einer Pyramide *ABCD*, Fig. 63, ergibt sich aus der Grundfläche $ABC = F$ und Höhe $DE = h$:

$$V = \frac{Fh}{3}.$$

Für die abgekürzte Pyramide *ACH*,

Fig. 63.

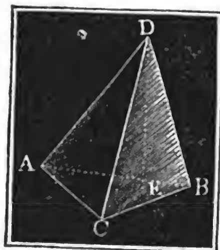


Fig. 64.

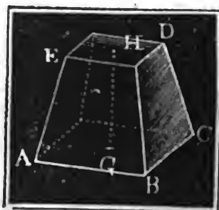
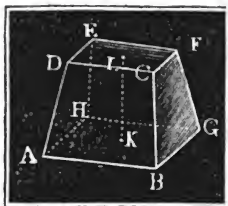


Fig. 64, mit den Grundflächen $AC = F_1$ und $DE = F_2$, und der Höhe $GH = h$, ist:

$$V = (F_1 + \sqrt{F_1 F_2} + F_2)\ \frac{h}{3}.$$

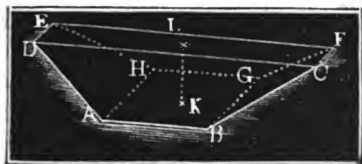
Fig. 65.



Für den Obelisken ACF, Fig. 65, und für den Damm ACE, Fig. 66, ist, wenn die rectangulären Grundflächen von den Seiten $AB = a_1$, $BG = b_1$, $CD = a_2$ und $DE = b_2$ begrenzt werden und um die Höhe $KL = h$ von einander abstehen:

$$V = [2\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2) + a_1\,b_2 + a_2\,b_1]\,\frac{h}{6}.$$

Fig. 66.



Für den Keil ACG, Fig. 67, ist, wenn die rectanguläre Grundfläche AC von den Seiten $AB = a_1$ und $BC = b_1$ begrenzt wird und ihr die Kante $DE = a_2$ im Abstande $GH = h$ gegenübersteht: $V = (2a_1 + a_2)\,\frac{b_1\,h}{6}$.

Sind die Coordinaten oder Abstände der Eckpunkte

Fig. 67.

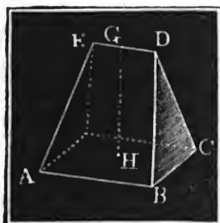
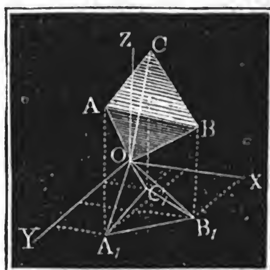


Fig. 68.



A, B, C der Basis ABC einer dreiseitigen Pyramide, Fig. 68, von drei durch die Spitze O gelegten orthogonalen Coordinatebenen YZ, XZ und XY: x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 und

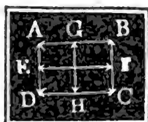
z_1, z_2, z_3, so hat man für das Volumen dieser Pyramide:
$V = \frac{1}{6}(x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1)$.

Beispiel 1. Ein Teichdamm ist oben 25 Fuß, unten 80 Fuß breit, oben 190 Fuß und unten 115 Fuß lang und im Mittel 30 Fuß hoch, wie groß ist sein Inhalt? Es ist $V = [2(25.190 + 80.115) + 25.115 + 80.190].\frac{30}{6} = 45975.5$ $= 229875$ Cubik-Fuß.

Beispiel 2. Ein nicht genau gearbeiteter parallelepipedischer Kasten hat bei 5 Fuß Höhe folgende Längen- und Breitendimensionen:

Im untern Querschnitt *AC*, Fig. 69, ist die Länge *AB* an der einen Seite = 81,40 Zoll, die Länge *EF* in der Mitte = 81,95 Zoll, die Länge *CD* an der zweiten Seite = 80,8 Zoll, die Breite *AD* an der einen Seite = 35,25 Zoll, die Breite *GH* in der Mitte = 36,05, die Breite *BC* an der zweiten Seite = 35,45 Zoll; ferner im obern Querschnitte sind die Längen = 82,35; 83,10; 82,55, die Breiten 36,10; 37,00; 36,35 Zoll, und endlich in einem Querschnitte auf der halben Höhe die Längen 81,45; 83,40; 82,00, und die Breiten 35,85; 37,15; 36,25 Zoll. Hieraus erhält man mittels der Simpson'schen Regel die mittlere Länge des unteren Querschnittes $= \frac{81,40 + 4.81,95 + 80,80}{6} = 81,67$ Zoll,

Fig. 69.



und die mittlere Breite desselben $= \frac{35,25 + 4.36,05 + 35,45}{6}$ $= 35,817$ Zoll, daher den Inhalt desselben $= 81,67 . 35,817$ $= 2925,17$ Quadrat-Zoll.

Auf gleiche Weise ergibt sich der Inhalt des oberen Querschnittes = 82,883 . 36,742 = 3045,29, und der des mittleren = 82,842 . 36,783 = 3047,18 Quadrat-Zoll. Hiernach läßt sich der mittlere Querschnitt

$= \frac{2925,17 + 4.3047,18 + 3045,29}{6} = 3026,53$ Quadr.-Zoll

= 21,017 Quadrat-Fuß und der Inhalt des Kastens = 5 . 21,017 = 105,085 Cubik-Fuß setzen.

§. 22. Oberflächen krummflächiger Körper.

Der abgewickelte Mantel eines geraden Cylinders ist ein Rechteck, dessen Länge dem Umfange $2\pi r$ der Basis des Cylinders und dessen Breite der Höhe h desselben, dessen Inhalt folglich $O = 2\pi r h$ ist.

Der abgewickelte Mantel eines geraden Kegels ist ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seitenlänge $\sqrt{r^2+h^2}$ des Kegels, und dessen Bogenlänge dem Umfange $2\pi r$ der Basis des Kegels, dessen Inhalt also gleich ist:

$$O = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Die Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser r ist $O = 4\pi r^2$, d. i. gleich dem vierfachen Inhalte ihres größten Kreises. Der Halbmesser, welcher der gegebenen Oberfläche O entspricht:

$$r = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{O}{\pi}} = 0{,}2821 \sqrt{O}.$$

Der Inhalt einer Kugelzone AD, Fig. 70, sowie der einer Calotte ist gleich dem Inhalte $2\pi r h$ des Mantels eines Cylinders FH, welcher mit der Zone gleiche Höhe $MN = h$ und mit der Kugel gleichen Halbmesser $CA = CO = r$ hat. Ist a der Halbmesser DA der Basis einer Kugelmütze (Calotte), Fig. 71, und h die Höhe DE derselben, so hat man $r = \frac{a^2+h^2}{2h}$, und daher $O = \pi (a^2 + h^2)$. Diese Formel läßt sich annähernd für niedrige Calotten überhaupt gebrauchen.

Fig. 70.

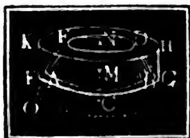
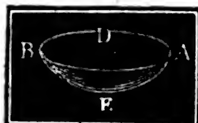


Fig. 71.

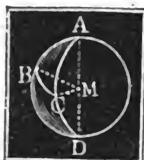


Der Inhalt eines sphärischen Zweieckes $ABDC$, Fig. 72, verhält

sich zur ganzen Kugeloberfläche wie der Winkel A desselben zu 4 Rechtwinkeln, es ist also:

$$O = \frac{A^0}{360^0} \cdot 4\pi r^2 = \frac{A^0}{90^0} \cdot \pi r^2.$$

Fig. 72.



Der Inhalt eines sphärischen Dreieckes ABC, Fig. 72, ist, wenn A, B, C seine drei Winkel sind, und r den Kugelhalbmesser MA bezeichnet:

$$O = \left(\frac{A+B+C}{180^0} - 1\right) \pi r^2.$$

Beispiel 1. Eine Calotte von 3 Fuß Höhe und 5 Fuß Halbmesser an der Basis hat den Inhalt $O = 3{,}1416\,(5^2+3^2) = 3{,}1416 \,.\, 34 = 106{,}81$ Quadrat-Fuß. 2) Ein sphärisches Dreieck, dessen drei Winkel zusammen 250 Grad betragen, hat bei dem Kugelhalbmesser $r = 5$ Zoll, der Inhalt $O = \left(\frac{250}{180} - 1\right) . 25\,\pi$

$= \frac{7 \,.\, 25 \,.\, \pi}{18} = 30{,}54$ Quadrat-Zoll.

§. 23. Inhalte krummflächiger Körper.

Der Inhalt eines Cylinders, Fig. 73, ist, wenn r den Halbmesser AM und h die Höhe MN bezeichnet:

$$V = \pi r^2 h.$$

Fig. 73.

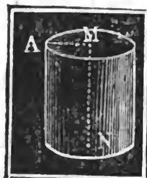


Fig. 74.



Der Inhalt eines hohlen Cylinders oder der einer Röhre, Fig. 74, ist, wenn r_1 den äußern Halbmesser AM und r_2 den lichten oder innern Halbmesser BM, h aber die Höhe MN bezeichnet:

$V = \pi\,(r_1{}^2 - r_2{}^2)\,h = 2\pi r b h$, wenn $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ und $b = r_1 - r_2$ ist.

Der Inhalt eines Gewölbes, Fig. 75, ist:

$V = \frac{\beta^0}{360} \cdot \pi (r_1^2 - r_2^2) h$, wenn β^0 den Centriwinkel und h die Länge desselben bezeichnet (s. §. 15.)

Fig. 75.

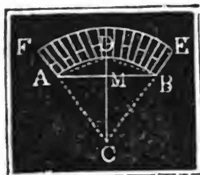


Fig. 76.

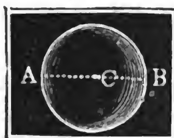


Für den Kegel ABC, Fig. 76, mit dem Halbmesser $MA = r$ und der Höhe $CM = h$ hat man: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, und für den abgekürzten Kegel, Fig. 77, mit den Halbmessern $AN = r_1$ und $BM = r_2$ und der Höhe $MN = h$ ist: $V = \pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \frac{h}{3}$.

Fig. 77.



Fig. 78.



Der Inhalt der Kugel, Fig. 78, ergibt sich aus dem Halbmesser $CA = r$ oder Durchmesser $AB = d$ durch die Formeln:

$$V = \tfrac{4}{3} \pi r^3 = 4{,}1888 r^3 \text{ oder } V = \frac{\pi}{6} d^3 = 0{,}5236\, d^3.$$

Umgekehrt ist $r = \sqrt[3]{\frac{3\ V}{4\ \pi}} = 0{,}62035 \sqrt[3]{V}.$

Fig. 79.



Der Inhalt einer Hohlkugel mit dem äußeren Halbmesser r_1 und dem inneren Halbmesser r_2 ist $V = \tfrac{4}{3}\pi (r_1^3 - r_2^3)$.

Für den Kugelausschnitt oder den durch Umdrehung eines Kreisausschnittes erzeugten Körper ABC, Fig. 79, hat man, wenn r den Kugelhalbmesser CA

und h die Höhe DE der entsprechenden Calotte bezeichnet:

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

Für den Kugelabschnitt AB ist:

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right), \text{ oder,}$$

wenn a den Halbmesser $EA = EB$ der Basis bezeichnet:

$$V = \frac{\pi}{6} h (3 a^2 + h^2).$$

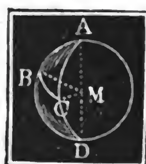
Für ein niedriges Segment überhaupt ist zu setzen, annähernd: $V = \frac{\pi a^2 h}{2}$.

Der Inhalt einer körperlichen Kugelzone, sowie der einer Kugelpfanne, Fig. 80, ergibt sich durch Subtraction zweier Kugelsegmente.

Fig. 80.



Fig. 81.

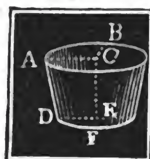


Der Inhalt eines körperlichen Dreieckes $ABCM$, Fig. 81, ist, wenn r den Halbmesser $MA = MB = MC$ bezeichnet:

$$V = \left(\frac{A^0 + B^0 + C^0}{180^0} - 1\right) \frac{\pi r^3}{3}.$$

Für einen Kübel, Fig. 82, mit unähnlichen elliptischen Grundflächen, deren Halbaxen $CA = a$, $CB = b$, $ED = a_1$ und $EF = b_1$ sind, und deren Höhe $CE = h$ mißt, hat man:

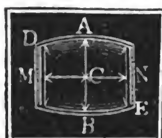
Fig. 82.



$$V = \frac{\pi h}{6} [2 (ab + a_1 b_1) + ab_1 + a_1 b].$$

Der Inhalt eines Fasses DE, Fig. 83, mit der halben Spundweite $CA = r_1$ und der halben Bodenweite $DM = EN = r_2$ ist bei der Länge $MN = l$.

Fig. 83.

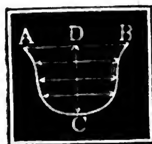


$V = \frac{\pi l}{3} (2 r_1^2 + r_2^2)$, wenn die Dauben kreisförmig gekrümmt sind, und

$V = \pi\, l \left(\frac{2\, r_1 + r_2}{3}\right)^2$, wenn sie die parabolische Form haben.

Der Inhalt ungesetzmäßiger Körper wird wie der Inhalt ungesetzmäßiger Flächen durch die Simpson'sche Regel bestimmt. So ist z. B. der Inhalt eines Kessels *ABC*, Fig. 84, durch die Formel:

Fig. 84.



$$V = [F_0 + 4\,(F_1 + F_3) + 2\,F_2 + F_4]\,\frac{h}{12}$$

bestimmt, wenn h die Höhe CD und F_0, F_1, F_2 u. s. w. die in gleichen Abständen gemessenen Querschnitte des Kessels bezeichnen.

Beispiele. 1) Der Inhalt eines Kugelsegmentes, welches bei einer Höhe von 3 Zoll an der Basis 5 Zoll im Halbmesser mißt, ist $V = \frac{\pi}{6}\,.\,3\,(3\,.\,5^2 + 3^2) = \frac{\pi}{2}\,.\,84$ $= 42\,\pi = 131{,}95$ Cubik-Zoll.

2) Der Inhalt eines Kübels, welcher 16 Zoll tief ist, in der Mündung 20 Zoll lang und 12 Zoll weit, am Boden aber 16 Zoll lang und 10 Zoll weit ist, beträgt:

$$V = \frac{\pi\,.\,16}{24}\,[2\,(12\,.\,20 + 16\,.\,10) + 20\,.\,10 + 12\,.\,16] = \frac{2\pi}{3}\,.\,1192$$
$= 2496$ Cubik-Zoll.

3) Ein Faß, welches am Boden 4 Fuß, am Spund $4\frac{1}{2}$ Fuß weit und 5 Fuß lang ist, hat nach der ersten Formel den Inhalt $V = \frac{\pi\,.\,5}{3}\,[2\,.\,(2{,}25)^2 + 2^2] = \frac{5\,.\,113\,.\,\pi}{24}$

$= 73{,}97$ Cubik-Fuß, nach der zweiten aber $V = 5\,.\,\pi\left(\frac{9+4}{6}\right)^2$

$= \frac{5\;.\;169\;.\;\pi}{36} = 73{,}74$ Cubik-Fuß.

4) Ein Kessel mit kreisförmigen Querschnitten hat bei $2\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe folgende Weiten: in der Mündung 40 Zoll, um den vierten Theil der Tiefe tiefer: 34 Zoll, in der hal-

ben Tiefe: 32 Zoll, bei drei Viertel Tiefe: 28 Zoll, am Boden: 0 Zoll; welches ist sein Fassungsraum? Er ist:

$$V = \frac{\pi h}{12} [r_0^2 + 4(r_1^2 + r_3^2) + 2 r_2^2 + r_4^2]$$

$$= \frac{30 . \pi}{12} [20^2 + 4(17^2 + 14^2) + 2 . 16^2 + 0]$$

$$= \frac{5\pi}{2} (400 + 1940 + 512) = 5 . 1426 . \pi$$

$$= 7130 . \pi = 22400 \text{ Cubik-Zoll.}$$

Dritter Abschnitt.

Formeln und Regeln der praktischen Geometrie.

Erstes Kapitel.

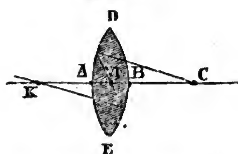
Prüfen und Justiren der Instrumente.

---

§. 1. Optische Linsen.

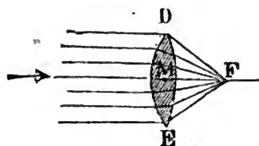
Der Halbmesser CA, Fig. 85, der Vorderfläche DAE einer einfachen Linse sei $= r$, der Halbmesser KB der Hinterfläche $DBE = r_1$, die Dicke AB der Linse $= d$, und das Brechungsverhältniß des Glases oder Linsenstoffes überhaupt $= \varkappa$ (Kappa).

Fig. 85.



Dann sind die Entfernungen $MA = a$ und $MB = b$ ihres **optischen Mittelpunktes** M von den Mittelpunkten A und B der Linsenflächen bestimmt durch die Formeln:

Fig. 86.



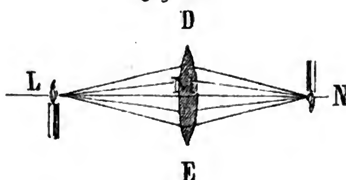
1) $a = \frac{rd}{r+r_1}$ und $b = \frac{r_1 d}{r+r_1}$.

Ferner ist für die **Brennweite** oder die Entfernung $MF = f$, Fig. 86, des **Brennpunktes** F vom optischen Mittelpunkte:

2) $\frac{1}{f} = (\varkappa - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$, also $f = \frac{r r_1}{(\varkappa - 1)(r + r_1)}$.

Für die Vereinigungsweiten $ML = e$ und $MN = e_1$, Fig. 87, gilt die Regel:

Fig. 87.



3) $\frac{1}{e} + \frac{1}{e_1} = \frac{1}{f}$, also ist $\frac{1}{e_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{e}$, oder $e_1 = \frac{f e}{e - f}$.

Für die Höhen oder Abstände $LL_1 = h$ und $NN_1 = h_1$ von der optischen Axe, Fig. 88, ist:

4) $\frac{h_1}{h} = \frac{e_1}{e} = \frac{f}{e - f}$ (das Vergrößerungsverhältniß).

Fig. 88.

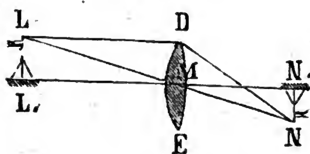
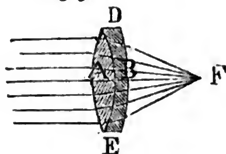


Fig. 89.



Für die achromatische Doppellinse DE, Fig. 89, behalten die Regeln unter 3) und 4) ihre Richtigkeit, nur ist hier die Brennweite f der ganzen Linse aus den Brennweiten f_1 und f_2 ihrer Theile bestimmt durch die Formel:

5) $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$, oder $f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - f_1}$.

Ist $\varkappa_1$ das Brechungsverhältniß des Kronglases, aus dem die Sammellinse A, und $\varkappa_2$ das des Flintglases, aus dem die Zerstreuungslinse B besteht, sind ferner r und r_1 die Halbmesser der ersten und r_1 und r_2 die der zweiten Linse, so hat man:

6) $\frac{1}{f_1} = (\varkappa_1 - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$ und $\frac{1}{f_2} = (\varkappa_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

Für Kronglas ist $\varkappa_1 = 1{,}535$, für Flintglas $\varkappa_2 = 1{,}596$, für Wasser $= 1{,}336$, für Eis 1,307, Demant $= 2{,}487$.

Nach Dollond ist für eine achromatische Linse

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1000}{1497} \text{ zu nehmen.}$$

Beispiele. 1) Wenn die Kugelhalbmesser einer Linse aus Kronglas folgende sind: $r_1 = 12$ Zoll und $r_2 = 20$ Zoll, so ist die Brennweite dieser Linse: $f = \frac{12\ .\ 20}{0{,}535\,(12+20)} = \frac{240}{0{,}535\ .\ 32} = \frac{15}{1{,}07} = 14{,}02$ Zoll. 2) Ein Object in 15 Fuß Entfernung gibt durch diese Linse ein Bild in der Entfernung $e_1 = \frac{f\,e}{e-f} = \frac{12\,.\,15\ .\ 14{,}02}{12\,.\,15 - 14{,}02} = \frac{2523{,}6}{165{,}98} = 15{,}20$ Zoll; hat das Object die Höhe $h = 2$ Fuß, so ist die Bildhöhe $h_1 = \frac{15{,}20}{12\ .\ 15}\ .\ 2\ .\ 12 = \frac{15{,}20\ .\ 2}{15} = 2{,}03$ Zoll.

3) Welche Brennweiten müssen die Bestandtheile einer achromatischen Doppellinse haben, wenn diese im Ganzen eine Brennweite $f = 15$ Zoll erhalten soll? Es ist $f_2 = 1{,}497\ f_1$ und $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{1{,}497 f_1} = \frac{0{,}497}{1{,}497 f_1}$, folglich die Brennweite der Sammellinse aus Kronglas: $f_1 = \frac{0{,}497\ .\ f}{1{,}497} = \frac{0{,}497\ .\ 15}{1{,}497} = 4{,}98$ Zoll, und die (natürlich negative) Brennweite der zerstreuenden Flintglaslinse: $f_2 = 1{,}497\ .\ 4{,}98 = 7{,}455$ Zoll.

§. 2. Brillen und Loupen.

Die deutliche Sehweite eines gesunden Auges ist 8 bis 10 Zoll. Der Kurzsichtige hat eine kleinere, der Weitsichtige eine größere deutliche Sehweite; jener gebraucht eine Brille mit concaven oder Zerstreuungsgläsern, dieser eine solche mit converen oder Sammelgläsern.

Ist $OE = e$, Fig. 90, die deutliche Sehweite eines gesunden Auges, $OE_1 = e_1$ aber die eines Kurzsichtigen, $OF = f$ aber die Brennweite der Linse AB, so gilt die Regel $\frac{1}{f} = \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e}$, oder $f = \frac{e\,e_1}{e - e_1}$. Ist ebenso $EO = e$, Fig. 91, die deutliche Sehweite eines gesunden Auges, $E_1O = e_1$ die eines Weitsichtigen und $OF = f_1$ die Brennweite der Linse, so hat man $\frac{1}{f} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e}$, also $f = \frac{ee_1}{e + e_1}$. Setzen wir z. B. die deutliche Sehweite eines gesunden Auges = 9 Zoll, so erhalten wir für einen Kurzsichtigen mit der deutlichen Sehweite von 5 Zoll, die erforderliche Brennweite der Brillengläser von diesem: $f = \frac{9\,.\,5}{9-5} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$ Zoll, dagegen für einen Weitsichtigen mit der deutlichen Sehweite $e_1 = 13$ Zoll ist die nöthige Brennweite seiner Brillengläser: $f = \frac{9\,.\,13}{9+13} = \frac{117}{22} = 5{,}32$ Zoll.

Fig. 90.

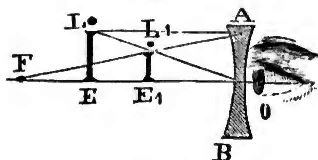
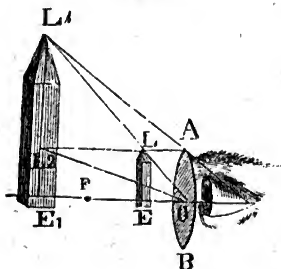


Fig. 91.

Fig. 92.



Bringt man bei einer Loupe AB, Fig. 92, deren Brennweite $OF = f$ sein möge, das Object LE so nahe, daß seine Entfernung $OE = e$ von der Linse kleiner als die Brennweite ist, so kommt sein Bild L_1E_1 in

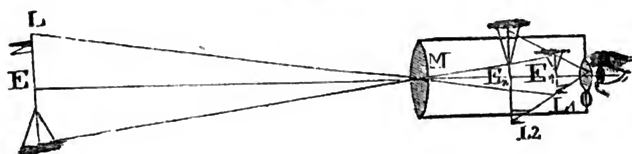
die Entfernung $OE_1 = e_1$, für welche ist $\frac{1}{e_1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{f}$ oder $e_1 = \frac{fe}{f-e}$, und umgekehrt $e = \frac{fe_1}{f+e_1}$. Die lineäre Vergrößerung dieser Loupe ist $\varphi = \frac{E_1L_1}{EL} = \frac{OE_1}{OE} = \frac{e_1}{e} = \frac{f+e_1}{f} = 1 + \frac{e_1}{f} = 1 + \frac{9}{f}$, da für e_1 die deutliche Sehweite von 9 Zoll eingesetzt werden kann.

Beispiel. Damit eine Loupe 6fach vergrößere, muß sie eine Brennweite haben, welche bestimmt ist durch die Gleichung $\varphi = 1 + \frac{e_1}{f}$, oder $f = \frac{e_1}{\varphi - 1} = \frac{9}{6-1} = \frac{9}{5}$ = 1 Zoll 9,6 Linien.

§. 3. Fernrohr.

Bei einem Fernrohre *MO*, Fig. 93, ist die Entfernung *ME* des Objectes *LF* von der Objectivlinse so groß, daß

Fig. 93.



man annehmen kann, das Bild L_1E_1 steht um die Brennweite $ME_1 = f$ von der Linse *M* ab. Das Bild L_1E_1 durch die Loupe oder durch das Ocularglas *O* betrachtet, rückt aus der Entfernung $OE_1 = e_1$ in die Entfernung OE_2 = der deutlichen Sehweite. Die Vergrößerung ist $\varphi = \frac{tang. E_1OL_1}{tang. E_1ML_1} = \frac{ME_1}{OE_1} = \frac{f}{e_1}$, oder wenn f_1 die Brennweite des Oculars bezeichnet, und hiernach $e_1 = \frac{f_1e_2}{f_1+e_2}$

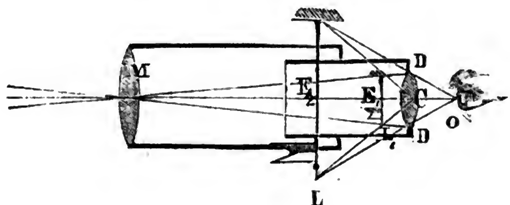
gesetzt wird, $\varphi = \frac{f(f_1 + e_2)}{f_1 e_2}$. Ist aber f_1 gegen die deutliche Sehweite $e_2 = 9$ Zoll sehr klein, so läßt sich setzen: $\varphi = \frac{f}{f_1}$.

Die Vergrößerung des Fernrohres ist also der Quotient aus der Brennweite des Objectives und der des Oculares.

Die Länge des ganzen Fernrohres ist $l = f + f_1$. Die Vergrößerung eines Fernrohres bestimmt sich auch, wenn man dieses nach einem entfernten Gegenstande, z. B. nach einem Fenster oder nach einer Nivellirstange richtet und nun zu gleicher Zeit mit dem einen Auge durch das Fernrohr, mit dem anderen aber nach einem ungefähr in der deutlichen Sehweite aufgestellten Maaßstab sieht, und beobachtet, wie viel Theile des Maaßstabes der im Fernrohr gesehene Gegenstand einnimmt. Ist dann h die Höhe und e die Entfernung des durch das Fernrohr gesehenen Objectes, h_1 aber die scheinbare Größe von h, oder die Länge des Theiles vom Maaßstabe, welcher von h im Fernrohre gedeckt wird, und e_1 die Entfernung des Maaßstabes vom Auge, so hat man die Vergrößerung des Fernrohres: $\varphi = \frac{h_1}{e_1} \cdot \frac{e}{h}$.

Das Seh- oder Gesichtsfeld ist der Winkel DMD

Fig. 94.



$= 6876' \cdot \frac{a_1}{l}$, wenn a_1 den Oeffnungshalbmesser CD

des Oculars bezeichnet. Findet man, daß der Sonnen- oder Monddurchmesser $n$mal in dem Gesichtsfelde enthalten ist, so kann man auch die Größe dieses Feldes $= 30' \cdot n$ setzen. Uebrigens findet man auch diesen Winkel durch die Formel $6876' \cdot \frac{h}{e}$, wenn h die Höhe des Gegenstandes bezeichnet, welche in der Entfernung e von der Objectivlinse eben noch vollständig sichtbar ist.

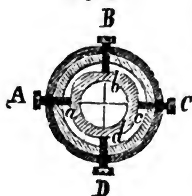
Durch eine Blendung, oder durch ein Diaphragma, wird das Gesichtsfeld oft noch mehr eingeschränkt.

Der Ort O des Auges wird bestimmt durch die Entfernung $CO = s$ desselben von dem Mittelpunkte C der Ocularlinse, indem man setzt: $\frac{1}{s} + \frac{1}{f+f_1} = \frac{1}{f_1}$, weshalb folgt: $s = \frac{(f+f_1)f_1}{f} = \left(\frac{1+\varphi}{\varphi}\right) f_1$.

Die Helligkeit eines Fernrohres ist $= \left(\frac{a}{\varphi\,\alpha}\right)^2 = 100 \left(\frac{a}{\varphi}\right)^2$, und es bezeichnet a den Oeffnungshalbmesser der Objectivlinse, $\alpha = 1/_{10}$ Zoll, den der Pupille, und φ die Vergrößerungszahl des Fernrohres.

Das Fadenkreuz, durch welches die Sehare des Fernrohres bestimmt wird, muß mit dem optischen Bilde der Objectivlinse zusammenfallen. Um seinen Kreuzpunkt in die geometrische Axe des Fernrohres zu bringen, wird es auf ein zugleich zur Blendung dienendes Diaphragma $a\,b\,c\,d$, Fig. 95, aufgeklebt, das durch vier Schrauben A, B, C, D, welche durch das Rohr hindurchgehen, gestellt werden kann. Der Abstand zwischen dem Oculare und dem Fadenkreuze hängt von dem Auge des Beobachters ab; für das kurzsichtige Auge ist er kleiner und für das

Fig. 95.



weitsichtige größer zu machen als für das gesunde Auge. Deshalb hat entweder das Fadenkreuz oder das Ocular eine Stellung in der Axenrichtung des Fernrohres. Da ferner die Bilder von nahen Objecten über den Brennpunkt des Objectivglases hinausfallen, so ist die das Fadenkreuz und das Ocular enthaltende Ocularröhre bei solchen weiter auszuschieben, um das Bild in die Ebene des Fadenkreuzes zu bringen. Man prüft und justirt in diesen Beziehungen auf folgende Weise:

Man richte erst das Fernrohr nach einem entfernten Objecte und stelle das Ocular so, daß dasselbe vollkommen deutlich erscheint, dann rücke man das Fadenkreuz allein so, daß auch dieses deutlich wird und seine Stelle auf dem Objecte nicht ändert, wenn man das Auge an der Ocular-Oeffnung hin- und herbewegt. Ist statt des Fadenkreuzes das Ocular stellbar, so ist natürlich dieses zu stellen, um den letzten Zweck zu erreichen; jedoch nachher die ganze Ocularröhre so zu schieben, daß das Ocular wieder in den vorigen Abstand vom Objectivglase kommt.

Beispiele. 1) Ein Fernrohr, welches ein Objectivglas von 13 Zoll Brennweite hat, vergrößert 20fach bei einer Ocularlinse von der Brennweite $f_1 = \frac{f}{20} = \frac{13}{20}$ Zoll $= 7{,}8$ Linie. Die Länge dieses Fernrohres ist hiernach $= 13$ Zoll $7{,}8$ Linie (163,8 Linien), und die Entfernung des Auges vom Ocular $= \frac{1+20}{20} \cdot 7{,}8$ Linie $= 8{,}19$ Linie. Ist ferner der Oeffnungshalbmesser des Objectives $6\frac{1}{2}$ Linie, so hat man die Helligkeit dieses Rohres $= 100\left(\frac{6{,}5}{12 . 20}\right)^2 = 0{,}0733$; ist endlich der Oeffnungshalbmesser des Oculares $a_1 = 1$ Linie, so hat man die Größe des Gesichtsfeldes von diesem Fernrohre $= 6876' \cdot \frac{a_1}{l} = 6876 \cdot \frac{1}{163{,}8} = 42$ Minuten.

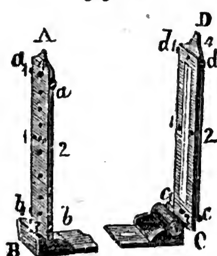
2) Um die Vergrößerung eines Fernrohres zu finden, hat man einen Gegenstand von 6 Zoll Höhe in 45 Fuß Entfernung und neben demselben einen Maaßstab in 9 Zoll Entfernung von dem Ocular aufgestellt, und nun beim Durchsehen mit dem einen Auge und Ansehen mit dem andern gefunden, daß das Bild von dem Gegenstande auf den Maaßstabe eine Höhe von 2½ Zoll einnimmt. Nach der Formel $\varphi = \frac{h_1}{e_1} \cdot \frac{e}{h}$ ist die gesuchte Vergrößerungszahl $\varphi = \frac{2,5}{9} \cdot \frac{45 \cdot 12}{6} = 2,5 \cdot 10 = 25$. Zu dem geodätischen Gebrauche wendet man nur Fernröhre von 10- bis höchstens 30facher Vergrößerung an.

§. 4. Das Visirlineal.

Von jedem Visirlineale ist zu verlangen, daß die Visirebene, d. i. die Ebene, in welcher sich alle möglichen Visirlinien befinden, rechtwinkelig auf der Grundfläche des Lineales stehe und durch die Kante desselben gehe, damit beim Auflegen des Lineales auf eine Horizontalebene und Visiren nach einem Objecte, die Horizontalprojection der Visirlinie mit der Kante des Lineales zusammenfalle.

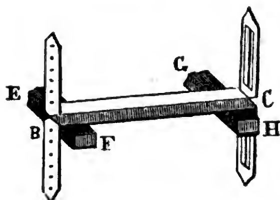
Bei dem Diopter- oder Visirlineale mit Dioptern ist die Visirebene durch die Visirlöcher im Oculardiopter AB, Fig. 96, und durch den Visirfaden im Objectivdiopter CD bestimmt. Die Rechtwinkeligkeit der Visirebene gegen die Grundfläche des Lineales prüft man durch Anvisiren eines ausgehängten Lothes. Um aber zu untersuchen, ob die Visirebene durch die Kante des Lineales gehe, stellt und hängt man dasselbe über zwei

Fig. 96.



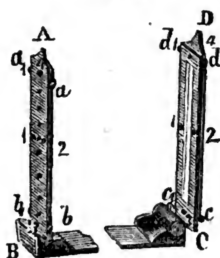
horizontale Arme *EF* und *GH*, Fig. 97, so auf, daß seine Kante *BC* beide Mal dieselbe, durch Striche auf den Armen fixirte Lage einnimmt. Findet man dann beim Durchsehen, daß die Visirlinie in beiden Fällen nach einem und demselben Objecte gerichtet ist, so bleibt nichts zu wünschen übrig; außerdem aber müssen die Diopter justirt werden.

Fig. 97.



Um dies zu können, sind die Visirlöcher des einen und das Fenster des andern Diopters in besonderen Tafeln ausgeschnitten, die durch vier kleine Schrauben 1, 2, 3, 4, Fig. 98, auf die drehbaren Diopterflügel befestigt und durch andere Schrauben a, a_1, b, b_1, c, c_1 und d, d_1 darauf verstellt werden können.

Fig. 98.

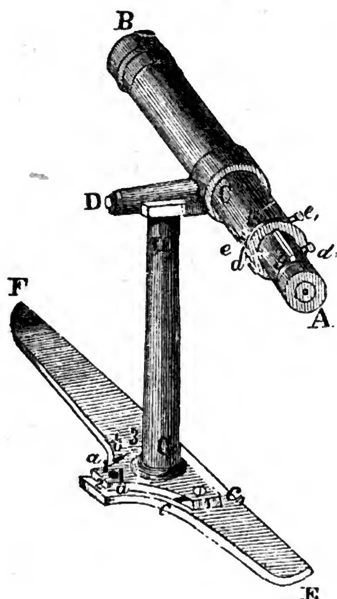


Jedenfalls hat man in der Mitte zwischen beiden Objecten, nach welchen das Lineal bei der einen und bei der andern Stellung weist, eine Stange aufzustellen oder ein Loth aufzuhängen, und nach gehörigem Lüften der Schrauben 1,2,3,4 durch die Schrauben a, a_1, b, b_1 u. s. w. die Diopter so weit seitlich zu rücken, bis die Visirlinie nach diesem mittleren Objecte gerichtet ist. Zuletzt sind natürlich die Schrauben 1, 2, 3, 4 wieder anzuziehen.

Bei dem Perspectivlineale oder der sogenannten Kippregel ist die Visirebene diejenige, welche die optische Axe des Fernrohres beim Kippen desselben durchläuft. Es ist aber überhaupt die Fläche, in welcher sich die optische Axe des Fernrohres beim Kippen bewegt, eine Ebene, wenn die optische Axe *AB*, Fig. 99, auf der Drehungsaxe *CD*

winkelrecht steht. Um dies zu prüfen, stellt man die Kippregel auf einen horizontalen Tisch, richtet dieselbe nach einer etwa in 100 Schritt Entfernung aufgestellten Stange, und zieht eine Linie am Rande des Lineales hin. Hierauf hebt man das Instrument ab und stellt es so auf, daß dessen Kante die gezogene Linie von der anderen Seite her berührt, endlich schlägt man das Fernrohr um und sieht hierbei zu, ob dasselbe wieder genau nach dem Objecte gerichtet ist. Ist dies nicht ganz der Fall, läßt sich also in dieser Visirlinie neben der ersten Stange eine zweite aufstellen, so nimmt man die Mitte zwischen beiden Stangen und verrückt mittelst der Schrauben d und d_1 das Fadenkreuz so weit, bis der Kreuzpunkt desselben eine in dieser Mitte aufgestellte Stange deckt. Findet man bei Wiederholung dieser Operation, daß das Fadenkreuz dieses Signal vollkommen deckt, so leistet das Instrument dieser ersten Forderung Genüge.

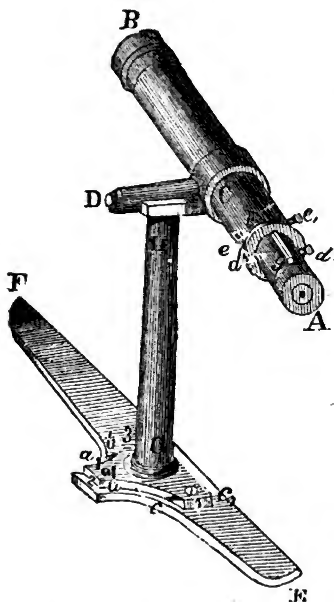
Fig. 99.



Damit zweitens die Visirebene winkelrecht auf der Grundfläche des Lineales stehe, ist nöthig, daß die Drehungsaxe *CD* des Fernrohres mit der Grundfläche des Lineals *EF* parallel laufe. Um dies zu prüfen, stellt man das Instrument auf einen genau horizontal gestellten Tisch und richtet es nach einem langen durch ein bedeutendes Gewicht (zwei

Pfund) gespannten Lothe. Findet man nun, daß das Loth beim Kippen des Fernrohres den Kreuzpunkt des Fadenkreuzes überall deckt, so findet der erforderliche Parallelismus Statt; ist es aber nicht der Fall, so muß man an dem Fußstücke *G* des Trägers *GH* eine Stellung vornehmen

Fig. 100.



und dadurch die Säule *GH* nach der einen oder andern Seite hin etwas neigen. In dieser Absicht lüftet man die Schrauben 1, 2 und 3, womit das Fußstück auf das Lineal befestigt ist, ein wenig, und hebt oder senkt durch zwei andere Schrauben *a* und a_1 das Fußstück auf der einen Seite so viel als nöthig ist, damit die Abweichung des Kreuzes vom Lothe ganz verschwinde.

Um sich drittens zu überzeugen, ob die Visirebene durch die Kante *EF* des Lineals gehe, schlägt man denselben Weg ein, wie beim Diopterlineal (s. Fig. 97); man stellt erst dasselbe auf zwei horizontale Arme, rückt dessen Kante an die Endstücke einer auf diese Arme aufgerissenen Linie, und richtet bei dieser Stellung das Fernrohr nach einer in circa 20 Schritt Entfernung aufgestellten schwachen Stange ein. Nach diesem stürzt man das Instrument um, hängt es umgekehrt an die Arme und zwar so, daß die Kante *EF* des Lineales wieder an die auf den Armen angegebenen Endstücke einer Linie zu liegen kommt. Zeigt nun das Fernrohr nicht ge-

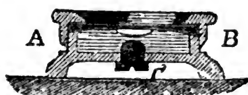
nau nach derselben Stange, so ist ein Justiren des Instrumentes in dieser Beziehung nöthig. Dieses aber besteht in einer Drehung der Säule *GH* um eine vertikale Axe, und wird mit Hülfe von vier Schrauben b, b_1, c und c_1 ermöglicht, die man aber nicht eher anziehen darf, als bis man das Fußstück *G* durch Zurückziehen der Schrauben 1, 2 und 3 gelüftet hat.

Endlich prüft man auch noch, ob der eine Faden des Fadenkreuzes horizontal und der andere in einer Vertikalebene gelegen sei, indem man zusieht, ob der andere Faden ein in einiger Entfernung ausgehängtes Loth vollkommen deckt. Bleibt hierbei noch etwas zu wünschen übrig, so stellt man an den Schrauben e und e_1, welche sich gegen den auf der Ocularröhre festsitzenden Stahlrücken $f\,g$ stemmen und dadurch diese Röhre mit dem eingeschlossenen Fadenkreuze ein wenig drehen.

§. 5. Libellen.

1) Die Dosenlibelle *AB*, Fig. 101, wird zum Einstellen einer Horizontalebene oder zum Aufstellen einer Vertikallinie gebraucht. Man prüft dieselbe, indem man zusieht, ob die Luftblase ihren Ort nicht ändert, wenn man die auf einer Horizontalebene stehende Libelle um ihre vertikale Axe, also so dreht, daß sie einen genau umschließenden Kreis nie verläßt. Wenn die Luftblase zu groß wird, so muß man den inneren Raum durch weiteres Drehen der Schraube *C* verengern oder *C* ganz herausdrehen und mehr Weingeist nachfüllen. Der Durchmesser der Blase soll aber auch nicht zu klein sein, sondern ungefähr ½ Zoll betragen.

Fig. 101.



2) Die Röhrenlibelle dient unmittelbar nur zum Einstellen einer Horizontallinie. Man füllt sie mit Weingeist oder Schwefeläther und verschließt sie an ihren Enden

mit Glasstöpseln. Die mittlere Länge ihrer Blase soll $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ der ganzen Röhrenlänge (4 bis 7 Zoll) betragen.

Die Empfindlichkeit einer Libelle wird gemessen durch den Winkel, um welchen die Axe der Libelle zu neigen ist, damit die Luftblase einen gewissen Weg zurücklege. Zu diesem Zwecke verbindet man dieselbe mit einem Fernrohre oder Visirlineale so, daß ihre Axe mit der Visirlinie in einerlei Vertikalebene fällt, richtet dieses nach einer eingetheilten Stange, und bemerkt sich nicht allein den Stand der Luftblase, sondern auch die Stelle an der Stange, nach welcher die Visirlinie gerichtet ist. Nach diesem gibt man der ganzen Vorrichtung eine mäßige Neigung und bemerkt sich wieder den Stand der Luftblase und die anvisirte Stelle an der Stange. Ist nun s der Weg der Luftblase, oder der Abstand ihrer beiden Stände, h aber der an der Stange abgelesene Weg und e die Entfernung der Stange von dem Libellenmittel, so hat man den Weg, welchen die Luftblase bei jeder Secunde Axenneigung durchläuft:

$$x = \frac{s\,e}{206265\,.\,h},$$

so wie umgekehrt den Neigungswinkel, welcher dem Wege 1 (Linie) der Luftblase entspricht:

$$\alpha'' = 206265''\,.\,\frac{h}{s\,e}.$$

Z. B. Wenn die Luftblase einen Weg von 10 Linien zurücklegt, während der Visirpunkt an einer in 500 Fuß Entfernung aufgestellten Stange den Weg von 2 Zoll durchläuft, so ist der Neigungswinkel, welcher einer Linie Weg der Luftblase entspricht:

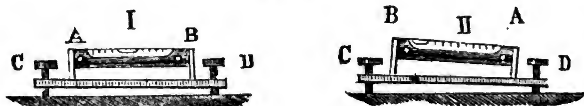
$$\alpha'' = 206265''\,.\,\frac{2\,.\,12}{500\,.\,12\,.\,12\,.\,10} = \frac{206265''}{30000} = 6'',87.$$

Der Halbmesser r, welcher der Krümmung des Röhrenrückens entspricht, ist bestimmt durch die Formel $r = \frac{s\,e}{h}$. Für das letzte Beispiel ist er = 30000 Linien = 2500 Zoll = $208\frac{1}{2}$ Fuß.

Die Röhrenlibelle ist von der Mitte aus nach beiden Enden zu in gleiche Theile, z. B. in Linien, getheilt, und zeigt die Horizontalität einer Linie, worauf dieselbe steht, oder an welcher dieselbe aufgehangen ist, dadurch an, daß die Enden ihrer Blase auf gleich benannte Theilpunkte der beiden Röhrenscalen stehen.

Die gewöhnlichen Libellen zum Abnehmen, wie die Setzlibellen mit Füßen oder Hängelibellen mit Armen, prüft man auf folgende Weise: Man stelle oder hänge dieselbe an einer Linie *CD*, Fig. 102, auf, stelle die letztere durch eine

Fig. 102.



Vertikalschraube *C* so, daß erstere zum Einspielen kommt, hebe hierauf die Libelle *AB* ab, bringe sie in umgekehrter Axenrichtung auf die Linie und sehe zu, ob sie wieder einspielt, oder ob die Blase wieder denselben Ort in der Röhre einnimmt. Ist dies nicht der Fall, so ist das Justiren nöthig, und hierbei dahin zu trachten, daß der Mittelpunkt der Luftblase nur halb so viel von dem Röhrenmittel abweiche, als nach dem Umsetzen oder Umhängen. Von der vollständigen Richtigkeit der Libelle kann man sich natürlich nur durch wiederholtes Umkehren überzeugen.

Steht das eine Ende der Blase auf der einen Seite beim Theilstriche s, auf der anderen aber beim Theilstriche s_1, so ist natürlich die Abweichung der Luftblase vom Röhrenmittel oder vom Normalstande $= \frac{s - s_1}{2}$. Steht sie z. B. rechts auf 9,8, links aber auf 2,2 Linien, so ist ihre Abweichung $= \frac{9,8 - 2,2}{2} = \frac{7,6}{2} = 3,8$ Linien; und wenn

nun einer Linie Abstand eine Neigung von 6″,87 entspricht, so ist die Neigung in diesem Falle = 3,8 . 6″,87 = 26″,1. Uebrigens wird in diesem Falle so zu justiren sein, daß die Mitte der Luftblase auf $\frac{3,8}{2} = 1,9$ Linie, also das eine Ende auf $\frac{s+s_1}{2} + \frac{s-s_1}{4} = 6,0 + 1,9 = 7,9$ und das andere auf $\frac{s+s_1}{2} - \frac{s-s_1}{4} = 6,0 - 1,9 = 4,1$ Linie zu stehen kommt.

Das Justiren nimmt man in der Regel an Correctionsschrauben vor, wodurch die Glasröhre in ihrer messingenen Fassung etwas verstellt werden kann, oder man bedient sich nur einer Schraube, wodurch der eine Arm oder Fuß verlängert oder verkürzt werden kann, oder endlich, man verkürzt den einen Arm oder Fuß durch bloßes Abschaben.

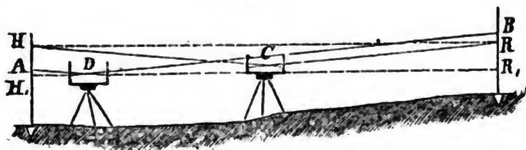
Um endlich zu sehen, ob die Axe der Röhrenlibelle mit ihrer Aufsetz- oder Aufhängelinie in einer Ebene liege, dreht man die Libelle um diese Linie etwas rechts und links und sieht zu, ob hierbei die Luftblase nicht aus der Mitte komme. Außerdem ist es nöthig, durch seitliche Correctionsschrauben die Röhre in ihrem Gehäuse etwas zu verrücken.

§. 6. Luftblasenniveau

Das Haupterforderniß eines Niveaus ist, daß die Visirlinie mit der Libellenaxe parallel laufe. Um dies zu prüfen, verschafft man sich erst eine horizontale Linie *HR*, Fig. 103, indem man mit dem uncorrigirten Instrumente *C* zwei in gleichen Entfernungen aufgestellte Nivellirstangen anvisirt. Welches auch der Winkel zwischen der Visirlinie und der Libellenaxe sei, so sind doch die anvisirten Punkte *H* und *R* in einerlei Niveau, weil die eine Visir-

linie genau ebenso steigt oder fällt als die andere. Stellt man sich nun mit dem Instrumente dem einen dieser zwei

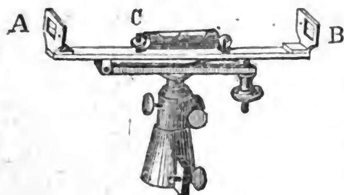
Fig. 103.



Punkte sehr nahe und visirt wieder nach beiden, so müssen, wenn der genannte Parallelismus vorhanden ist, beide Visirlinien DH_1 und DR_1 in eine Horizontallinie fallen, und folglich die anvisirten Punkte H_1 und R_1 um gleichviel von den erst anvisirten, in eine Horizontallinie fallenden Punkten H und R abstehen. Ist dies nicht der Fall, sind z. B. die anvisirten Punkte A und B, so ist es nöthig, die Stellung der Libelle gegen die Visirlinie zu verändern. Da D sehr nahe an A steht, so wird A mit H_1 ziemlich zusammenfallen, und daher die Verbindung zwischen Visirlinie und Libelle so zu justiren sein, daß die Luftblase einspielt, wenn erstere nach einem Punkte R_1 gerichtet ist, der ebenso viel von R absteht, wie A (H_1) von H.

In der Regel wird die nöthige Correction an der Libelle vorgenommen, doch kann man auch wohl die Visirlinie verstellen. Bei dem Niveau mit Dioptern A und B, Fig. 104, läßt sich z. B. die nöthige Correction durch die Schraube C oder durch Verrücken des einen Diopters (s. Diopterlineal) bewirken. Bei dem Niveau, Fig. 105 a. folg. Seite, mit Fernrohr und aufgestellter Libelle, kann man dieses Justiren durch Abschaben an einem der Libel-

Fig. 104.



lenfüße *C* und *D* bewirken; bei dem Niveau Fig. 106, mit

Fig. 105.

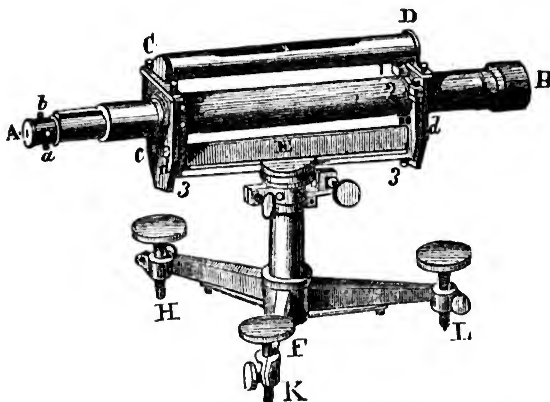
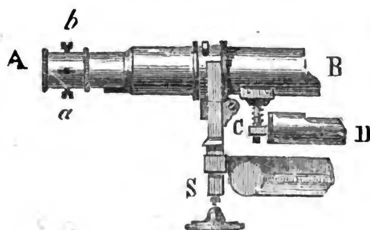


Fig. 106.



Fernrohr und festsitzender Libelle kann man durch die Correctionsschraube *C* justiren, bei einem Niveau mit festem Fernrohre ist es endlich gestattet, diese Rectification mittels Stellung des Fadenkreuzes zu vollziehen.

Bei den vorzüglicheren Niveaus ist das Fernrohr zum Drehen in seinen Pfannen und zum Umlegen in denselben eingerichtet. Die Fernröhre dieser Instrumente sind mit zwei harten und genau abgedrehten Metallringen umgeben, womit sie in den Trägern aufruhen. Wesentlich wichtig ist es nun, daß diese Träger von vollkommen gleichem Durchmesser sind und daß das Fernrohr in Hinsicht auf diese Ringe centrirt sei, daß nämlich der Kreuzpunkt des Fadenkreuzes in die diesen Ringen entsprechende geometrische Axe falle. Das

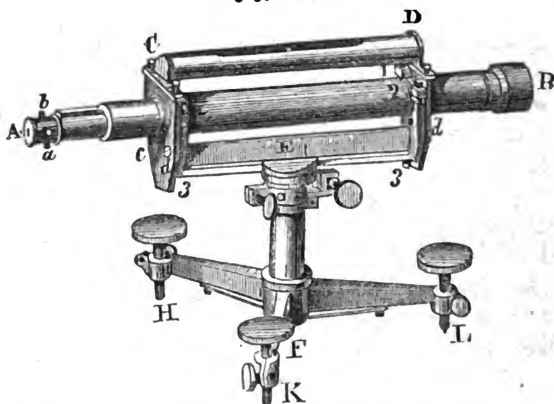
Letztere prüft man dadurch, daß man das Fernrohr nach der Nivellirstange oder dem Nivellirzeichen richtet und allmälig in seinen Pfannen um seine geometrische Axe herumdreht. Bleibt dabei das Fadenkreuz immer über demselben Punkte des Nivellirzeichens stehen, so ist hierin nichts zu wünschen. Außerdem ist ein Einstellen des Fadenkreuzes mittels der Schrauben *a*, *b* . . ., Fig. 105 und Fig 106, nöthig. Dies geschieht aber auf folgende Weise. Man stelle das Nivellirzeichen nach dem Fernrohre ein, drehe dann das letztere halb in seinem Lager herum und sehe nun zu, nach welchem Punkte des Zeichens es jetzt gerichtet ist; hierauf stelle man das Zeichen mitten zwischen die ersten Stellen und bringe durch die vertikal stehenden Schrauben des Fadenkreuzes das letztere mit dem Zeichen bei dieser Stellung zum Decken. Dadurch wird wenigstens der eine (horizontale) Faden des Kreuzes centrirt; dreht man nun noch das Fernrohr in seinen Lagern um 90 Grad und wiederholt hier dasselbe Verfahren, indem man nun an den beiden andern Schrauben des Fadenkreuzes stellt, so gelangt auch der zweite Faden und hiermit auch der Kreuzpunkt beider in die Axe des Fernrohres.

Was die zweite Prüfung anlangt, so setzt diese voraus, daß schon die Libelle *CD* justirt sei, was nach §. 5 durch Umsetzen derselben zu bewirken ist. Nimmt man dann das Fernrohr aus seinen Lagern und legt es umgekehrt ein, wechselt man also die Ringe in ihren Lagern, so muß die aufgesetzte Libelle wieder wie erst einspielen. Entspricht das Instrument auch dieser Forderung, so ist die Libellenaxe mit der Visirlinie oder optischen Axe des Fernrohres parallel, und daher die letztere horizontal, wenn die Blase der Libelle einspielt. Hiervon kann man sich auch noch überzeugen, daß man das Instrument der am Anfang des Paragraphen beschriebenen und in Fig. 103 bildlich dargestellten Prüfung unterzieht.

Endlich ist noch zu verlangen, daß die Libellen- und Fernrohraxen winkelrecht zur Axe des Centralzapfens *EF*

stehen, damit die einmal horizontal gestellte Visirlinie bei Umdrehung des Instrumentes um EF horizontal bleibe. Hiervon überzeugt man sich, wenn man zusieht, ob die Luftblase ihren Stand behält, während man eine allmälige Drehung um EF vornimmt, oder ob das Fernrohr noch nach demselben Objecte weist, nachdem man dasselbe abgehoben und umgekehrt in die Lager gelegt, das Instrument aber 180° um EF gedreht hat. Die eine Hälfte der bemerkten Abweichung wird durch die Fußschraube L, welche

Fig. 107.

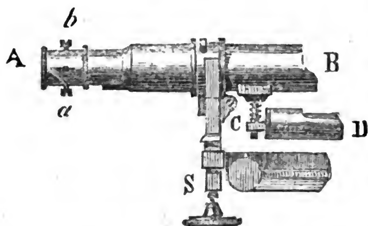


mit AB und CD in eine Vertikalebene fällt, corrigirt, die andere aber durch die Schrauben 1, 2, 3, womit sich die Fernrohrträger verlängern oder verkürzen lassen. Bevor man 1, 2, 3 anzieht, sind jedoch die Schrauben c, d . . zu lüften, damit sich die äußeren Theile dieser Träger an den inneren, mit EF fest verbundenen, verschieben lassen.

Bei den neueren Instrumenten, zumal bei den Stampfer'schen, ist der eine Fernrohrträger mit einer besonderen Elevationsschraube S, Fig. 108, verbunden, und es wird hier durch dieselbe, für jede Visirlinie besonders, das feinere Einstellen der Libelle sammt Fernrohr bewerkstelligt, nachdem man schon vorher das Instrument durch die drei

Fußschrauben annähernd horizontal gestellt hat. Ist der Schraubenkopf mit einer Eintheilung in hundert Theile versehen, so kann man diese Schraube auch noch zur Angabe kleiner Neigungswinkel und zur Bestimmung der Distanzen benutzen. Hat man einmal gefunden, daß u_1 Umdrehungen der Schraube S eine Neigung der Visirlinie von δ_1 Secunden entsprechen, so hat man bei u Umdrehungen den entsprechenden Neigungswinkel $\delta = \frac{\delta_1}{u_1} u$ Secunden. Ist ferner die Schraube S u_1 mal umzudrehen, um das Fadenkreuz von einer in der Entfernung e_1 aufgestellten Stange von einem Ende des Theiles h dieser Stange bis zum anderen zu führen, und ist u die Umdrehungszahl beim Anvisiren eines Theiles h von einer in der Entfernung e aufgestellten Stange, so hat man annähernd:

Fig. 108.



$$\frac{u}{u_1} = \frac{h}{e} \cdot \frac{e_1}{h_1}, \text{ daher } e = \frac{e_1 u_1}{h_1} \cdot \frac{h}{u}.$$

Z. B. Wenn die Schraube S_1 6,36 mal umzudrehen ist, um an einer in 500 Fuß Entfernung aufgestellten Stange vom Fadenkreuze einen Weg von 10 Fuß durchlaufen zu lassen, so hat man $\frac{e_1\ u_1}{h_1} = \frac{500 . 6,36}{10} = 318,$ und daher in anderen Fällen $e = 318 . \frac{h}{u}$. Wäre z. B. für ein Zeichen $h = 5$ Fuß, $u = 4,25$ gefunden worden, so hätte man die entsprechende Entfernung desselben: $e = \frac{318.5}{4,25} = 374,1$ Fuß. Der Höhe $h = 10$ Fuß und Entfernung $e = 500$ Fuß, entspricht übrigens ein Winkel

von 206265″ . $\frac{h}{e}$ 4125″, daher ist auch für dieses Instrument: $\delta = \frac{4125'' \,.\, u}{6{,}36} = 648{,}6 \,.\, u$ Secunden, z. B. für 3,51 Umdrehungen der Elevationsschraube ist der Neigungswinkel $\delta = 648{,}6 \,.\, 3{,}51 = 2276{,}5$ Sec. $= 0^\circ{,}37'{,}56\frac{1}{2}''$.

Um zu finden, ob der eine Faden des Fadenkreuzes horizontal und der andere vertikal steht, dreht man bei richtig aufgestelltem Instrumente den Fernrohrträger etwas rechts und links, und sieht zu, ob dabei der anvisirte Punkt im horizontalen Faden bleibt.

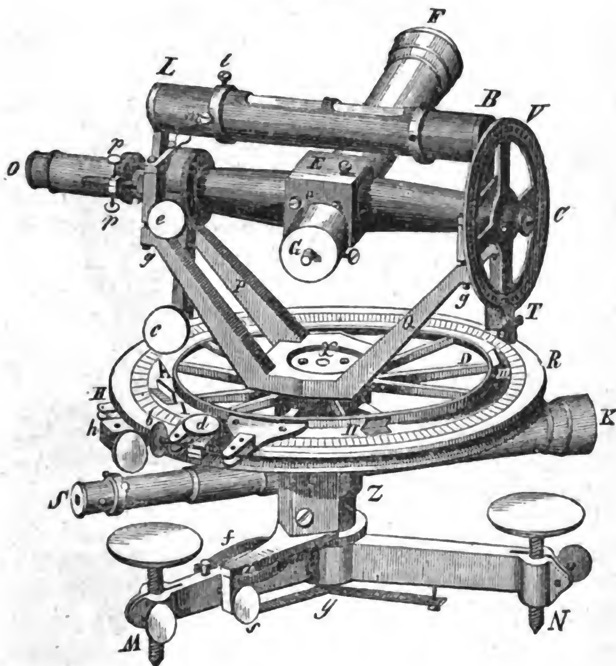
Der senkrechte Stand der Nivellirstange wird am sichersten und bequemsten durch eine Dosenlibelle erkannt, die man zu diesem Zwecke auf ein an der Stange angebrachtes eisernes Postament stellt.

§. 7. Der Theodolit.

Ein Theodolit, wie Fig. 109 auf nebenstehender Seite, besteht aus folgenden Haupttheilen. *HR* ist der mit einer Gradeintheilung versehene Haupt- oder Horizontalkreis, *AD* der mit vier Vernieren I., II. . . versehene Alhidadenkreis; beide sind, jeder für sich, um eine vertikale Axe *XY* drehbar, die zugleich Axe des Dreifußes *MNZ* ist. Mit der Alhidade fest verbunden ist der Fernrohrträger *PQ*, zwischen dessen gabelförmigen Enden die Axe *OC* des Fernrohres *EF* ruht. An einem Ende *C* dieser Axe sitzt der Vertikalkreis *VT* fest und auf den Stahlzapfen dieser Axe wird die Röhrenlibelle *LB* aufgesetzt. Am Körper *Z* des Dreifußes sitzt noch das Fiduz- oder Sicherheitsfernrohr *SK*, dessen genaue Einstellung auf irgend ein entferntes Object durch die Schraube *s* mittelst eines Armes *a* und einer Feder *f* bewirkt wird. Um mit dem Instrumente auch Beobachtungen am Himmel anstellen, um namentlich wegen Zeit- und Meridianbestimmung, die Sonne, den Polarstern u. s. w. beobachten zu können, ist dasselbe mit einem gebrochenen

Fernrohre versehen. Dasselbe enthält bei *E* ein Glasprisma, welches die einfallenden Lichtstrahlen so reflectirt, daß dieselben um einen Rechtwinkel abgelenkt und durch die hohle Umdrehungsaxe *E O* dem Auge vor *O* zugesendet werden. Zum Balancieren des Fernrohres *EF* dient das Gegenge-

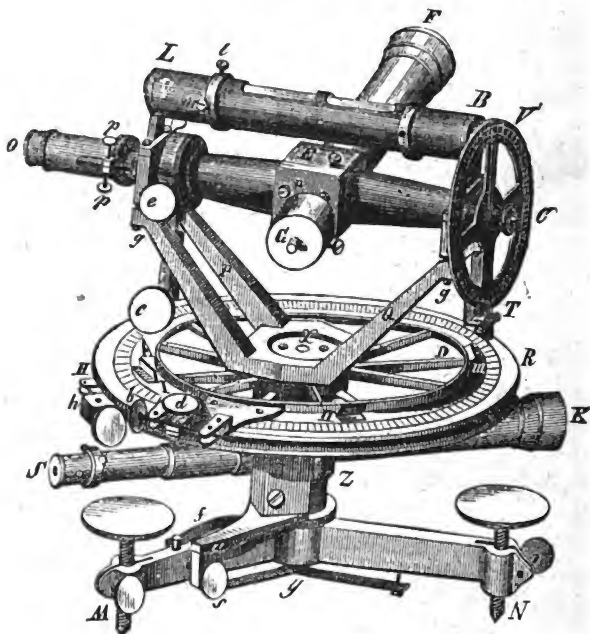
Fig. 109.



wicht *G*. Zum Feinstellen des Hauptkreises dient die Mikrometerschraube *h*, zum Feinstellen der Alhidade aber die Mikrometerschraube *b*, und endlich zum genauen Einstellen des Höhenkreises, oder vielmehr des Horizontalfadens vom Fadenkreuze wird die Schraube *c* angewendet; vorher sind natürlich die Preßschrauben, wie z. B. *d* oder *e*, anzuziehen.

Es ist nöthig, daß die Libellen- und die Fernrohraxe auf den Umdrehungsaxen des Haupt- und Alhidadenkreises rechtwinkelig stehen, und deshalb Folgendes zu prüfen. Man bringe zunächst durch Drehung des Grund- oder Alhidadenkreises die Libellenaxe mit der Axe eines der drei Füße,

Fig. 110.



z. B. *ZN*, in einerlei Vertikalebene und stelle an der entsprechenden Fußschraube *N* so lange, bis die Blase einspielt. Nach diesem drehe man den Grund- oder den Alhidadenkreis um 90 Grad, so daß die Libellenaxe mit der Linie durch die beiden andern Fußschrauben parallel zu stehen kommt, und stelle an einer dieser so lange als nöthig, damit

die Blase abermals einspiele. Nun führe man die Libelle auf den ersten Stand zurück, sehe zu, ob die Blase noch einspielt, und helfe, wenn noch etwas fehlt, an der darunter befindlichen Fußschraube *N* nach, bis das genaue Einspielen erlangt ist. Hebt man nun die Libelle ab, und setzt sie umgekehrt auf die Fernrohrzapfen, so muß ihre Blase den vorigen Stand wieder einnehmen. Außerdem ist an der Schraube *l* nachzuhelfen, durch welche die Glasröhre der Libelle auf der einen Seite niedergedrückt werden kann, während eine Stahlfeder unter dieser Röhre diese zu heben sucht. Sollte die Blase ihren Ort ändern, wenn man die Libelle um die Zapfenaxe rechts und links dreht, so ist die Glasröhre auch noch durch eine Schraube etwas seitwärts zu stellen. Auf diese Weise ist der Parallelismus zwischen der Libellenaxe und den Zapfenumfängen von *OC* herzustellen, und sind nun beide Zapfen von vollkommen gleicher Stärke, so hat man hierdurch auch den Parallelismus und die Horizontalität der Libellenaxe und der Drehungsaxe des Fernrohres hergestellt. Um sich aber von der Gleichheit der Zapfenstärken zu überzeugen, darf man nur das Fernrohr ausheben und mit verwechselten Zapfen in die Lager legen; stellt sich dann die Luftblase der von neuem aufgesetzten Libelle wieder in die Mitte, so bleibt hierbei nichts zu wünschen übrig.

Dreht man nun die Alhidade um zwei Rechtwinkel und findet hierbei, daß die Blase der Libelle ihren Stand behält, so ist dies ein Beweis, daß die Libellenaxe auf der Drehungsaxe der Alhidade rechtwinkelig steht, außerdem aber muß man die Abweichung zur einen Hälfte durch die Schraube *N* und zur andern Hälfte durch die Zug- und Druckschrauben *g* . . . aufheben. Dieselbe Prüfung hat man auch noch mit der Axe des Hauptkreises vorzunehmen, indem man zusieht, ob die Libellenblase ihren Stand nicht ändere, wenn man den Hauptkreis um 180 Grad dreht, so daß das entgegengesetzte Ende *L* der Libelle über die Fußschraube *N* zu stehen kommt. In der Regel gibt

es hierzu an dem Theodoliten keine Correctionsschrauben; wenn jedoch der Künstler dafür sorgt, daß die Ebene der Alhidade auf der Umdrehungsaxe derselben, und ebenso die des Hauptkreises auf der Umdrehungsaxe dieses rechtwinkelig steht, so muß bei vollständiger Berührung beider Ebenen auch ein Zusammenfallen der zugehörigen Umdrehungsaxen stattfinden.

Die optische Axe des Fernrohres muß natürlich auf der Drehungsaxe desselben rechtwinkelig stehen. Um dies zu prüfen, kann man das Fernrohr ausheben und umgekehrt in die Lager legen, nämlich so, daß nun jeder Zapfen in ein anderes Lager kommt; ist dann das Fernrohr nach demselben Punkte gerichtet, so ist auch jene Rechtwinkeligkeit vorhanden. Oder man drehe die Alhidade genau um 180 Grad, kippe das Fernrohr und sehe zu, ob es wieder genau das erst anvisirte Object einschneidet; in diesem Falle entspricht es ebenfalls der gemachten Forderung. Hält das Instrument diese Prüfung nicht aus, so muß man das im Würfel *E* eingeschlossene Glasprisma mittels der drei Druck- und Zugschrauben *n* . . in demselben so viel verrücken, daß das Fadenkreuz die Mitte der gefundenen und etwa an einer vertikalen Wand angegebenen Abweichung deckt. Natürlich wird auch diese Prüfung so oft wiederholt, bis die Abweichung ganz verschwindet. Um sich endlich noch zu überzeugen, daß der vertikale Faden des Fadenkreuzes auch wirklich vertikal stehe, sehe man zu, ob beim Kippen des Fernrohres der anvisirte Punkt immer von diesem Faden gedeckt werde. Ist dies nicht der Fall, so corrigire man an den bekannten Schrauben *p*, *p*.

Noch hat man zu untersuchen, ob sich die Alhidade centrisch über dem Hauptkreise drehe. Hierzu ist nöthig, daß die Alhidade mindestens zwei diametral einander gegenüberliegende Verniers enthalte. Gibt der eine Vernier stets genau denselben Werth für einen und denselben Winkel wie der andere, so ist ein solcher Excentricitätsfehler nicht vorhanden. Außerdem aber muß man, um den richtigen Werth

des anvisirten Winkels zu erhalten, aus den von beiden Vernieren angegebenen Winkeln das arithmetische Mittel nehmen.

Beim Ablesen der Winkel ist zu beachten, daß der Vernier einen Theil mehr enthält als ein gleich langer Bogen des Hauptkreises, und daß durch denselben mittelbar jeder Theil der Haupteintheilung in so viele feinere Theile getheilt wird, als er Theile enthält. Wenn z. B. der Vernier 14 Theile des Hauptkreises einnimmt, ein Theil des Hauptkreises aber $\frac{1}{4}$ Grad = 15 Minuten ist, so gibt der Vernier die Winkel bis auf $\frac{1}{15} \cdot 15$ Minuten = 1 Minute genau an. Wenn er dagegen 59 Theile der Haupttheilung, jeder zu $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, umfaßt und in 60 Theile getheilt ist, so lassen sich die Winkel bis auf $\frac{1}{60} \cdot 10$ Min. = $\frac{1}{6}$ Min. = 10 Secunden genau angeben.

Um beim Arbeiten am Theodoliten eine größere Genauigkeit zu erlangen, ist eine Repetition oder Multiplication der Beobachtungen nöthig. Hat man $n$mal repetirt, dabei also den Alhidadenkreis $n$mal um den zu messenden Winkel gedreht, hierbei aber u vollständige Umdrehungen gemacht und zuletzt den Winkel α abgelesen, so ist der Winkel zu setzen: $x = \frac{360^0 \cdot u + \alpha^0}{n}$. Z. B. Man hat beobachtet, nach dreifacher Repetition und bei einmaliger Umdrehung:

am Vernier I. $\alpha = 141^\circ, 30', 40''$, und
am Vernier II. $\alpha = 321^\circ, 30', 50''$;

wenn aber dieser anfangs auf $180^\circ, 0', 20''$ stand, so folgt nach ihm $\alpha = 321^\circ,30',50'' - 180^\circ,0',20'' = 141^\circ,30',30''$, daher im Mittel $\alpha = 141^\circ, 30', 35''$, und endlich der gesuchte Winkel:

$$x = \frac{360^\circ.1 + 141^\circ,30',35''}{3} = \frac{501^\circ,30',35''}{3} = 167^\circ, 10', 11\tfrac{2}{3}''.$$

Was endlich den Vertikal- oder Höhenkreis anlangt, so ist dieser in Hinsicht auf den Collimations- oder Inderfehler, nämlich darauf zu prüfen, ob der Vernier T dessel-

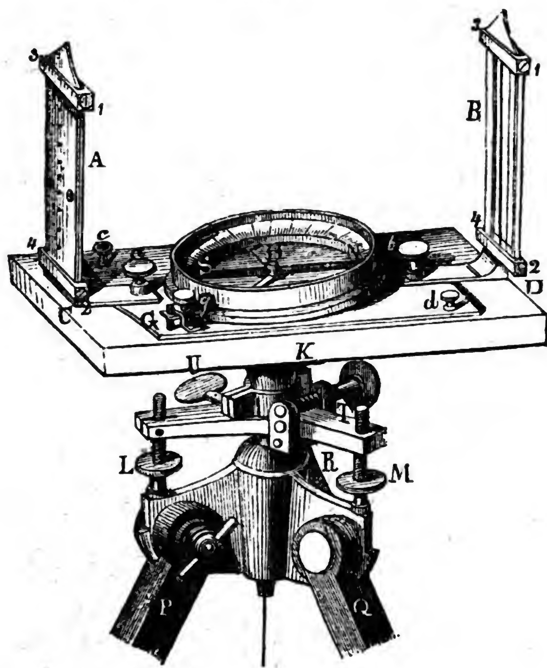
ben auf Null steht, wenn das Fernrohr horizontal gerichtet ist. In dieser Absicht stellt man das Fernrohr so, daß *T* Null anzeigt, und visirt hierbei ein Object an; dann dreht man die Alhidade *AD* um 180°, kippt das Fernrohr und stellt es so, daß der Vernier *T* am Höhenkreise 180° anzeigt. Deckt nun das Fadenkreuz wieder genau dasselbe Object, so ist ein Inderfehler nicht vorhanden; ist es aber nach einem anderen Objecte gerichtet, so halbirt man die Abweichung und dreht den Höhenkreis so viel, daß das Fernrohr nach der Mitte der Abweichung weist. Dieses Geschäft ist natürlich so oft zu wiederholen, bis sich keine Abweichung mehr zeigt.

§. 8. Boussolen.

Man hat Feldmesser-, Markscheider-, Schiffer-, Orientir- und Handboussolen. Hier ist jedoch nur von den ersteren die Rede. Die Feldmesserboussole ist eine Verbindung aus einer Boussole und einem Visirlineale, und wird wie ein Menselblatt auf ein gewöhnliches Meßtischstativ aufgeschraubt. Fig. 111 auf nebenstehender Seite führt eine solche Boussole mit Diopteru vor Augen. Die Diopter *A* und *B* sind mittels der Schrauben *a* und *b* auf die Boussolenplatte und diese ist wieder mittelst der Schrauben *c* und *d* auf das Holzblatt *CD* aufgeschraubt. Die Magnetnadel *SN* dreht sich mit ihrem Hütchen *H* auf einem Stahlstifte und läßt sich mittels eines Hebels *GH* durch eine Schraube *g* arretiren, d. i. abheben und gegen den Glasdeckel andrücken. Die Horizontalstellung erfolgt durch die drei Stellschrauben *K, L, M*, welche oben durch drei Arme hindurchgehen und unten in drei Pfannen ruhen. Letztere sitzen auf den drei Lappen oder Flügeln des Stativkörpers, an welche auch die Stativbeine *P, Q, R* angebolzt sind. Zum Richten der Boussole dient endlich die Schraube ohne Ende *T*, welche jedoch nicht eher in Bewe-

gung zu setzen ist, als nachdem man die Preßschraube *U* angezogen hat.

Fig. 111.



Die Magnetnadel gibt unmittelbar den Winkel an, um welchen der magnetische Meridian von der Visirebene abweicht; da man aber durch dieselbe das Entgegengesetzte, nämlich die Abweichung der Visirebene vom magnetischen Meridian angeben will, so versieht man die Boussole mit einer entgegengesetzt laufenden Eintheilung. Um den Winkel zwischen zwei Visirlinien zu erhalten, zieht man ihre von der Nadel angegebenen Abweichungs-, Streich- oder Azimuthalwinkel von einander ab, und zwar stets den der

links liegenden Linie von der mehr rechts gerichteten. Ist der erstere größer als der letztere, so vergrößere man ihn um 360°. Wenn z. B. der Azimuthalwinkel der mehr links liegenden Visirlinie 321°,3 und der der mehr rechts liegenden 35°,7 ist, so hat man den Winkel zwischen beiden Linien = 360° + 35°,7 — 321°,3 = 395°,7 — 321°,3 = 74°,4.

Die Boussole hat vor den anderen Winkelmeßinstrumenten den Vorzug, daß sie nicht fordert, im Scheitel des zu messenden Winkels, sondern auch gestattet, irgendwo in den Schenkeln desselben aufgestellt zu werden. Ist zu befürchten, daß nahe gelegene Eisenmassen die Richtung der Magnetnadel abändern, so ist allerdings das Aufstellen der Boussole im Scheitel des zu messenden Winkels eine nothwendige Bedingung. Die Genauigkeit, und deshalb auch der Werth der Boussolenmessungen wird durch die täglichen Veränderungen der magnetischen Declination sehr beeinträchtigt. In der Regel ist diese Declination gegen 8 Uhr Morgens am kleinsten und gegen 1 Uhr Mittags am größten. Es bewegt sich also die Nordspitze der Magnetnadel innerhalb dieser Zeit von Ost nach West, und später wieder denselben Weg zurück, also von West nach Ost. Des Nachts ist diese Bewegung fast Null, und daher die beste Zeit zum Messen mit der Boussole, dagegen die Zeit zwischen 8 und 1 Uhr des Tages hierzu die ungeeignetste. Diese tägliche Variation der Magnetrichtung ist auch in verschiedenen Monaten sehr verschieden, meist im December am kleinsten und im April am größten; nach den Göttingischen Beobachtungen beträgt sie jetzt im April 10 bis 15 Minuten, im December nur 3 bis 4 Minuten, im Mittel des Jahres aber 9 bis 10 Minuten. Ausnahmsweise ist die Variation so unregelmäßig, daß die Declination Vormittags größer als Nachmittags ausfällt; nach den Göttinger Beobachtungen kommen solche Fälle vorzüglich im November, December und Januar, und im Mittel jährlich nur 4mal vor. Meteorologische Erscheinungen, wie z. B. Nordlichter, haben

auf die Richtung des Magnetes besondere Einflüsse, und es ändert sich dieselbe hierbei oft um mehrere Grade. Uebrigens nimmt bei uns in Deutschland die mittlere Declination jährlich ab; in Göttingen war sie 1834: 18°, 41′; 1844 aber nur noch 17°, 47′; nach Goldschmidt läßt sich für das Jahr 1834 + t die mittlere Magnetdeclination setzen:

δ = 18°, 41′, 35″, 56 — 3′, 7″, 77 . t — 0′, 14″, 61 t^2, westlich, z. B. für 1848, und natürlich nur für Göttingen:

δ = 18°, 41′, 35″, 56 — 3′, 7″, 77 . 14 — 0′, 14″, 61 . 196
= 18°, 41′, 35″, 56 — 0°, 43′, 48″, 78 — 0°, 47′, 43″, 56
= 17°, 10′, 3″, 22.

An der Boussole sind folgende Prüfungen zu machen nöthig. In der Regel ist zu erwarten, daß der Limbus derselben richtig in ganze oder halbe Grade eingetheilt sei. Uebrigens kann aber die Spitze des Stiftes zu dem Limbus nicht richtig centrirt sein. Dies zeigt sich, wenn die beiden Enden der Nadel nur bei zwei Stellungen der Boussole um 180°, bei den übrigen Stellungen aber bald mehr, bald weniger von einander abweichen. Nimmt man dann aus den Winkelangaben beider Spitzen das arithmetische Mittel, so bekommt man den richtigen, d. i. von dem Einflusse dieses Fehlers befreiten Winkel. Es können aber auch die beiden Endspitzen der Nadel mit dem Drehungspunkte dieser nicht in eine gerade Linie fallen. Dies erkennt man, wenn die Abweichung beider Spitzen von einander nicht 180° und stets dieselbe ist, man mag die Boussole drehen wie man will. Die Winkel zwischen je zwei Visirlinien gibt eine solche Nadel richtig an; nur die Abweichungen dieser Linien von dem magnetischen Meridiane werden von ihr unrichtig angezeigt. Es versteht sich übrigens von selbst, daß bei horizontaler Aufstellung der Boussole die Nadelspitzen in der Ebene des Limbus spielen müssen.

Man hat ferner die Nadel in Hinsicht ihrer Empfindlichkeit zu prüfen, und in dieser Absicht dieselbe bei verschiedenen Stellungen durch Annäherung von Eisen in Bewegung zu setzen. Geräth sie hierdurch in lebhafte Schwin-

gungen, und werden dieselben nach Wegnahme des Eisens allmälig kleiner und kleiner, gelangt sie ferner erst nach längerer Zeit in Ruhe und nimmt genau den ersten Stand wieder an, so bleibt hierin nichts zu wünschen übrig. Außerdem aber hat sich entweder die Spitze des Stiftes abgestumpft, oder es ist die magnetische Kraft der Nadel zu schwach. Meist tritt das Erstere ein, und es ist dann der Stift wieder spitzer zu schleifen; außerdem aber hat man die Nadel frisch zu magnetisiren.

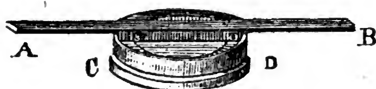
Man hat ferner zu untersuchen, ob in dem Boussolengehäuse keine Eisentheile enthalten sind; denn diese geben der sich ihnen sehr nähernden Nadel eine andere Richtung. In der Absicht dies zu prüfen, nähert man der auf einem Stifte außerhalb der Boussole aufgestellten Nadel die Boussole von allen Seiten und sieht zu, ob dieselbe dabei ihre Richtung behält. Noch sicherer prüft man auch, wenn man die Boussole wiederholt um denselben Winkel und so nach und nach im Kreise herumdreht, und dabei zusieht, ob ihre Nadel stets denselben Winkel anzeigt.

Es ist auch wie bei jedem Visirlineale zu untersuchen, ob die Visirebene auf der Ebene des Limbus winkelrecht steht. Man stellt deshalb die Dosenlibelle auf den Limbus und bringt diesen durch die Stativschrauben *L*, *M* und *N* in eine horizontale Lage; hierauf visirt man ein ausgehängtes Loth an, und sieht zu, ob dies von dem Faden im Objectivdiopter gedeckt wird. Außerdem sind die Diopterblätter durch die Schrauben 1, 2, 3, 4 zu verrücken. Da man beim Arbeiten mit der Boussole die Libelle auf den Glasdeckel stellt, so muß man natürlich auch untersuchen, ob dessen äußere Fläche mit dem Limbus parallel läuft. Uebrigens wird natürlich durch die Magnetnadel selbst der horizontale Stand der Boussole ungefähr mit angezeigt.

Damit die Boussole die richtigen Azimuthalwinkel der Visirlinien in Hinsicht auf den magnetischen Meridian angebe, ist nöthig, daß die Visirebene durch 0° und 180° der Eintheilung gehe. Diese Prüfung vollzieht man ähnlich

wie die eines Diopterlineals in Hinsicht auf das Zusammenfallen der Visirebene mit der Kante des Lineals. In dieser Absicht verbinde man ein Lineal wie *AB*, Fig. 112, mit der Boussole *CD* so, daß der Stand desselben genau durch 0° und 180° geht, und prüfe nun das Zusammenfallen von

Fig. 112.



AB und der Visirebene durch Aufstellen und Umhängen an zwei Arme genau wie ein Diopterlineal (S. §. 4). Endlich soll noch die Ebene des Limbus oder die des Glasdeckels winkelrecht stehen auf der vertikalen Axe des Stativhalses; was man durch Beobachtung der auf dem Glasdeckel aufgestellten Libelle während einer Umdrehung um diese Axe leicht prüft.

§. 9. Conservation der Instrumente.

Es versteht sich von selbst, daß man alle Stöße und gewaltsamen Bewegungen an den Meßinstrumenten vermeiden, daß man zumal die eingetheilten Kreise, Fernröhre, Libellen u. s. w. möglichst schonen muß, z. B. das Instrument nicht an erstere heben darf. Uebrigens sind Staub und Sand den Instrumenten besonders schädlich. Da aber während des Arbeitens das Ansetzen desselben, namentlich bei Wind, unvermeidlich ist, so muß man denselben oft durch Pinsel, feine Bürsten oder einen leinenen Lappen zu entfernen suchen. Um den Regen, zumal aber um den Sonnenschein abzuhalten, soll man, namentlich bei Arbeiten mit dem Theodoliten oder mit dem Libellenniveau, unter einem Schirme oder Zelte arbeiten.

Uebrigens sind zur Verhinderung des starken Abführens Schmiermittel jedoch nur mit großer Sorgfalt in Anwendung zu bringen. Die Stahlzapfen von Theodoliten, die Ringe von Nivellirfernröhren u. s. w. sind mit ganz rei-

nem Uhrmacher- oder Ochsenklauen-Oel, welches keine Oxydation verursacht, zu befeuchten. Uebrigens hat man noch die sogenannte harte und die weiche Schmiere in Anwendung zu bringen. Jene besteht aus 3 Theilen Rindstalg und 1 Theil gelbem Wachse, und wird vorzüglich da gebraucht, wo sich kleine Flächen mit starkem Drucke über einander bewegen. Die andere hingegen wird aus Talg und wenig, aber ganz reinem Baumöl zusammengesetzt, so daß sie kalt, etwas fester als Schweinefett ausfällt, und dient besonders zum Einschmieren größerer Flächen. Die Schrauben ohne Ende bei Meßtischen z. B. sind mit harter Schmiere zu behandeln; bei Preßringen, Kippregelaxen u. s. w. hingegen ist die weiche Schmiere in Anwendung zu bringen. Es versteht sich von selbst, daß das Reinigen dem Einschmieren vorausgehen muß.

Die Gläser an den Fernröhren sind ebenfalls von Zeit zu Zeit mit ganz reinen feinen Lappen abzuwischen. Uebrigens ist es rathsam, das Instrument nach Einsetzen der Gläser von Neuem zu prüfen.

Zweites Kapitel.

Formeln und Regeln.

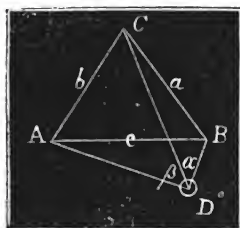
---

§. 10. Problem der drei Punkte.

Es sind die Seiten a, b, c und also auch die Winkel A, B, C des Dreieckes ABC, Fig. 113 auf nebenst. Seite, bekannt; man soll die Lage eines vierten Punktes D mittels der durch Aufstellen in D erhaltenen Visirwinkel $CDB = \alpha$ und $CDA = \beta$ berechnen.

Setzt man $\angle CBD=\varphi$, $\angle CAD=\psi$ und $\varphi+\psi=\delta$,

Fig. 113.



so hat man:

1) $\delta=\varphi+\psi=360^\circ-(C+\alpha+\beta)$, ferner

2) $cotg.\varphi=cotg.\delta+\frac{a\,sin.\,\beta}{b\,sin.\alpha\,sin.\delta}$,

hieraus $\psi=\delta-\varphi$, und

3) $CD = x = \frac{a\ sin.\ \varphi}{sin.\ \alpha}$.

Oder, setzt man:

1) $\frac{a\ sin.\beta}{b\ sin.\ \alpha} = tang.\ \mu$, so hat man außer

2) $\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{\delta}{2} = 180^\circ - \frac{C+\alpha+\beta}{2}$, noch

3) $tang.\ \left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) = tang.\ \frac{\delta}{2}\ .\ cotg.\ (45^\circ+\mu)$ und daher

4) $\varphi = \frac{\varphi+\psi}{2} + \frac{\varphi-\psi}{2}$, so wie

5) $\psi = \frac{\varphi+\psi}{2} - \frac{\varphi-\psi}{2}$, u. s. w.

Beispiel. Aus den drei Seiten $a = 3492{,}7$ Fuß, $b=3652{,}4$ und $c=4015{,}2$ Fuß des Dreieckes ABC und aus den Visirwinkeln $\alpha = 35^\circ,41',10''$ und $\beta = 54^\circ,23',30''$ ist die Entfernung CD zu berechnen. Nach einer Formel auf S. 229 berechnet sich zunächst der Winkel $C=68^\circ,20',22''$; und hiernach folgt nun:

1) $\delta = \varphi+\psi = 360^\circ - (68^\circ,20',22''+90^\circ,4',40'')$
$= 201^\circ,34',58''$; ferner

2) $cotg.\ \varphi$

$= cotg.201^\circ,34',58''+\frac{3492{,}7\ sin.\ 54^\circ,23',30''}{3652{,}4 sin.35^\circ,41',10'' sin\ 201^\circ,34',58''}$

$= cotg.\ 21^\circ,34',58''-\frac{3492{,}7\ sin.\ 54^\circ,23',30''}{3652{,}4\ sin.\ 35^\circ,41',10''\ sin.21^\circ,34',58''}$

$= 2{,}527932 - 3{,}623199 = -1{,}095267$;

Hiernach ist $\varphi = 180^\circ-42^\circ,23',48'' = 137^\circ,36',12''$ und

3) $CD = x = \frac{3492,7 \ sin. \ 137^0,36',12''}{sin. \ 35^0,41',10''} = 4037,04$ Fuß.

Nach der zweiten Methode ist:

1) $tang. \ \mu = \frac{3492,7 \ sin. \ 54^0,23',30''}{3652,4 \ sin. \ 35^0,41',10''}$, hiernach

$log. \ tang. \ \mu = 0,1247571$ und $\mu = 53^0,7',7''$; ferner ist

2) $\frac{\varphi + \psi}{2} = 100^0, \ 47', \ 29''$;

3) $tang. \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = tang. \ 100^0,47',29'' \ . \ cotg. 98^0,7',7''$,

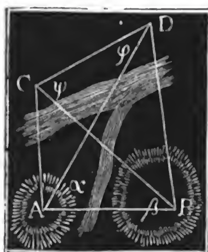
hiernach $log. \ tang. \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = 9,8741464$ und

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = 36^0, \ 48', \ 43''.$$

Folglich ist $\varphi = 100^0,47',29'' + 36^0,48',43'' = 137^0,36',12''$
und $\psi = 100^0,47',29'' - 36^0,48',43'' = 63^0,58',46''$;
genau wie vorher, weshalb auch CD nicht anders ausfallen kann.

§. 11. Unzugängliche Distanz.

Fig. 114.



Es ist aus der Standlinie $AB = a$, Fig. 114, und aus den Visirwinkeln $CAB = A$, $DBA = B$, $DAB = \alpha$ und $CBA = \beta$, die unzugängliche Distanz $CD = b$ zu finden.

Es ist $CD = b$

$$= a \sqrt{\left[\left(\frac{sin. \ \alpha}{sin. (B+\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{sin. \ A}{sin. (A+\beta)}\right)^2 - 2 \left(\frac{sin. \ \alpha}{sin. (B+\alpha)}\right) \left(\frac{sin. \ A}{sin. (A+\beta)}\right) cos. \ (B-\beta)\right]},$$

oder, wenn man den Winkel $ADC = \varphi$, und den Winkel $BCD = \psi$ und

1) $\frac{sin.\alpha}{sin.\beta} \cdot \frac{sin.(A+\beta)}{sin.(B+\alpha)} \cdot \frac{sin.(B-\beta)}{sin.(A-\alpha)} = tang.\ \mu$ setzt,

2) $\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$,

3) $tang.\ \left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) = tang.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ cotg.\ (45^\circ+\mu)$,

hieraus

4) $\varphi = \frac{\varphi+\psi}{2} + \frac{\varphi-\psi}{2}$,

5) $\psi = \frac{\varphi+\psi}{2} - \frac{\varphi-\psi}{2}$,

6) $CD = b = \frac{a\ sin.\ \alpha\ sin.\ (B-\beta)}{sin.\ \psi\ \ sin.\ (B+\alpha)} = \frac{a\ sin.\beta\ sin.\ (A-\alpha)}{sin.\ \varphi\ \ sin.\ (A+\beta)}$.

Ist umgekehrt $CD = b$ die gemessene Standlinie, und wird $AB = a$ gesucht, so hat man nach der ersten Methode

$$a = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{sin.\ \alpha}{sin.\ (B+\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{sin.\ A}{sin.\ (A+\beta)}\right)^2 - 2\left(\frac{sin.\ \alpha}{sin.\ (B+\alpha)}\right)\left(\frac{sin.\ A}{sin.\ (A+\beta)}\right) cos.\ (B-\beta)}}.$$

nach der zweiten:

$$a = \frac{b\ sin.\ (B+\alpha)\ sin.\ \psi}{sin.\ (B-\beta)\ sin.\ \alpha} = \frac{b\ sin.\ (A+\beta)\ sin.\ \varphi}{sin.\ (A-\alpha)\ sin.\ \beta}.$$

Beispiel. Man hat die Hilfsstandlinie CD durch unmittelbares Ausmessen = 6598,32 Fuß und mittels eines Theodoliten die Winkel $A = 95^\circ, 17', 20''$, $B = 78^\circ, 35', 10''$, $\alpha = 61^\circ, 41', 50''$ und $\beta = 39^\circ, 38', 40''$ gefunden und sucht nun die Hauptstandlinie $AB = a$. Nach der ersten Regel ist:

$$a = \frac{6598{,}32}{\sqrt{\left(\frac{\sin. 61^\circ, 41', 50''}{\sin. 39^\circ, 43', 0''}\right)^2 + \left(\frac{\sin 84^\circ, 42', 40''}{\sin. 45^\circ, 4', 0''}\right)^2 - 2\left(\frac{\sin. 61^\circ, 41', 50''}{\sin. 39^\circ, 43', 0''}\right)\left(\frac{\sin. 84^\circ, 42', 40''}{\sin. 45^\circ, 4', 0''}\right)\cos. 38^\circ, 56', 30''}}$$

$$= \frac{6598{,}32}{\sqrt{1{,}898555 + 1{,}978403 - 3{,}014805}} = \frac{6598{,}32}{\sqrt{0{,}862153}}$$

$= 7106{,}26$ Fuß.

Nach der zweiten Methode hat man:

1) $$\tang. \mu = \frac{\sin. 61^\circ, 41', 50''. \sin 45^\circ, 41', 10''. \sin. 38^\circ, 56', 30''}{\sin. 39^\circ, 38', 40''. \sin. 39^\circ, 43'. \sin. 33^\circ, 35', 30''},$$

hiernach $\log. \tang. \mu = 10{,}2397521$ und $\mu = 60^\circ, 4', 5''$; ferner

2) $$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{101^\circ, 20', 30''}{2} = 50^\circ, 40', 15'',$$

3) $$\tang. \left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) = \tang. 50^\circ\, 40', 15''\ \cotg. 105^\circ, 4', 5'',$$

hiernach $\log. \tang. \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = 9{,}5166469$, und

$\frac{\varphi - \psi}{2} = -18^\circ, 11', 23''$; daher

4) $\varphi = 50^\circ, 40', 15'' - 18^\circ, 11', 23'' = 32^\circ, 28', 52''$,

5) $\psi = 50^\circ, 40', 15'' + 18^\circ, 11', 23'' = 68^\circ, 51', 38''$, und

$$AB - a = \frac{6598{,}32 \sin. 39^\circ, 43', 0''\ .\ \sin. 68^\circ, 51', 88''}{\sin. 38^\circ, 56', 30''\ \sin. 61^\circ, 41', 50''}$$

$= 7106{,}25$ Fuß.

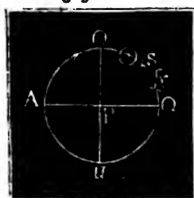
§. 12. Zeitbestimmung.

1 Stunde	Zeit	= 15 Grad	Bogen,
1 Minute	»	= 15 Min.	»
1 Secunde	»	= 15 Sec.	»
1 Grad	Bogen	= 4 Min.	Zeit,
1 Min.	»	= 4 Sec.	»
1 Sec.	»	= $\frac{1}{15}$ Sec.	»

1 Sterntag = 23 St. 56 Min. 4 Sec.

Um den Gang einer Uhr zu prüfen, richtet man ein Fernrohr nach einem Firsterne und sieht zu, ob nach dieser Uhr 23 St. 56 Min. 4 Sec. verflossen sind, wenn derselbe Stern den folgenden Tag durch das Fadenkreuz des unverrückt gebliebenen Fernrohres geht. Anfang des **Sterntages** ist, wenn der Frühlingspunkt (♈) culminirt oder durch den Meridian geht; Anfang des **wahren Mittags**, wenn der Mittelpunkt der wahren Sonne culminirt, und der **mittlere Mittag** tritt ein, wenn die (eingebildete) mittlere Sonne durch den Meridian geht. Uebrigens hat man, wenn *AOQU*, Fig. 115, den Aequator, *OU* den Meridian und *P* die Weltaxe bezeichnet,

Fig. 115.



♈*O* = Sternzeit, ⊙*O* = wahre Zeit und *SO* = mittlere Zeit; so wie ♈⊙ = Rectascension der wahren, sowie ♈*S* = Rectascension der mittleren Sonne.

Es ist ferner die wahre Zeit ⊙*O* = Sternzeit ♈*O* — Rectascens. ♈⊙ von ⊙, so wie die mittlere Zeit *SO* = Sternzeit ♈*O* — Rectascens. ♈*S* von *S*. Die **Zeitgleichung** *S*⊙ ist = Rectascens. ♈⊙ der wahren Sonne — Rectascens. ♈*S* der mittleren Sonne; und hirrnach

Mittlere Zeit *OS* = wahre Zeit *O*⊙ + Zeitgleichung ⊙*S*.
Wahre Zeit *O*⊙ = mittlere Zeit *OS* — Zeitgleichung.

Die Zeitgleichung, so wie andere Zahlenelemente der Astronomie und mathematischen Geographie werden für jeden Tag im Jahre in den astronomischen Ephemeriden, z. B. im Berliner astronomischen Jahrbuche, mitgetheilt; hier folgen nur die in Minuten ausgedrückten Zeitgleichungen eines Jahres. Wie man sieht, ist dieselbe vier Mal des Jahres Null.

Die mittlere Zahl geht:

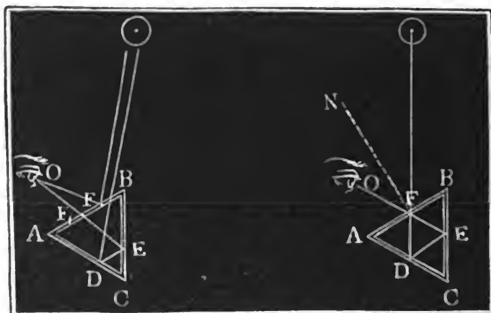
vor	nach
um 1 Min. den 27. Decbr.	um 1 Min. den 20. April.
2 » » 29. »	2 » » 25. »
3 » » 31. »	3 » » 11. Mai.
4 » » 1. Januar	4 » » 15. »
5 » » 4. »	3 » » 29. »
6 » » 6. «	2 » » 5. Juni.
7 » » 8. »	1 » « 10. »
8 » » 11. »	0 » » 15. »
9 » » 13. »	
10 » » 16. »	
11 » » 19. »	
12 » » 23. »	
13 » » 27. »	
14 » » 2. Febr.	
$14\frac{1}{2}$ » » 13. »	
14 » » 20. »	
13 » » 27. »	
12 » » 4. März	
11 » » 8. »	
10 » » 12. »	
9 » » 16. »	
8 » » 19. «	
7 » » 23. »	
6 » » 26. «	
5 » » 29. »	
4 » » 1. April.	
3 » » 5. »	
2 » » 8. »	
1 » » 12. »	
0 » » $15\frac{1}{2}$ »	

Die mittlere Zeit geht:

vor	nach
um 1 Min. den 20. Juni.	um 1 Min. den 4. Septbr.
2 » » 24. »	2 » » 7. »
3 » » 29. »	3 » » 10. »
4 » » 4. Juli.	4 » » 13. »
5 » » 11. »	5 » » 16. »
6 » » 20. »	6 » » 19. »
6 » » 2. August.	7 » » 22. »
5 » » 11. »	8 » » 25. »
4 » » 17. »	9 » » 27. »
3 » » 21. »	10 » » 30. »
2 » » 25. »	11 » » 4. Octbr.
1 » » 29. »	12 » » 7. »
0 » » 1. Septbr.	13 » » 11. »
	14 » » 15. »
	15 » » 20. »
	16 » » 28. »
	$16\frac{1}{4}$ » » 3. »
	16 » » 9. »
	15 » » 17. »
	14 » » 21. »
	13 » » 25. »
	12 » » 28. »
	11 » » 1. Decbr.
	10 » » 3. »
	9 » » 6. »
	8 » » 8. »
	7 » » 10. »
	6 » » 12. »
	5 » » 15. »
	4 » » 17. »
	3 » » 19. »
	2 » » 21. »
	1 » » 23. »
	0 » » 25 »

Der wahre Mittag oder der Durchgang des wahren Sonnenmittels durch den Meridian, läßt sich durch Anvisiren der Sonne mittels eines in der Meridianebene drehbaren Fernrohres bestimmen. In neueren Zeiten verwendet man hierzu auch das Dipleidoscop, Fig. 116, welches durch Zusammenfallen zweier Sonnenbilder die wahre Mittagszeit anzeigt. Es sind hier *AC* und *BC* zwei um 60 Grad gegen einander gestellte Spiegel, es ist ferner *AB* eine unbelegte Glastafel, und es wird das Instrument so aufgestellt, daß die Spiegelebene *BC* in den Meridian fällt. Steht die Sonne ⊙ im Meridian, so wird der in der Meridianebene einfallende Strahl ⊙ *D* von den beiden Spiegeln *AC* und *BC* in die Richtungen *DE* und *EFO* so gebrochen, daß die Abweichung des in's Auge *O* gelangten Strahles *FO* mit der Normale *FN* auf *AB* denselben Winkel einschließt, wie der einfallende Strahl ⊙ *F*, und deshalb auch zusammenfällt mit dem von *AB* unmittelbar reflectirten Strahl; es wird also auch das Sonnenbild, welches *AC* und *BC* zurückwerfen, mit dem Sonnenbilde zusammenfallen, welches *AB* allein reflectirt. Bei der Beobachtung sieht man anfänglich diese Sonnenbilder, wie

Fig. 117. Fig. 116.



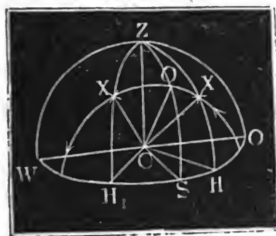
F und F_1 Fig. 117, immer näher und näher an einander rücken, sich später berühren, nachher decken und

später noch einmal berühren. Nimmt man erst aus den Zeiten der Berührung und dann aus der Zeit des Deckens das Mittel, so erhält man sehr genau den wahren Mittag. Beobachtet man den Durchgang eines Sternes durch den Meridian, so ist dessen, nach Befinden um 12 Stunden zu vergrößernde, Rectascension die Sternzeit der Beobachtung, und diese nach dem Obigen erst in die mittlere Sonnenzeit zu verwandeln.

Wenn der Meridian des Ortes nicht bekannt ist, so ermittelt man die Zeit durch Beobachtungen eines Sternes bei gleichen oder correspondirenden Höhen.

Sind t_1 und t_2 die Zeiten, welche die Uhr anzeigt, wenn der Stern X, Fig. 118, bei gleicher Höhe $HX = H_1X_1$, vor und nach seiner Culmination O beobachtet wird, so hat man die Zeit, welche die Uhr beim Durchgange des Sternes durch den Meridian anzeigt,

Fig. 118.



$$= \frac{t_1 + t_2}{2}$$ und diese muß also auch gleich sein der in mittlere Zeit zu verwandelnden Rectascension t des Sternes. Außerdem geht die Uhr um $\frac{t_1 + t_2}{2} - t$ zu früh, oder um

$t - \frac{t_1 + t_2}{2}$ zu spät, und ist hiernach zu stellen. Benutzt man hierzu die Sonne, so ist, wenn die Beobachtung nicht ganz nahe zur Zeit der Sollstitien (den 21. Juni oder 21. December) erfolgt, noch eine besondere Correction wegen der Veränderlichkeit der Declination oder Abweichung der Sonne vom Aequator nöthig.

Man hat hier, wenn s_1 den vormittägigen und s_2 den nachmittägigen, gleichen Sonnenhöhen entsprechende Stundenwinkel, s aber die in Grade verwandelte Zwischenzeit beider Beobachtungen bezeichnet:

$$1)\ \frac{s_1+s_2}{2}=s,$$

und wenn ferner p die geographische Breite oder Polhöhe des Ortes, $d_1 - d_2$ aber die Veränderung der Poldistanz der Sonne während der Beobachtung, so wie d die mittlere Poldistanz oder Ergänzung der Abweichung zu 90° während dieser Zeit bezeichnet:

$$2)\ \frac{s_1-s_2}{2}=\frac{d_1-d_2}{2}\left(colg.\,d\,colg.\,s-\frac{tang.\ p}{sin.\ s}\right).$$

Hiernach $3)\ s_1=\frac{s_1+s_2}{2}+\frac{s_1-s_2}{2}$ und

$$4)\ s_2=\frac{s_1+s_2}{2}-\frac{s_1-s_2}{2}.$$

Verwandelt man s_1 und s_2 in Zeit, so erhält man hiernach die Zeit des wahren Mittags nach der Uhr, wenn man s_1 zur Zeit der Vormittagsbeobachtung addirt, oder s_2 von der Zeit der Nachmittagsbeobachtung subtrahirt, oder $\frac{s_1-s_2}{2}$ zum Mittel beider Beobachtungszeiten hinzunimmt.

Um die Genauigkeit zu erhöhen, beobachtet man hinter einander die Sonne bei mehreren Höhen, stellt also Nachmittags das Fernrohr nach und nach auf dieselben Höhenwinkel wie Vormittags, und dann führt man statt s das Mittel aller Zwischenzeiten ein.

Beispiel. Den 19. August 1847 hat der Verfasser folgende correspondirende Sonnenhöhen beobachtet:

34°,50′	um 8	Uhr 49	Min. 38½	Sec	und	3	Uhr	28	Min.	17	Sec.	
36°,28′	» 9	» 1	» 20	»	»	3	»	16	»	50	»	
38°,34′	» 9	» 16	» 42½	»	»	3	»	1	»	17	»	
40°,15′	» 9	» 29	» 52	»	»	2	»	48	»	54	»	
42°, 3′	» 9	» 44	» 24	»	»	2	»	34	»	40	»	
43°,54′	» 10	» 0	» 24½	»	»	2	»	18	»	56	»	
45°,28′	» 10	» 15	» 4½	»	»	2	»	4	»	52	»	
46°,50′	» 10	» 29	» 1½	»	»	1	»	51	»	25	»	
48°,15′	» 10	» 45	» 20	»	»	1	»	35	»	58	»	
49°,24′	» 11	» 1	» 1	»	»	1	»	21	»	22	»	
Hiernach die Summe	98	» 52	» 48½	»	»	24	»	22	»	51	»	
u. d. Mittel	9	» 53	» 16″,85	»	»	2	»	26	»	17″,1	»	
					oder	14	»	26	»	17″,1	»	

folglich das letzte Mittel = 12 St. 9 Min. 47″
und die Zwischenzeit = 4 » 33 » 0″,25,
deren Hälfte = 2 » 16 » 40″,125,

in Bogen $s = \frac{s_1 + s_2}{2} = 34^\circ, 7,' 31'',87$.

Die Declination der Sonne ist, für Berlin:
den 19. August Mittags = 12°,55′,40″,3
den 20. » » = 12°,36′, 3″,4

folglich die Abnahme derselben oder die Zunahme der Poldistanz in 24 Stunden . . . . = 0°,19′,36″,9,
also im Laufe der Zwischenzeit von 4 Stunden 33 Min.:

$$d_1 - d_2 = -0^\circ,3',43'',2$$

und $$\frac{d_1 - d_2}{2} = -0^\circ,1',51'',6 = 111'',6.$$

Die Polhöhe des Standpunktes war $p = 51^\circ,2',20''$ und die geographische Länge = 31°,2′,50″. Da aber Berlin die geographische Länge = 31°,3′,15″ hat, so tritt in dem Beobachtungsorte der Mittag um $^{25}/_{15} = {}^{5}/_{3}$ Sec. später ein als in Berlin, und es ist daher die mittägliche Poldistanz d der Sonne an beiden Orten ziemlich dieselbe.

Jetzt folgt $\frac{s_1 - s_2}{2}$

$$= 111'',6 \left(\frac{tang. 51^\circ,2',20''}{sin. 34^\circ,7', 32''} - tg. 12^\circ, 55', 40'' cotg. 34^\circ,7',32''\right)$$

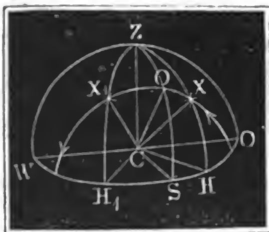
$= 111'',6\ (2,2042 - 0,3387) = 208'',2 = 0^\circ, 3', 28'', 2$, in Zeit = 14 Secunden. Hiernach ist nach der Uhr die Zeit des wahren Mittags = 12 Uhr 9 Min. 47″ + 14″
= 12 Uhr 10 Min. 1 Sec.

Da endlich die Zeitgleichung an diesem Tage 3 Minuten 32 Secunden beträgt, so ist der mittlere Mittag nach unserer Uhr = 12 Uhr 6 Minuten 29 Secunden, und es geht folglich diese Uhr um 6 Minuten 29 Secunden zu zeitig.

§. 13. Meridianbestimmung.

Die Mittagslinie oder der Meridian eines Ortes bestimmt sich wie die Zeit durch Beobachtung correspondirender Sternhöhen HX und H_1X_1, Fig. 119. Halbirt man den Horizontalwinkel HCH_1 zwischen den Visirebenen HZ und H_1Z nach demselben Sterne bei derselben Höhe, so erhält man in der Halbirungslinie CS die Richtung des Meridianes oder die Mittagslinie. Benutzt man die Sonne hierzu, so muß man die entgegengesetzten Sonnenränder anvisiren, und auch auf die Veränderlichkeit der Declination Rücksicht nehmen.

Fig. 119.



Ist a_1 der Azimuthalwinkel Vormittags und a_2 der Nachmittags, so hat man das Mittel beider: $\frac{a_1 + a_2}{2} = a$, und, wenn die Bezeichnungen die Bedeutung wie im vorigen Paragraph haben:

$$\text{die halbe Differenz } \frac{a_1 - a_2}{2} = -\frac{\frac{1}{2}(d_1 - d_2)}{cos.\, p\, sin.\, s}.$$

Hiernach ist derjenige Winkel, bei welchem das Fernrohr im Meridian steht:

$$a_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Das sicherste und einfachste Mittel zur Bestimmung der Mittagslinie bietet die Beobachtung von α (den Polarstern) oder δ im kleinen Bären dar. Der erste dieser beiden Sterne steht ungefähr $1\frac{1}{2}$ Grad, der letztere aber $3\frac{1}{2}$ Grad vom Nordpole ab. Man findet mit Hilfe des großen Bären oder des Himmelswagens A, Fig. 120 a. f. S., den Polarstern sehr leicht; wenn man sich durch die Sterne α und β dieses Sternbildes einen Bogen denkt und diesen

von α aus ungefähr 25 Grad verlängert, so gelangt man zu α in der Schwanzspitze des kleinen Bären; δ aber ist der mittlere von den drei Sternen im Schwanze dieses Bären. Am einfachsten wird die Bestimmung, wenn man den Polarstern in seinem größten östlichen oder westlichen Azimuth beobachtet. Ist X, Fig. 121, der Polarstern, P

Fig. 120.

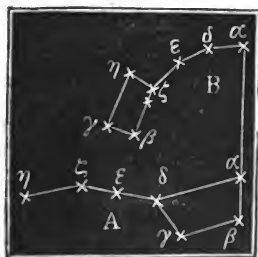


Fig. 121.



der Nordpol, Z das Zenith, C der Standpunkt u. s. w., so hat man in PX = Poldistanz $d = 90^\circ$ — Abweichung, ferner $PZ = 90^\circ$ — Polhöhe $= 90^\circ - p$ und das gesuchte Azimuth $HN = HCN = \angle XZP = a$ bestimmt durch die Gleichung:

$$sin.\ a = \frac{sin.\ PX}{sin.\ PZ} = \frac{sin.\ d}{cos.\ p};$$

und den die Zeit des Eintrittes des größten Azimuthes bestimmenden Stundenwinkel $ZPX = s$ bestimmt durch

$$cos.\ s = tg.\ PX\ .\ cotg.\ PZ = tg.\ d\ tg.\ p.$$

Um nun die Mittagslinie zu erhalten, hat man das Visirlineal oder die Alhidade um den Horizontalwinkel a zu drehen; dadurch gelangt dasselbe aus der Visirebene des Sternes in die Ebene des Meridians.

Für andere Stellungen des Sternes hat man

$$cotg.\ a = \frac{cos.\ p\ \ cotg.\ d - sin.\ p\ cos.\ s}{sin.\ s},$$ wobei s aus der Beobachtungszeit bestimmt, jedoch zu berücksichtigen ist, daß t Stunden Sternzeit = t Stunden mittlerer Zeit minus 9,83 t Secunden ist.

Um eine große Genauigkeit zu erlangen, macht man eine Reihe von Beobachtungen des Polarsternes, und bestimmt so mehrere Azimuthalwinkel; addirt man dann alle Winkel zu den Horizontalwinkeln, welche bei jedesmaliger Beobachtung des Polarsternes abgelesen wurden und nimmt man aus allen diesen Winkeln das Mittel, so erhält man sehr genau den Winkel, auf welchen man das Fernrohr zu stellen hat, um es in die Meridianebene zu bringen.

Am bequemsten rechnet man aber nach folgender Formel

$$a = -\frac{d \sin. s}{\cos. p} - \frac{d^2 tg. p \sin. 2s \sin 1''}{2 \cos. p} + \left(\frac{d \sin. s}{\cos. p} + \frac{2d^2 tg. p \sin. 2s \sin. 1''}{\cos. p}\right). 2\left(\sin. \frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

worin d die Poldistanz des Polarsternes, ferner s den mittleren Stundenwinkel aller Beobachtungen, $\left(\sin. \frac{\alpha}{2}\right)^2$ aber das Mittel von den Quadraten der Sinus der halben Abweichungen der Uhrzeiten jeder Beobachtung von dem Mittel aller Zeiten bezeichnet.

Beispiel 1. Um die Mittagslinie eines Punktes unter 55°, 55′ geographischer Breite anzugeben, wurden den 3ten August 1840 Beobachtungen bei correspondirenden Sonnenhöhen angestellt und Folgendes gefunden:

Azimuthalwinkel bei gleicher Höhe

	Vormittags.		Nachmittags.
	173°, 6′,10″		261°, 0′,10″
	174°,48′,50″		259°, 9′,10″
	177°, 1′,40″		257°, 1′,50″
	179°,11′,40″		254°,45′,20″
	183°,14′,10″		250°,52′,20″
	184°,37′,50″		249°,35′,10″
	187°,24′,50″		246°,53′,40″
	189°,21′,50″		244°,52′,50″
Summe:	1448°,47′, 0″		2024°,10′,30″
Mittel:	181°, 5′,52½″	—	253°, 1′,18¾″.

Letztes Mittel $\frac{a_1 + a}{2}$ = 217°, 3′, 36″.

Nach den astronomischen Ephemeriden war die Declination der Sonne den 3ten August = 17°,43′,10″,9 und
» 4ten » = 17°,27′,33″,2,
folglich die Abnahme derselben in 24 Stunden = 0°,15′,37″,7.

Die mittlere Zwischenzeit zwischen den Vormittags- und den Nachmittagsbeobachtungen war 2 Stunden 58 Minuten = 44½ Grad, folglich die Abnahme der Declination oder die Zunahme der Poldistanz in dieser Zeit

$$= \frac{178}{24.60} \cdot 0°,15',37'',7 = \frac{89}{720} \cdot 937'',7 = 116 \text{ Secunden}$$

= 1 Minute 56″, der Stundenwinkel $s = 22°,15',0''$ und

$$\frac{a_1 - a_2}{2} = -\frac{\frac{1}{2}(d - d_2)}{cos.p\,sin.s} = \frac{\frac{1}{2}\ .\ 116''}{cos.50°,55'\,sin.22°,15''} = 4',3''.$$

Hiernach ist also das Fernrohr auf 217°,3′,36″+0°,4′,3″ = 217°,7′,39″ zu stellen, um es in die Meridianebene zu bringen.

Beispiel. 2. Um die Mittagslinie mittels des Polarsternes zu finden, wurde dieser in seinem größten östlichen Azimuth beobachtet, und es zeigte hierbei der Horizontalkreis 22°, 29′, 0″. Der Tag der Beobachtung war der 22ste Juni 1841, wo die Declination des Polarsternes 88°,27′,37″,23 Sec. betrug, die Polhöhe des Beobachtungsortes war 50°, 35′, 15″, folglich ist für das entsprechende größte Azimuth:

$$sin.\ a = \frac{sin.\ d}{cos.\ p} = \frac{cos.88°,27',37'',23}{cos.50°,35',15''},$$

$$log.sin.\ \alpha = 8,6265436 \text{ und}$$
$$a = 2°,25',32'';$$

also die Alhidade auf 22°,29′,0″—2°,25′,32″=20°,3′,28″ zu stellen, um das Fernrohr in den Meridian zu bringen.

Beispiel 3. Den 10ten September 1847 wurden an einem Orte, dessen geographische Breite ungefähr 50°,59′,0″ und Länge ungefähr 31°, 1′, 0″ (von einer guten Landkarte abgenommen) betrug an dem Polarstern folgende Beobachtungen angestellt.

21*

Zeit:	entspr. mittl. Horizontalwinkel:
7 Uhr 50′, 57″	36°, 30′, 15″
7 » 53′, 45″	36°, 30′, 30″
7 » 56′, 17″	36°, 30′, 30″
7 » 58′, 53″	36°, 30′, 25″
8 » 2′, 38″	36°, 30′, 15″
8 » 5′, 52″	36°, 29′, 55″
8 » 8,′ 42″	36°, 29′, 40″
8 » 12′, 44″	36°, 29′, 25″
8 » 16′, 21″	36°, 29′, 15″
8 » 18′, 31″	36°, 29′, 0″
Mittel: 8 » 4′, 28″	36°, 29′, 55″.

Nach erfolgtem Umschlagen des Fernrohres und Umdrehen der Alhidade ergab sich Folgendes:

Zeit:	entspr. mittl. Horizontalwinkel:
8 Uhr 23′, 13″	36°, 30′, 0″
8 » 26′, 28″	36°, 29′, 55″
8 » 28′, 45″	36°, 29′, 45″
8 » 30′, 40″	36°, 29′, 35″
8 » 32′, 8″	36°, 29′, 20″
8 » 34′, 20″	36°, 29′, 15″
8 » 39′, 59″	36°, 28′, 40″
8 » 41′, 55″	36°, 28′, 15″
8 » 44′, 11″	36°, 27′, 35″
8 » 46′, 6″	36°, 27′, 20″
Mittel: 8 » 34′, 46½″	36°, 28′, 59″
Letztes Mittel: 8 » 19′, 37″	36°, 29,′ 27″.

Die Uhr ging, vorausgegangenen Sonnenbeobachtungen zu Folge, um 11 Min. 15 Sec. zu spät, folglich war das Mittel der Beobachtungszeit 8 Uhr 30′, 52″. Die Sternzeit am Berliner Mittag war den 10. Sept. = 11 Uhr 15′,26″,7. Da aber Berlin um 31°, 2′, 15″ — 31°, 1′, 0″ = 75″ östlicher liegt, so hat es um $^{75}/_{15}$ = 5 Zeitsecunden eher Mittag, und das ist deshalb für das Beobachtungsmittel die

mittlere Zeit in Berlin = 8 St. 30′, 57″ und die Sternzeit = 11 Uhr 15′, 26″,7 + 8 St. 30′, 57″ + 9,83″ . 8,516 = 19 St. 46′, 23″,7 + 83″,7 = 19 St. 47′, 47″,4.

Nun ist aber die Rectascension des Polarsternes an diesem Tage 1 St. 5′, 23″,9; daher folgt der Stundenwinkel des Polarsternes im Mittel der Beobachtungszeit

s = 18 St. 42′, 23″,5 = 280°, 35′, 52″,5, und seine Ergänzung zu 360°, = 79°, 24′, 7″,5.

Die Poldistanz des Polarsternes ist an dem Beobachtungstage d = 1°, 30′, 19″,3 = 5419″,3, folglich

$$1)\quad -\frac{d\ sin.\ s}{cos.\ p} = \frac{5419'{,}3\ sin.\ 79^\circ, 24', 7''{,}5}{cos.\ 50^\circ, 59', 0''} = 8461''{,}5$$
$$= 2^\circ, 21', 1''{,}5,$$

$$2)\quad -\frac{d^2\ tg.\ p\ sin.\ 2\ s\ .\ sin.\ 1''}{2\ cos.\ p}$$
$$= \frac{5419{,}3^2\, tg.\, 50^\circ{,}59'{,}0''\ sin.21^\circ{,}11'{,}45''.\, sin.\, 1''}{2\ cos.\, 50^\circ{,}59'{,}0''} = 50''{,}5;$$

$$3)\quad \frac{d\ sin.\ s}{cos.\ p} + \frac{2\ d^2\, tg.\, p\ sin.\, 2\ s\ sin.\, 1''}{cos.\ p} = -(8461{,}5 + 202{,}0)''$$
$$= -\ 8663''{,}5.$$

Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungszeiten von ihrem Mittel sind:

28′, 40″	3′, 36″		3°, 35′, 0″	0°, 27′, 0″
25′, 52″	6′, 51″		3°, 14′, 0″	0°, 51′, 20″
23′, 20″	9′, 8″	ihre Hälf-	2°, 55′, 0″	1°, 8′, 30″
20′, 44″	11′, 3″	ten in	2°, 35′, 30″	1°, 22′, 50″
16′, 59″	12′, 31″	Graden	2°, 7′, 23″	1°, 33′, 50″
13′, 45″	14′, 43″	ausge-	1°, 43′, 10″	1°, 50′, 20″
10′, 55″	20′, 22″	drückt	1°, 21′, 50″	2°, 32′, 40″
6′, 53″	22′, 18″		0°, 51′, 40″	2°, 47′, 20″
3′, 16″	24′, 34″		0°, 24′, 30″	3°, 4′, 20″
1′, 6″	26′, 29″		0°, 8′, 10″	3°, 18′, 38″

Die Summe von den Quadraten der Sinus dieser Winkel oder $\Sigma\ (sin.\ \frac{1}{2}\ \alpha)^2$ ist = 0,028435, folglich ihr doppeltes Mittel = $\frac{2}{20}$. 0,028435 = 0,0028435, und end-

lich der in Frage stehende Azimuthalwinkel des Beobachtungswinkels:

$$a = -\frac{d\,sin.\,s}{cos.\,p} - \frac{d^2\ tg.\,p\ sin.\,2s\ .\ sin.\,1''}{2\ cos.\ p}$$

$$+ \left(\frac{d\,sin.\,s}{cos.\,p} + \frac{2\,d^2\,tg.p\,sin.2s}{cos.\ p}sin.1''\right)\ .\ 2\left(sin.\ \frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$= 2^0, 21', 1'',5 + 0^0, 0', 50'',5 - 8663'',5\ .\ 0{,}0028435$$

$$= 2^0, 21', 52'',0 - 0^0, 0', 25'' = 2^0, 21', 26''$$

und hiernach die Alhidade auf

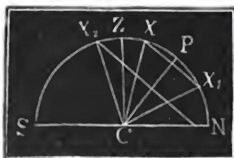
$$36^0, 29', 27'' - 2^0, 21', 16'' = 34^0, 8', 0''$$

zu stellen, um das Fernrohr in den Meridian zu bringen. Um die möglichst größte Genauigkeit zu erzielen, wurde das Fernrohr umgeschlagen und die Alhidade so weit umgedreht, daß der Winkel von 34°, 8′, 0″ am entgegengesetzten Vernier abzulesen war, endlich aber das Mittel aus beiden Visirlinien als Mittagslinie abgesteckt.

§. 14. Geographische Breite.

Die geographische Breite eines Ortes ist gleich seiner Polhöhe. Um dieselbe zu finden, beobachtet man mit Hilfe eines Theodoliten die obere oder beide Culminationen eines Sternes, in welchem Falle er bekanntlich seinen höchsten oder tiefsten Stand eingenommen hat. Steht der Stern nördlich vom Zenith Z, wie X oder X_1, Fig. 122, so ist die Polhöhe $NP = p = h \mp d$, wo h die Sternhöhe und d die Poldistanz des Sternes bezeichnet, das Minuszeichen bei der oberen, das Pluszeichen aber bei der unteren Culmination zu nehmen ist. Steht der Stern südlich vom Zenith, so hat man statt h, $180^0 - h$ zu setzen, weil hier für h der Bogen SX_2 einzusetzen ist.

Fig. 122.



Um durch den Höhenkreis eine vom Collimationsfehler befreite Angabe von h zu erhalten, ist es nöthig, die Beob-

achtung beim umgeschlagenen Fernrohre und umgedrehter Alhidade zu wiederholen.

Beobachtet man den Stern in beiden Culminationen, so bestimmt sich die Polhöhe unabhängig von d:

$p = \frac{h+h_1}{2}$, wo h und h_1 die beiden beobachteten Culminationshöhen des Sternes sind.

Die beobachteten Sternhöhen sind um den Refractionswinkel OCO_1, Fig. 123, zu vermindern, ehe sie als wahre Sternhöhen in die Formeln eingesetzt werden können. Dieser Winkel läßt sich bei b Zoll Barometer- und t^0 Thermometerstand, sofern die Höhe mindestens 15° beträgt, setzen

$$\varrho = 60'' \frac{b}{28} \cdot \frac{cotg.\, h}{1+0{,}00367\, t}.$$

Da er mit der Zenithdistanz abnimmt und eine sehr zuverlässige Bestimmung nicht zuläßt, so soll man überhaupt dahin zu trachten suchen, die Sterne nur bei großen Höhen zu beobachten. Am besten sind aber diejenigen Beobachtungen, welche diese Correction nicht erfordern. Beobachtet

Fig. 123.

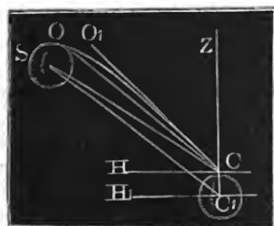
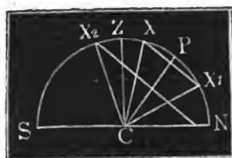


Fig. 124.

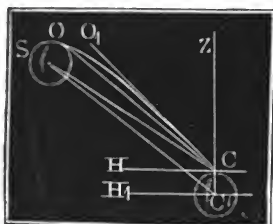


man die Culminationen zweier Sterne X und X_2, Fig. 124, welche auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths Z von diesem um gleich viel abstehen, deren Poldistanzmittel $\frac{d+d_1}{2}$ also der Aequatorhöhe gleich ist, so macht man sich durch das Mittel beider Beobachtungen von dem Refractions- und Collimationsfehler zugleich unabhängig. Es ist in diesem

Falle $p = \frac{h-d+180-h_1-d}{2} = \frac{180^0+h-h_1-2d}{2}$ zu setzen, und wenn nun h und h_1 wenig von einander verschieden sind, so fällt die Differenz der entsprechenden Refractionswinkel klein genug aus, um sie außer Acht lassen zu können.

Da sich an der Sonne S, Fig. 125, nur der obere oder untere Rand anvisiren läßt, so muß man die Beobachtungen derselben um den scheinbaren Sonnenhalbmesser OCS (15',45" bis 16',17") corrigiren. Auch ist hier die beobachtete Höhe noch um die Parallaxe $C\ S\ C_1 =$ 8",55 $cos.\ h$ zu vergrößern, um die Beobachtung auf den Mittelpunkt C_1 der Erde zurückzuführen.

Fig. 125.



Um ein von den Beobachtungs- und Instrumentfehlern möglichst befreites Resultat zu erhalten, bestimmt man die Polhöhe durch eine Reihe von Circummeridianhöhen.

Ist h die Höhe des Sternes nahe beim Meridian, p die Polhöhe, d die Poldistanz des Sternes und s der Stundenwinkel, α die diesem Winkel entsprechende Aenderung der Poldistanz (bei Fixsternen = Null), so hat man für die Culmination auf der Südseite:

1) annähernd $p = 180^0 - (h+d)$ und hiernach schärfer

2) $p = 180^0 - \left(h + d - \alpha - \frac{cos.\,p\ sin.\,d}{cos.\,(p+d)} \cdot \frac{s^2}{2}\right)$.

Dagegen für die obere Culmination auf der Nordseite:

1) annähernd $p = h - d$, und schärfer

2) $p = h - d + \alpha + \frac{cos.\,p\ sin.\,d}{cos.\,(p+d)} \cdot \frac{s^2}{2}$,

und für die untere Culmination:

1) annähernd $p = h + d$, und schärfer

2) $p = h + d - \alpha - \frac{cos.\,p\ sin.\,d}{cos.\,(p-d)} \cdot \frac{s^2}{2}$.

Bei einer Reihe von Beobachtungen führt man natürlich für h, α und $\frac{s^2}{2}$ Mittelwerthe ein.

Beispiel. Den 11. März 1794 wurden in Göttingen folgende Circummeridianhöhen der Sonne beobachtet:

Uhrzeit der Beobachtung.	Zenithdistanz des obern Sonnenrandes.
23 Uhr 57′, 30″	54°, 45′, 45″
23 » 58′, 32″	54°, 45′, 32″
0 » 1′, 0″	54°, 45′, 20″
0 » 3′, 25″	54°, 45′, 27″
0 » 4′, 28″	54°, 45′, 35″
0 » 5′, 55″	54°, 45′, 50″
Mittelwerth:	54°, 45′, 34″,8,
also die mittlere Höhe:	35°, 14′, 25″,2.

Die mittägige Poldistanz der Sonne war den Ephemeriden zu Folge $d = 93°, 30′, 38″$; und daher die vorläufige Polhöhe $= 180° - (93°, 30′, 38″ + 35°, 14′, 25″,2)$ $= 180° - 128°, 45′, 3″,2 = 51°, 14′, 56″,8$, wofür, wegen der circa $60″$ $tg.$ $54°, 45′ = 85″$ betragenden Refraction und zumal wegen des scheinbaren Sonnenhalbmessers von $16′, 8″,1$ zu setzen ist: $p = 51°, 33′$. Hiernach folgt nun:

$$\frac{\cos. p \sin. d}{2 \cos. (p+d)} = \frac{\cos. 51°,33′ \sin. 93°,30′,38″}{2 \cos. 145°, 3′, 38″} = -0{,}3785.$$

Die Abweichungen der Beobachtungszeiten von der Zeit 0 Uhr 1 Min. 19 Sec., welche die Uhr zu Mittag anzeigt, sind:

Abweichung		in Bogen =		die Quadrate der Sinus der Winkel
− 3′,49″		0°, 57′, 15″		0,0002773
− 2′,47″		0°, 41′, 45″		0,0001474
− 0′,19″		0°, 4′, 45″		0,0000022
+ 2′, 6″		0°, 31′, 30″		0,0000840
+ 3′, 9″		0°, 47′, 15″		0,0001889
+ 4′,36″		1°, 9′, 0″		0,0004028

Hiernach ist das Mittel von s^2 oder $\left(\frac{\sin. s}{2}\right)^2 = 0{,}0001821$

und daher $\frac{cos.\, p\, sin.\, d}{cos.\, (p+d)} \cdot \frac{s^2}{2} = -$ 0,3785 . 0,0001821 $= -$0,00006892, in Secunden $= -$ 206265″ . 0,00006892 $= -$ 14″,2.

Da die Veränderlichkeit der Declination sehr klein ist, so läßt sie sich außer Acht lassen, und daher setzen:

$$p = 180^0 - \left(h + d - \frac{cos.\, p\, sin.\, d}{cos.\, (p+d)} \cdot \frac{s^2}{2}\right) = 51^0,14',56'',8 - 14'',2 = 51^0,14',42'',6.$$

Hierzu aber kommt der
Sonnenhalbmesser . . . . $= 0^0,16',\ 8'',1,$
der Refractionswinkel . . . . $= 0^0,\ 1',20'',5,$
und die Parallaxe $-$ 8″,55 $cos.$ 35° $= -$ 0°, 0′, 6″,8;
daher folgt die gesuchte Polhöhe oder Breite von Göttingen:

$$p = 51^0 + 14',\ 42'',6 + 0^0,\ 17',21'',8 = 51^0,32',\ 4'',6.$$

§. 15. Geographische Länge.

Der geographische Längenunterschied zweier Orte wird angegeben durch den in Bogen verwandelten Unterschied zwischen den einerlei Augenblick entsprechenden Zeiten dieser Orte. Wird daher an beiden Orten eine und dieselbe momentane Erscheinung beobachtet, so findet man den Längenunterschied, wenn man die Beobachtungszeiten von einander subtrahirt und in Bogen verwandelt. Bei kleinen Entfernungen von höchstens 10 Meilen bedient man sich hierzu mit großer Sicherheit der Racketen oder Pulversignale, die man auf einem Berge in der Nähe dieser Orte entzündet. Die Beobachtungen der Verfinsterungen des Mondes, oder der Trabanten des Jupiters geben wenig Genauigkeit. Viel schärfer sind die Sonnenfinsternisse und andere Sternbedeckungen durch den Mond zu beobachten; nur stehen diese Hilfsmittel nicht zu allen Zeiten zu Gebote. Dagegen sind die Beobachtungen der Orte des mit großer Geschwindigkeit (beinahe 15° täglich) an dem Firsternhimmel

sich fortbewegenden Mondes zur Zeitbestimmung sehr geeignet, da man in den Mondtafeln diese Orte für jede Zeit genau angegeben findet. Was auch an der Genauigkeit einer einzigen Beobachtung abgeht, wird durch die Vervielfältigung der Beobachtungen ersetzt. Sehr einfach ist die Lösung dieser Aufgabe, wenn man an beiden Orten den Zeitunterschied zwischen den Culminationen des Mondes und eines Fixsternes beobachtet. Ist dieser Unterschied bei einem Orte um τ'' Sternzeit größer als am andern Orte, und ist die Veränderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde Sternzeit $= t''$, so hat man den gesuchten Längenunterschied: $\lambda = (54000'' \,.\, \frac{1}{t} - 1)\, \tau$.

Z. B. man hat beobachtet die Culminationszeit

	in Gotha:	in Mannheim:
vom Monde . .	13 St. 47′,32″,45	13 St. 47′,53″,0
von α in der Jungfrau	13 » 14′,17″,87	13 » 14′,17″,2
Unterschiede:	0 St. 33′,14″,58	0 St. 33′,35″,8;

hiernach ist also $\tau = 21'',22$. Die stündliche Aenderung der Rectascension des Mondes war aber nach den Ephemeriden $t = 0$ St. $34', 44'',998 = 2084'',998$; folglich ist der gesuchte Längenunterschied beider Orte:

$$\lambda = \left(\frac{54000''}{2084'',998} - 1\right) . 21'',22 = \frac{51915,002 \,.\, 21,22}{2084,998}$$

$= 528'',36 = 0$ St. $8',48'',36$... Zeit, $= 2^\circ, 12', 5'', 4$ Bogen.

Um gleich in einer Nacht eine Reihe von Beobachtungen anstellen und aus deren Ergebnissen einen Mittelwerth nehmen zu können, mißt man die in den Ephemeriden sehr genau angegebenen Monddistanzen von einem Sterne. Ist t_1 die Sternzeit der Beobachtung, t dagegen die derselben Monddistanz entsprechende Sternzeit nach den Ephemeriden, so hat man den Längenunterschied zwischen dem Orte der Beobachtung und dem für die Ephemeriden:

$\lambda = t_1 - t$ in Zeit, $= 15\,(t_1 - t)$ in Bogen.

Sind a, h und d die scheinbaren oder beobachteten Höhen und die Distanz der Gestirne, a_1, h_1 und d_1 aber die

wahren Höhen und die wahre Distanz derselben, so hat man $\sin. \frac{1}{2} d_1 = \cos. n \cos. \left(\frac{a_1+h_1}{2}\right)$, wobei die Hilfsgröße n bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\sin. n^2 = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a+h+d) \cos. \frac{1}{2}(a+h-d)}{[\cos. \frac{1}{2}(a_1+h_1)]^2} \cdot \frac{\cos. a_1 \cos h_1}{\cos. a \cos. h}.$$

Beispiel. In Seeberg wurden am 9. Septbr. 1792 um 20 Uhr 3 Min. 29,2 Sec. wahrer Zeit des Morgens die Distanz der beiden inneren Ränder der Sonne und des Mondes = 67°, 36′, 50″ beobachtet und es war für diese Zeit die Höhe des oberen Sonnenrandes $a = 22°,58',34'',4$, die des oberen Mondrandes aber $h = 55°,58',54'',0$.

Die Ephemeriden geben für dieselbe Zeit

	der Sonne	des Mondes
den horizontalen Halbmesser	= 957″,4,	= 878″,0
die horizontale Parallaxe . .	= 7″,8,	= 3250″,6
die Refraction	= 135″,0,	= 38″,9,

und hiernach berechnet sich die Höhenparallaxe

der Sonne $p = 7'',8 \cos. a = 7'',2$

des Mondes $p_1 = 3250',6 \cos. h = 1830''$,

der vergrößerte Halbmesser

der Sonne $= 957'',4 \; (1 + p \sin. a \sin. 1'') = 957'',4$,

des Mondes $= 878 \; (1 + p_1 \sin. h \sin. 1'') = 900'',0$.

Jetzt folgt die scheinbare Centraldistanz zwischen Sonne und Mond:

$$d = 67°, 36', 50'' + 957',4 + 900'' = 68°, 7', 47'',4;$$

ferner die scheinbare Höhe

des Sonnenmittels $= 22°,58',34'',4 - 957'',4 = 22°,42',37''$,

des Mondmittels $= 55°,58',54'',0 - 900'' = 55°,43',54''$,

die wahre Höhe

des ersteren $= 22°,42',37'' - 135'' + 7'',2 = 22°,40',29'',2$

und des letzteren $= 55°,43',54'' - 38'',9 + 1830'' = 56°,13',45''$.

Mit Hilfe dieser Werthe ergibt sich:

$$\sin. n^2 = \frac{\cos. 73°, 17', 9'',2 \cos. 5°, 9', 21'',8}{(\cos. 39°,27',7'',1)^2} \cdot \frac{\cos. 22°,40',29'',2 \cdot \cos. 56°,13',45''}{\cos. 22°,42',37'' \cdot \cos. 55°,43',54''};$$

hiernach *log. sin.* $n = 9{,}8380683$, $n = 43^\circ, 31', 55'', 5$,
folglich $sin.\ ^1/_2\ d_1 = cos.\ 43^\circ,31',55'',5\ cos.\ 39^\circ,27',7'',1$,

$log.\ sin.\ ^1/_2\ d_1 = 9{,}7480372$, $^1/_2\ d_1 = 34^\circ,2',32'',5$,

und sonach die wahre Centraldistanz $d_1 = 68^\circ, 5', 11''$.

Nun ist aber um

18 Uhr 0', 0'' wahre Zeit in Paris $d_1 = 68^\circ, 45', 50''$
21 » » » » » » $= 67^\circ, 24', 28''$;

folglich die Abnahme dieser Distanz in 3 St. $= 1^\circ, 21', 22''$, und die Pariser Zeit, welche der Abnahme

$68^\circ,45',50'' - 68^\circ,5',11'' = 0$ St. $40', 39''$ entspricht,

$$= 18\ \text{St.} + \frac{40', 39''\ .\ 3}{1^\circ, 21', 22''} = 19\ \text{St.}\ 29',\ 55'',\ 6.$$

Da aber die Zeit der Gothaer Sternwarte (Seeberg) = 20 St. 3', 29'',2 betrug, so ist die gesuchte Längendifferenz = 0 St. 33', 33'',6.

Bei Anwendung des Theodoliten muß man eine Reihe von Beobachtungen anstellen, und hierbei die einerlei Zeit entsprechenden Höhen- und Azimuthalwinkel durch Interpolation, und hieraus erst die Distanzen berechnen.

Das einfachste Mittel zur Bestimmung der Längenunterschiede gewähren die Uhren oder Chronometer, mit welchen man sich von dem einen Orte nach dem andern begibt. Die Abweichung der nach dem ersten Orte gestellten Uhrzeit von der Uhrzeit des zweiten Ortes ist der gesuchte Längenunterschied. Wie hierbei zu rechnen ist, gibt folgendes Beispiel an die Hand. Den 29. Mai 1786 fand Zach, daß sein Chronometer gegen London am Mittag 2'',1 nachging und aus den früheren Beobachtungen entnahm er, daß es täglich 0'',1715 zurückblieb. Den 27. Juni kam er auf der Sternwarte Seeberg an, und fand, daß diese Uhr am Mittage 23 St. 19', 3'',4 anzeigte. Nun ist aber nach den Ephemeriden die mittlere Zeit am wahren Mittage in London den 27. Juni = 0 St. 2', 34'', 3;

ferner die Verspätung des Chronometers = 2'', 1 + 0,1715 . 29 = 7'', 07

daher ist nach dem Chronometer den 27. Juni die Zeit des

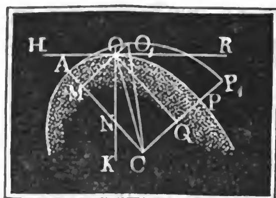
wahren Mittages in London = 0 St. 2 M. 27″,23 und die gesuchte Längendifferenz zwischen beiden Orten

= 0 St. 2′, 27″,23 + 24 St. — 23 St. 19′, 3″,40
= 0 St. 43′, 23″,83.

§. 16. Dimensionen der Erde.

Obgleich der Umfang des Meridians nach der ursprünglichen Bestimmung 40 Millionen, also der Quadrant desselben = 10 Millionen Meter enthalten soll, so ist doch nach einer neueren Berechnung von Bessel (s. Poggendorff's Ann. Bd. 42 und Bd. 55) der letztere = 10′000855,76 Meter und hiernach der Halbmesser CA des Aequators, Fig. 126, a = 3272077,14 Toisen, und die halbe Erdaxe $CP = b$ = 3261139,33 Toisen, folglich die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,15}$, d. i. nahe $^1/_{300}$, und die Excentricität $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}} = \sqrt{0,00672} = 0,082$. Auch ist

Fig. 126.



$$a = \frac{5400}{2\pi} = 859,4367 \text{ geographische Meilen, und}$$

$$b = 856,5640 \text{ geographische Meilen.}$$

Die Toise ist = 6 alte pariser Fuß = 1,94903631 Meter, und eine geographische Meile enthält hiernach 3807,232 Toisen.

Ist die Polhöhe des Ortes O: $ANO = p$ und dagegen die Breite desselben $ACO = p_1$, so hat man

$tang.\ p_1 = \frac{b^2}{a^2}\ tang.\ p$, und hiernach für den Winkel

$ACO_1 = p_2$, $tang.\ p_2 = \frac{b}{a}\ tang.\ p = \frac{a}{b}\ tang.\ p_1$,

ferner für die Coordinaten $CM = x$ und $MO = y$, $x = a \; cos. \; p_2$ und $y = b \; sin. \; p_2$.

Ferner für den Radiusvector: $CO = r$,

$$r = \sqrt{a^2 cos. p^2_2 + b^2 sin. p^2_2} = \sqrt{\frac{a^4 + b^4 \; tang. \; p^2}{a^2 + b^2 \; tang. \; p^2}}$$

$$= a \sqrt{\frac{cos. \; p}{cos. \; p_1 \;\; cos. \; (p - p_1)}}.$$

Der Halbmesser eines Breitenkreises ist:

$$CM = OQ = y = r \; cos. \; p_2 = \frac{a^2 \; cos. \; p}{\sqrt{a^2 cos. p^2 + b^2 sin. p^2}}$$

$$= \frac{a \; cos. \; p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \; sin. \; p^2}}.$$

Ein Längengrad $= \frac{\pi y}{180^0} = \frac{\pi \; a \; cos. \; p}{180^0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \; sin. p^2}}$.

Der Krümmungshalbmesser $KO = r_1$ ist

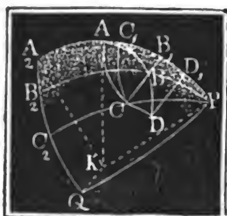
$$r_1 = \frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 \; b^4} = \frac{(1 - \varepsilon^2) \; a}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 sin. p^2)^3}},$$ annähernd

$= a \; [1 - \alpha \; (2 - 3 \; sin. \varphi^2)]$ und hiernach ein Breitengrad $= \frac{\pi r_1}{180^0} = \frac{\pi r_1}{180^0} [1 - \alpha \; (2 - 3 \; sin. p^2)]$. (Wegen der Länge eines Meridianbogens s. Seite 238 und 239.)

Die Messungen auf dem Erdsphäroid lassen sich auf sphäroidische Dreiecke zurückführen, deren Auflösung die sphäroidische Trigonometrie (s. Grunert's Trigonometrie) lehrt; haben diese Dreiecke eine mäßige Größe, so lassen sie sich als sphärische Dreiecke behandeln, und sind die Seiten dieser Dreiecke noch nicht eine Meile, so kann man diese sogar wie geradlinige oder ebene Dreiecke auflösen, wenn man nur den sphärischen Exceß, d. i. die Größe, um welche ihre Winkelsumme größer als zwei Rechtwinkel ist, gleichmäßig vertheilt, nämlich jeden der drei Winkel um den dritten Theil dieses Excesses vermindert. Diese Methode gewährt noch den Vortheil, daß bei ihr auch die Beobachtungsfeh-

ler mit ausgeglichen werden. Sind A, B und C, Fig. 127, die gemessenen Winkel des Dreieckes ABC, und ist $BC = a$ die durch Auflegen von Meßstäben gefundene Seite desselben, so findet man hiernach die anderen Seiten $AC = b$ und $AB = c$, wenn man setzt:

Fig. 127.



$$E = A + B + C - 180^\circ,$$

$$b = \frac{a \; sin. \left(B - \frac{E}{3}\right)}{sin. \left(A - \frac{E}{3}\right)} \text{ und}$$

$$c = \frac{a \; sin. \left(C - \frac{E}{3}\right)}{sin. \left(A - \frac{E}{3}\right)}.$$

Kennt man den Azimuthalwinkel PAB der Seite c von A aus, und die Breite AA_2 von A, so kann man nun auch durch Auflösung von sphärischen Dreiecken, die Breiten- und Längenunterschiede der übrigen Eckpunkte, so wie die Azimuthalwinkel der übrigen Seiten finden. Z. B. die Auflösung des Dreieckes APB gibt aus $AB = c$, $AP = 90 - AA_2 = 90 - p$ (Breite) und der Azimuthalwinkel BAP nach Tabelle auf S. 259 das Complement PB der Breite BB_2 von B zu einem Rechtwinkel, so wie den Längenunterschied $A_2 B_2 = \angle APB$ und den Azimuthalwinkel ABP der Seite AB von B aus.

Sind BB_1 und CC_1 größte Kugelkreisbögen, welche auf dem Meridian AP von A rechtwinkelig stehen, und keineswegs mit den Parallelkreisbögen durch B und C zusammenfallen, so bilden $AB_1 = x$ und $B_1 B = y$ u. s. w. rechtwinkelige Coordinaten, welche die Lage von B u. s. w. gegen A bestimmen, und sich nach Formeln in Tabelle S. 257 berechnen lassen. Bei Punkten, welche nur eine oder wenige Meilen entfernt sind, läßt sich auch die ebene Trigonometrie anwenden und setzen:

$x = AB \,.\, \cos.\, BAP,\quad y = BB_1 = AB \,.\, \sin.\, BAP,$
ebenso für den Punkt C:
$x_1 = AC_1 = AC \cos.\, CAP$ und $y_1 = CC_1 = AC \cos.\, CAP$;
ferner für einen Punkt D:
$x_2 = AD_1 = x_1 + CD \cos.\, (CAP + ACD) - 180^0)$ und
$y_2 = DD_1 = y_1 + CD \sin.\, (CAP + ACD - 180^0)$ u. s. w.

Uebrigens hat man sehr einfach den Winkel φ, um welchen die Meridiane in A und B von einander abweichen, annähernd:
$\varphi'' = 0{,}0325 \,.\, y \; tang.\; p$, wo p die Polhöhe bezeichnet und y in Metern gegeben sein muß.

Beispiel. Von einem Dreiecke ABC wurden gefunden

$A = 56^0,\ 51',\ 28''$
$B = 66^0,\ \ 6',\ 17''$
$C = 57^0,\ \ 2',\ 24''$

Summe $= 180^0,\ 0',\ 9''$, also $\frac{E}{3} = 3''$, es ist deshalb zu setzen:

$A = 56^0,\ 51',\ 25''$,
$B = 66^0,\ \ 6',\ 14''$ und
$C = 57^0,\ \ 2',\ 21''$.

Die Seite $AB = c$ wurde durch Anlegung von Meßstäben $= 414{,}889$ Ruthen gefunden, und es berechnen sich daher hiernach die übrigen Seiten:

$$a = \frac{c \sin.\, A}{\sin.\, C} = 414{,}036 \text{ R. und } b = \frac{c \sin.\, B}{\sin.\, C} = 452{,}095 \text{ R.}$$

Der Azimuthalwinkel BAP war $35^0,\ 16',\ 15''$, folglich sind die Coordinaten:

$AB_1 = x = c \cos.\ 35^0,\ 16',\ 15'' = 338{,}729$ R.,
$B_1B = y = c \sin.\ 35^0,\ 16',\ 15'' = 239{,}574$ R.;

endlich ergibt sich die Abweichung der Meridiane in A und B von einander, da 1 Ruthe $= 3{,}766$ Meter ist und die Polhöhe von $A = 51^0$ beträgt
$\varphi'' = 0{,}0325 \,.\, 3{,}766 \,.\, 239{,}574 \,.\, tang.\ 51^0 = 36{,}0$ Sec.

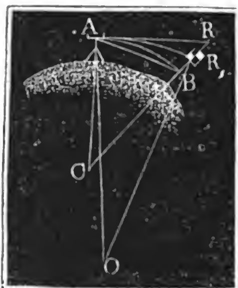
Ist h die Höhe einer horizontalen Seite a über dem

Meeresspiegel in Metern, so ist dieselbe auf den Meeresspiegel reducirt $= \left(1 = \frac{h}{6366200}\right) a$.

§. 17. Nivelliren.

Die Depression $BR = a$ des wahren Horizontes AB, Fig. 128, unter dem scheinbaren AR folgt aus der Entfernung $AB = d$ und dem Erdhalbmesser $AC = r$ durch folgende Formel:

Fig. 128.



$a = \frac{d^2}{2r}$, oder, wenn d in Ruthen zu 12 Fuß gegeben ist,

$$a = \frac{d^2}{3380625} \text{ Rth.} = \frac{d^2}{281719} \text{ Fuß}$$

$$= \frac{d^2}{23477} \text{ Zoll.}$$

Der Depressionswinkel BAR ist $= \frac{1}{2}$ Centriwinkel ACB.

$= 206265'' \cdot \frac{d}{r}$, und wenn d in Ruthen gegeben ist,

$= 0{,}122022'' \cdot d$.

Der Halbmesser $OA = OR_1 = r_1$ der Refraction ist 7- bis 8mal so groß als der Erdhalbmesser $CA = r$, folglich der Refractionswinkel $RAR_1 = \varrho = \frac{1}{2} AOR_1 = \frac{1}{14}$ bis $\frac{1}{16}$ des Centriwinkels ACB. Nach Delambre soll man im Mittel, sowie im Herbst und im Frühling $\varrho = 0{,}08\,C$, im Sommer aber $\varrho = 0{,}075\,C$ und im Winter $= 0{,}09$ bis $0{,}1\,C$ setzen. Uebrigens hängt ϱ auch von der Witterung ab, und verändert sich namentlich bei feuchter Witterung, Stürmen und Nebeln.

Der Depressionswinkel $\frac{1}{2} C$ wird durch den Refractionswinkel $RAR_1 = 0{,}08\,C$ vermindert, so daß der wahre Horizont unter dem durch Visiren angegebenen Horizont nur

um den Winkel $\frac{1}{2} C - 0{,}08\, C = (1 - 0{,}16)\, \frac{C}{2} = 0{,}84 \,.\, \frac{C}{2}$ $= 0{,}1025'' \,.\, d$, oder um die Höhe $0{,}84 \,.\, \frac{d^2}{2r} = \frac{d^2}{27953}$ Zoll tiefer liegt. Diese Correction ist nur bei einem Nivellement aus dem Ende nöthig, bei Nivellements aus der Mitte hingegen ist dieselbe nicht vorzunehmen. Zur Erleichterung der Rechnung dient folgende

Tabelle

der Höhen, um welche der wahre Horizont unter dem scheinbaren liegt, bei Entfernungen von 25 zu 25 Ruthen.

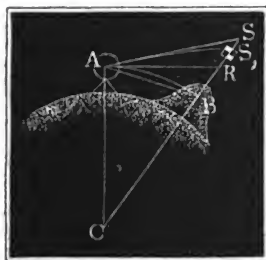
Entfernung in Ruthen.	Depression des wahren Horizontes (in Fußen)	Elevation der Refraction (in Fußen)	Tiefe des wahren Horizontes unter dem scheinbaren (in Fußen)
25	0,002	0,000	0,002
50	0,009	0,002	0,007
75	0,020	0,003	0,017
100	0,035	0,005	0,030
125	0,055	0,009	0,046
150	0,079	0,013	0,066
175	0,109	0,018	0,091
200	0,142	0,023	0,119
225	0,179	0,029	0,150
250	0,222	0,035	0,187
275	0,268	0,043	0,225
300	0,319	0,051	0,268
325	0,375	0,060	0,315
350	0,435	0,069	0,366
375	0,499	0,079	0,420
400	0,568	0,090	0,477
425	0,641	0,103	0,538
450	0,719	0,115	0,604
475	0,801	0,128	0,673
500	0,887	0,142	0,745

Entfernung in Ruthen.	Depression des wahren Horizontes	Elevation der Refraction	Tiefe des wahren Horizontes unter dem scheinbaren
	in Fußen.		
525	0,978	0,157	0,821
550	1,074	0,173	0,901
575	1,174	0,190	0,984
600	1,278	0,207	1,071
625	1,387	0,226	1,161
650	1,500	0,244	1,256
675	1,617	0,264	1,353
700	1,739	0,284	1,455
725	1,866	0,305	1,561
750	1,997	0,327	1,670
775	2,132	0,349	1,783
800	2,272	0,372	1,900
825	2,416	0,396	2,020
850	2,565	0,421	2,144
875	2,718	0,446	2,272
900	2,875	0,472	2,403
925	3,037	0,500	2,537
950	3,204	0,527	2,677
975	3,375	0,556	2,819
1000	3,550	0,585	2,965
1025	3,730	0,615	3,115
1050	3,914	0,645	3,269
1075	4,102	0,676	3,426
1100	4,295	0,708	3,587
1125	4,493	0,740	3,753
1150	4,695	0,773	3,922
1175	4,901	0,806	4,095
1200	5,111	0,840	4,271
1225	5,327	0,875	4,452
1250	5,546	0,910	4,636
1275	5,770	0,946	4,824
1300	5,999	0,982	5,017
1325	6,232	1,019	5,213
1350	6,469	1,057	5,412
1375	6,711	1,095	5,616

Entfernung in Ruthen.	Depression des wahren Horizontes	Elevation der Refraction	Tiefe des wahren Horizontes unter dem scheinbaren
	in Fußen.		
1400	6,957	1,134	5,823
1425	7,208	1,173	6,035
1450	7,463	1,213	6,250
1475	7,722	1,254	6,468
1500	7,986	1,295	6,691

Beim trigonometrischen Höhenmessen berechnet man den Niveauabstand zwischen zwei Punkten A und B aus dem Elevationswinkel $SAR = \alpha$, Fig. 129, und der Entfernung $AB = d$ durch folgende Formeln. Der um den Refractionswinkel $SAS_1 = \varrho$ corrigirte Höhenwinkel ist $RAS_1 = \alpha_1 = \alpha - \varrho = \alpha - 0{,}08C$, und die Sehne

Fig. 129.



$$AB = s = d\left(1 - \frac{d}{24r}\right),$$

wo $r = CA = 1690312$ Ruthen zu nehmen ist, und hieraus folgt die gesuchte Höhe $BS_1 =$

$$h = \frac{s\,sin.\left(\alpha_1 + \frac{C}{2}\right)}{cos.\,(\alpha_1 + C)}$$ für kleine Distanzen aber

$$h = s\,tg.\alpha_1 = d\,.\,tg.\,\alpha_1 = d\,.\,tg.\,(\alpha - 0{,}08\,C).$$

Um den wahren Niveauabstand zu finden, hat man zu h noch die Instrumenthöhe zu addiren, und die Signalhöhe zu subtrahiren.

Kann man auch aus dem anderen Ende zurück nach

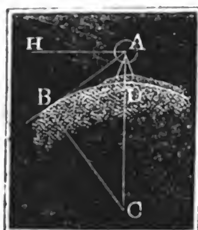
dem ersten visiren, so erhält man einen anderen Elevationswinkel β, und es folgt nun der Refractionswinkel

$$\varrho = \frac{\alpha + \beta + C}{2}, \text{ und daher genauer}$$

$$h = \frac{s \, sin. \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{cos. \left(\frac{\alpha - \beta + C}{2}\right)}.$$

Um die Erhebung eines Punktes A, Fig. 130, über den Meeresspiegel zu finden, hat man die Depression $BAH = \alpha$ des sichtbaren Horizontes BD unter dem Horizonte AH des Ortes A zu messen. Aus diesem Winkel und dem Halbmesser $CB = CD = r$ folgt dann $h = \left(\frac{1 - cos. \alpha}{cos. \alpha}\right) r$, und die Entfernung $AB = d = r \, tg. \alpha$, umgekehrt aber

Fig. 130.



$$cos. \alpha = \frac{r}{r + h}.$$

Mit Berücksichtigung der Refraction gibt für

h =	1	par.	Fuß	α =	0°, 1′, 1″	und	d = 0,258	geogr.	M.
» =	10	»	»	» =	0°, 3′,12″	»	» = 0,796	»	»
» =	50	»	»	» =	0°, 7′, 9″	»	» = 1,788	»	»
» =	100	»	»	» =	0°,10′, 6″	»	» = 2,526	»	»
» =	200	»	»	» =	0°,14′,18″	»	» = 3,376	»	»
» =	300	»	»	» =	0°,17′,30″	»	» = 4,386	»	»
» =	400	»	»	» =	0°,20′,12″	»	» = 5,052	»	»
» =	500	»	»	» =	0°,22′,35″	»	» = 5,652	»	»

§. 18. Barometrisches Höhenmessen.

Sind b_1 und b_2 die beobachteten Barometerstände,
t_1 und t_2 die entsprechenden Lufttemperaturen,
τ_1 und τ_2 die entsprech. Quecksilbertemperaturen,

ist ferner h der gesuchte Niveauabstand,
r der Erdhalbmesser und
p die mittlere Polhöhe beider Orte,

so hat man nach Laplace und Gauß, wenn man die Temperaturen nach der Centesimaleintheilung angibt:

$$h = 18336 \; (1 + 0{,}002845 \; cos. \; 2\,p) \left(1 + \frac{t_1 + t_2}{500}\right) \left(\left(1 + \frac{h}{r}\right) log. \left[\left(1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{5550}\right) \frac{b_1}{b_2}\right] + 0{,}8686 \, \frac{h}{r}\right)$$

Meter, oder wenn man die Temperatur in Reaumur'schen Graden ausdrückt:

$$h = 18336 \; (1 + 0{,}002845 \; cos. \; 2\,p) \left(1 + \frac{t_1 + t_2}{400}\right) \left(\left(1 + \frac{h}{r}\right) log. \left[\left(1 + \frac{z_2 - z_1}{4440}\right) \frac{b_1}{b_2}\right] + 0{,}8686 \, \frac{h}{r}\right)$$

Meter, und es ist hierbei rechts statt h ein Näherungswerth einzusetzen.

Am bequemsten rechnet man aber mit Hilfe folgender Tabellen von Gauß, welche die Anwendung fünfstelliger Logarithmen und die Temperaturen in Reaumur'schen Graden ausgedrückt, voraussetzt.

Tafel I.
Argument $t + t_1$.

$t_1 + t_2$	A	$t_1 + t_2$	A	$t_1 + t_2$	A
—10°	4,25337	+1°	4,26548	+12°	4,27726
9	4,25448	2	4,26657	13	4,27832
8	4,25560	3	4,26765	14	4,27937
7	4,25671	4	4,26872	15	4,28042
6	4,25781	5	4,26980	16	4,28147
5	4,25892	6	4,27087	17	4,28251
4	4,26002	7	4,27195	18	4,28356
3	4,26111	8	4,27301	19	4,28460
2	4,26220	9	4,27408	20	4,28564
1	4,26330	10	4,27514	21	4,28667
0	4,26439	11	4,27620	22	4,28770

t_1+t_2	A	t_1+t_2	A	t_1+t_2	A
+23°	4,28874	+33°	4,29891	+42°	4,30787
24	4,28976	34	4,29991	43	4,30885
25	4,29079	35	4,30092	44	4,30984
26	4,29181	36	4,30192	45	4,31082
27	4,29283	37	4,30291	46	4,31179
28	4,29385	38	4,30391	47	4,31277
29	4,29487	39	4,30490	48	4,31374
30	4,29588	40	4,30589	49	4,31471
31	4,29689	41	4,30688	50	4,31568
32	4,29790				

Tafel II.

Argument *p*.

p	c	p	p	c	p	p	c	p
0°	124	90°	16°	105	74°	31°	58	59°
1	123	89	17	102	73	32	54	58
2	123	88	18	100	72	33	50	57
3	123	87	19	97	71	34	46	56
4	122	86	20	95	70	35	42	55
5	122	85	21	92	69	36	38	54
6	121	84	22	89	68	37	34	53
7	120	83	23	86	67	38	30	52
8	119	82	24	83	66	39	26	51
9	118	81	25	79	65	40	21	50
10	116	80	26	76	64	41	17	49
11	115	79	27	73	63	42	13	48
12	113	78	28	69	62	43	9	47
13	111	77	29	65	61	44	4	46
14	109	76	30	62	60	45	0	45
15	107	75						

Tafel III.

Argument v.

v	c_1	v	c_1
1,9	+ 1	3,0	+ 7
2,3	1	3,1	9
2,4	2	3,2	11
2,5	2	3,3	14
2,6	3	3,4	17
2,7	3	3,5	22
2,8	4	3 6	27
2,9	5	3,7	34

c ist negativ, wenn die Polhöhe p des Ortes über 45° und positiv, wenn p unter 45° ist. Uebrigens sind c und c_1 in Einheiten der 5ten Decimale gegeben, und $10\tau_1$ und $10\tau_2$ als Einheiten derselben Ordnung zu behandeln.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist folgender.

Man ziehe zuerst von $log. b$, $10\tau_1$ und von $log. b_2$, $10\tau_2$ ab, jedoch mit Berücksichtigung der Zeichen von τ_1 und τ_2 und setze die Differenz $(log. b_1 - 10\tau_1) - (log. b_2 - 10\tau_2 = u$. Hierauf nehme man aus Tafel I. mit dem Argument $t_1 + t_2$, den Werth A und aus Tafel II. mit dem Argument p den Werth c, und berechne hiernach $v = log. u + A + c$.

Endlich nehme man aus Tafel III. mittels v die Größe c_1 und setze

$v + c_1 = log. h$ in Metern, oder

$v + c_1 + 9{,}71018 = log. h$ in Toisen, oder

$v + c_1 + 0{,}50327 = log. h$ in preuß. Fußen.

Beispiel. Es ist

$b_1 = 316{,}27$ Lin., $t_1 = +0^\circ{,}3$, $\tau_1 = 0^\circ{,}5$
$b_2 = 286{,}53$ „ , $t_2 = -1^\circ{,}9$, $\tau_2 = -1^\circ{,}7$ R., endlich

$p = 48^\circ$.

Hiernach hat man $log.\, b_1 - 10\,\tau_1 = 2{,}50001$
$log.\, b_2 - 10\,\tau_2 = 2{,}45734$

$u = 0{,}04267$
$log.\, u = 8{,}63012,$

aus Taf. I. mit $t_1 + t_2 = -1^{\circ}{,}6,\quad A = 4{,}26264,$
aus Taf. II. mit $p = 48^{\circ},\quad c = -13.$

$v = 2{,}89263,$
aus Taf. III. mit $v = 2{,}9,\quad c_1 = 5,$

$log.\, h_1 = 2{,}89268;$
oder $0{,}50327$

folglich $h_1 = 781{,}05$ Meter, oder $log.\, h_1 = 3{,}39590,$
also $h_1 = 2488{,}3$ Fuß.

Uebrigens sind folgende Regeln in Obacht zu nehmen. Zu sicheren Beobachtungen sind zwei gute Barometer und zwei gute Thermometer nöthig. Die Beobachtungen sind möglichst gleichzeitig anzustellen und etwa von 10 zu 10 Minuten zu wiederholen. Es sind ferner vor und nach dem Gebrauche beide Instrumente sorgfältig mit einander zu vergleichen und nöthige Correctionen nicht zu unterlassen. Es ist zu den Beobachtungen ruhiges Wetter und wo möglich bedeckter Himmel auszuwählen; die Barometer und Thermometer sind stets im Schatten aufzuhängen und es ist auch nicht eher zu beobachten, als nachdem diese Instrumente längere Zeit darin befindlich gewesen sind.

§. 19. Eisenbahnen.

1) Eisenbahncurven.

Ist r der Halbmesser $CA = CB$ einer Eisenbahncurve ABD, Fig. 131 auf folg. Seite, s aber eine halbe Sehne AM derselben, so hat man die mittlere Ordinate

$$ME = h = \frac{s^2}{2r}\left[1 + \left(\frac{s}{2r}\right)^2\right];\ \text{und oft genau genug}$$
$$= \frac{s^2}{2r}.$$

Ferner für den Winkel $CAM = \alpha$, um welchen die Sehne vom ersten Halbmesser CA abweicht:

Fig. 131.

$$cos.\ \alpha = \frac{s}{r}.$$

Für das folgende Curvenstück BD, dessen halbe Sehne $= s_1$ ist, hat man die Bogenhöhe $NF = h_1 = \frac{s_1^{\,2}}{2r}$ und den Winkel $CBD = \alpha_1$, $cos.\ \alpha_1 = \frac{s_1}{r}$, u. s. w.

Um die Sehne AB auch ohne ein Winkelmeßinstrument angeben zu können, macht man $AO = s$ und $OK = a = s\ cotg.\ \alpha = \frac{s^2}{\sqrt{r^2 - s^2}}$, annähernd $= \frac{s^2}{r}\left(1 + \frac{s^2}{2r^2}\right) = 2\,h\left(1 + \frac{h}{2r}\right)$, oder $= 2\,h$, und richtet B nach KA ein.

Um ebenso die Sehne BD abzustecken, macht man $ML = -\,s\ tg.\ 2\alpha = \frac{2\,s^2\sqrt{r^2 - s^2}}{r^2 - 2s^2}$, annähernd

$$= \frac{2s^2}{r}\left(1 + \frac{3s^2}{2r^2}\right) = 4\,h\left(1 + \frac{5h}{2r}\right), \text{ oder} = 4\,h,$$

und richtet D nach LB ein.

Um Zwischenpunkte zu erhalten, theile man $AM = s$ in n gleiche Theile, und errichte in den Theilpunkten Ordinaten oder Perpendikel. Dieselben haben aber, von M ausgegangen, folgende Werthe:

$$h,\ \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)h,\ \left(\frac{n^2-4}{n^2}\right)h,\ \left(\frac{n^2-9}{n^2}\right)h,\ \left(\frac{n^2-16}{n^2}\right)h \text{ u. s. w.}$$

Z. B. für $r = 800$ und $s = 40$ Ruthen hat man

$$h = \frac{1600}{1600}\left[1 + \left(\frac{40}{1600}\right)^2\right] = \left(1 + \frac{1}{1600}\right) \text{Ruthe}$$

$= 1$ Ruthe, und $cos.\ \alpha = \frac{40}{800} = \frac{1}{20} = 0{,}05$, also

$\alpha = 88^{\circ},51',14''$; nehmen wir endlich noch drei Zwischenordinaten an, setzen also $n = 4$, so erhalten wir sämmtliche Ordinaten:

$$1\,\mathfrak{R}.;\ \left(\frac{16-1}{16}\right).\ \mathfrak{R} = .\ {}^{15}/_{16}\ \mathfrak{R}.;\ \frac{16-4}{16} = {}^{12}/_{16}\ \mathfrak{R}.;$$

$$\frac{16-9}{16} = {}^{7}/_{16}\ \mathfrak{R}.$$

Aus der Tangente $AM = s$, Fig. 132, folgt die entsprechende Bogenhöhe $ME = h$ mittels des Halbmessers $CA = r$ wie oben:

Fig. 132.

$h = \frac{s^2}{2r}\left[1 + \left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]$, annähernd $= \frac{s^2}{2r}$. Dagegen für den Winkel $CMA = CMB = \alpha$, um welchen die Tangente $MA = MB$ von der radialen Richtung CM abweicht: $tg.\,\alpha = \frac{r}{s}$.

Um die Richtungen der folgenden Tangenten zu finden, macht man die Perpendikel

$$AK = BL = a = -s\ tg.\ 2\alpha = \frac{2r\,s^2}{r^2 - s^2},\ \text{annähernd}$$

$$= \frac{2\,s^2}{r}\left[1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2\right] = 4h\left(1 + \frac{3\,h}{2\,r}\right),\ \text{oder} = 4\,h.$$

Nimmt man noch n Zwischenpunkte zwischen AM, oder B und M u. s. w. an, so hat man für die Ordinaten derselben:

$$\frac{1}{n^2}h,\ \frac{4}{n^2}h,\ \frac{9}{n^2},\ h,\ \frac{16}{n^2}\ h\ \text{u. s. w.}$$

Auch kann man aus der Tangente AM, Fig. 133 auf folg. Seite, die Richtung der nächstfolgenden Tangente BN finden, wenn man AM in K halbirt, und N in das Alignement von K und B bringt.

Aus dem Brechungs- oder Krümmungswinkel BDE

$= MCN = \alpha$, Fig. 134, einer Bahnstrecke ADB und dem Krümmungshalbmesser $CM = CN = r$ folgen die, die

Fig. 133.

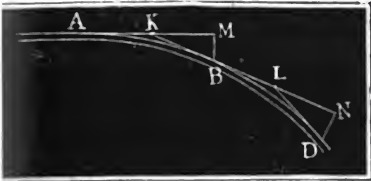
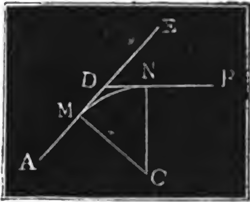


Fig. 134.



Anschlußpunkte M und N bestimmenden Tangenten $DM = DN = s = r\ tg.\ \frac{\alpha}{2}$.

2) Cubatur der Auf- und Abträge.

Die Figuren 135, 136, 137 und 138 sind die gewöhnlichen Profile der Straßen- und Eisenbahnkörper.

Fig. 135.

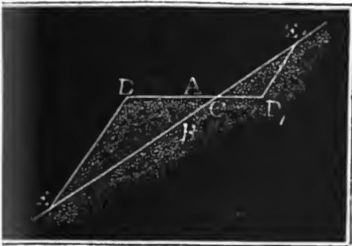


Fig. 136.

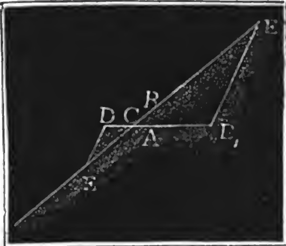


Fig. 137.

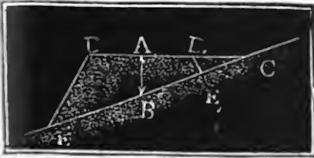


Fig. 138.

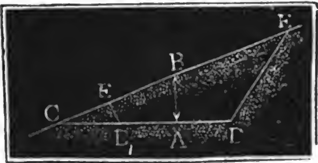


Fig. 139 und Fig. 141 mit einer Auftragscote AB, Fig. 140 und Fig. 142 mit einer Abtragscote AB. Bezeichnet man in jedem Falle diese Cote durch h, die halbe Kronenbreite DA durch b, die Böschung des Auf- oder Ab-

Fig. 139.

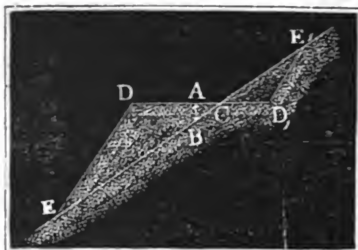


Fig. 140.

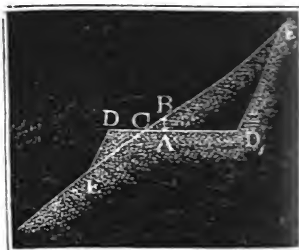


Fig. 141.

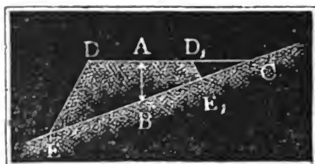
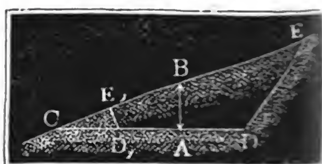


Fig. 142.



trages durch m und die des Bodens EE_1, oder die Cotangente des Neigungswinkels der mittleren Falllinie des Bodens gegen den Horizont durch n, so hat man den Querschnitt des Auftrages in Fig. 139, wo $b > nh$ ist: Fläche $CDE = \frac{(b+nh)^2}{2(n-m)}$, und dagegen den des Abtrages, oder

Fläche $CD_1E_1 = \frac{(b-nh)^2}{2(n-m)}$.

Ferner für den Auftrag in Fig. 140:

Fläche $CDE = \frac{(b-nh)^2}{2(n-m)}$ und für den Abtrag:

Fläche $CD_1E_1 = \frac{(b+nh)^2}{2(n-m)}$.

Ferner für den Auftrag in Fig. 141, wo $b < nh$ ist:

Fläche $DD_1E_1E = CDE - CD_1E_1 = \frac{(b+nh)^2}{2(n-m)} - \frac{(nh-b)^2}{2(n+m)}$,

und ebenso für den Abtrag in Fig. 142, wo ebenfalls $b < nh$ ist:

Fläche $DD_1E_1E = CDE - CD_1E_1 = \frac{(b+nh)^2}{2(n-m)} - \frac{(nh-b)^2}{2(n+m)}$.

Ist EE_1 ziemlich oder ganz söhlig, wie in Fig. 143 und Fig. 144 abgebildet wird, so erhält man für den Auf- oder Abtrag die Querschnittsfläche $DD_1E_1E = (2b+mh)h$.

Fig. 143.

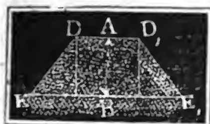
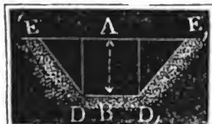


Fig. 144.



Diese Formel ist auch anzuwenden, um die Profilfläche des Eisenbahngrabens oder eines Grabens überhaupt zu finden.

Um nun den cubischen Inhalt eines Auf- oder Abtrages zu finden, von welchen die drei Profilflächen F_0, F_1 und F_2, so wie die Horizontalabstände l_1 zwischen F_0 und F_1, und l_2 zwischen F_1 und F_2 bekannt sind, hat man die Formel:

$$V = \frac{l_1+l}{6}\left[2(F_0+F_1+F_2)+\frac{l_2}{l_1}(F_1-F_0)+\frac{l_1}{l_2}(F_1-F_2)\right],$$

und für $l_1 = l_2 = l$:

$$V = \frac{l}{6}(F_0 + 4F_1 + F_2).$$

Beispiel. Bei einer Kronenbreite $2b$ von 30 Fuß, einer Auf- und Abtragsböschung $m = 2$, einer Bodenböschung $n = 4$ und einer Auftragscote $h = 3$ Fuß hat man, da $b > nh$, d. i. $15 > 3 \cdot 4$ ist, die Fläche des Auftrages $= \frac{(15+3.4)^2}{2(4-2)} = \frac{27^2}{4} = 182{,}25$ Quadrat-Fuß, dagegen die des Abtrages $= \frac{(15-12)^2}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ Q.-Fuß.

In einer Entfernung von 100 Fuß ist die Auftragscote $h = 3\frac{1}{2}$ Fuß, und die Erdböschung $n = 3$, daher hier die Fläche des Auftrages:

$= \frac{(15+3.3,5)^2}{2.(3-2)} = \frac{(25,5)^2}{2} = 325,125$ Q.-Fuß und die

des Abtrages $= \frac{(15-10,5)^2}{2} = \frac{5,5^2}{2} = 15,125$ Q.-Fuß.

In einem ferneren Abstande von 150 Fuß ist endlich $h = 2$ Fuß und $n = 3,5$, daher die Fläche des Auftrages $= \frac{(15+7)^2}{2.1,5} = 161,333$ Q.-Fuß, und die des Abtrages $= \frac{(15-7)^2}{3} = 22,333$ Q.-Fuß.

Endlich folgt der Auftragkörper zwischen diesen Profilen:

$$V = \frac{100+150}{6}[2(182,25+325,125+161,333)+{}^{150}/_{100}.142,875$$
$$+{}^{100}/_{150}.163,792]$$
$$= {}^{250}/_{6}(1337,416+214,312+109,194) = 69205 \text{ C.-Fuß};$$

und dagegen der Abtragskörper:

$$V = {}^{250}/_{6}[2(2,25+15,125+21,333)+{}^{3}/_{2}.12,875+{}^{2}/_{3}.6,208]$$
$$= {}^{250}/_{6}(77,416+19,314+4,139) = 4203 \text{ C.-Fuß}.$$

Dritter Theil.

Mechanik.

Erster Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen für die theoretische Mechanik.

Erstes Kapitel.

Gewichtstabellen.

A. Allgemeine Gewichtstafel,

enthaltend die Gewichte in verschiedenen Ländern.

1) Anhalt: wie in Preußen.
2) Baden: 1 Pfund = 32 Loth = 500 Gramm = 10 Zehnlinge = 100 Centaß = 1000 Dekaß = 10000 Aß.
   1 Centner = 10 Stein = 100 Pfund = 50 Kilogramm.
3) Baiern: 1 Pfund = 32 Loth = 560 Gramm.
   1 Centner = 5 Stein = 100 Pfund.
4) Belgien: wie in Frankreich.
5) Braunschweig: 1 Pfund = 32 Loth = 467,711 Gramm, wie in Preußen.
   1 Centner = 100 Pfund.
6) Bremen: 1 Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 498,5 Gramm.
   1 Centner = 116 Pfund.
7) Dänemark: 1 Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 499,309 Gramm.
   1 Centner = 100 Pfund.
   1 Last = $16\frac{1}{4}$ Schiffspfund = 52 Centner.

8) England: 1 Pfund Avoir-du-pois = 453,5976 Gramm.
1 » Troy-Gewicht = 5760 Grains = 373,246 Gramm.
1 Tonne = 20 Centn. = 160 Stein = 2240 Av.=Pfd.
9) Frankfurt a. M.: 1 Pfund (leichtes Handelsgewicht) = 32 Loth = 467,914 Gramm.
1 Centner Handelsgewicht = 108 Pfd. Leichtgewicht. = 100 Pfd. Schwergew.
10) Frankreich: 1 Kilogramm = 1000 Gramm = Gewicht eines Litre oder Cubikdecimeters Wasser bei der größten Dichtigkeit und im luftleeren Raume gewogen.
1 altes Pfund = 489,506 Gramm.
1 neues Pfund = 500 Gramm = 16 Onces. = 128 Gros = 9216 Grains.
1 neuer Centner (Quintal) = 100 Kilogramm.
1 neue Schiffstonne (Millier) = 1000 Kilogr.
11) Hamburg: 1 Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 484,170 Gramm.
1 Centner = 112 Pfund;
1 Schiffspfund = $2\frac{1}{2}$ Centner = 20 Liespfund.
12) Hannover: wie in Braunschweig.
13) Hessen, Großherzogthum: 1 Pfund = 32 Loth = 500 Gramm. 1 Centner = 100 Pfund.
14) Hessen, Kurfürstenthum: wie in Preußen.
15) Holstein: theils wie in Hamburg, theils wie in Lübeck.
16) Lippe=Detmold: 1 Pfund = 32 Loth = 467,41 Gr.
1 Centner = 108 Pfund.
17) Lippe=Schaumburg: wie in Braunschweig.
18) Lombardei: wie in Frankreich.
19) Lübeck: 1 Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 484,725 Gramm, die Eintheilung wie in Hamburg.
20) Mecklenburg=Schwerin: wie in Lübeck.
21) Mecklenburg=Strelitz: wie in Preußen.
22) Nassau: wie in Frankfurt a. M.
1 Wiesbadener Pfund = 470,686 Gramm.
1 » Centner = 106 Pfund.

23) Niederlande: 1 Pond = 1 Kilogramm,
= 10 Oncen = 100 Looden
= 1000 Wigtjes;
also wie in Frankreich.

24) Norwegen: wie in Dänemark.

25) Oesterreich: 1 Wiener Handelspfund = 32 Loth = 560,012 Gramm.
1 Centner = 5 Stein = 100 Handelspfund.

26) Oldenburg: 1 Pfund = 32 Loth = 480,367 Gr.
1 Centner = 100 Pfund.
1 Schiffspfund = 290 Pfund.

27) Preußen: 1 Pfund = 2 Mark = 32 Loth = 128 Quent = 576 Grän = $^1/_{66}$ von dem Gewichte eines Cubikfußes Wasser bei 15° R. Wärme, im luftleeren Raume gewogen, = 467,7110 Gramm.
1 Centner = 5 Stein = 110 Pfund.
1 Schiffslast = 4000 Pfund.

28) Rußland: 1 Pfund = 32 Loth = 96 Solotnik
= 409,52 Gramm.
1 Schiffspfund (Berkowrtz) = 10 Pud = 400 Pfd.

29) Sachsen, Königreich: 1 neues Pfund = 32 Loth = $^1/_2$ Kilogramm.
1 altes Leipziger Pfund = 467,214 Gramm.
1 Centner neues Gewicht = 100 Pfund,
altes Gewicht = 110 Pfund.

30) Sachsen-Weimar: wie in Preußen.

31) Schleswig: wie in Dänemark.

32) Schweden: 1 Skalpund = 32 Loth = 425,3395 Gr.
1 Centner = 120 Pfund.
1 Schiffspfund = 20 Liespfd. = 400 Skalpund (Schalpfund).

33) Schweiz: wie in Baden.

34) Würtemberg: 1 Pfund = 32 Loth = 467,728 Gr.
1 Centner = 104 Pfund.

B. Vergleichungstabelle,

enthaltend eine Vergleichung von 12 verschiedenen Landesgewichten unter einander.

Preußisches Pfund.	Oesterreichsches Pfund.	Baiersches Pfund.	Sächsisches Pfund (Zollpfd.).	Würtembergsches Pfund.	Cölnische alte Mark.
1	0,83518 9,92178	0,83520 9,92179	0,93542 9,97101	0,99996 9,99998	2,00037 0,30111
1,19735 0,07822	1	1,00002 0,00001	1,12002 0,04923	1,19730 0,07820	2,39514 0,37933
1,19732 0,07821	0,99998 9,99999	1	1,12000 0,04922	1,19728 0,07819	2,39508 0,37932
1,06904 0,02899	0,89284 9,95077	0,89286 9,95078	1	1,06900 0,02898	2,13847 0,33010
1,00004 0,00002	0,83521 9,92180	0,83523 9,92181	0,93546 9,97102	1	2,00044 0,30113
0,49991 9,69889	0,41751 9,62067	0,41752 9,62068	0,46762 9,66990	0,49989 9,69887	1
1,06756 0,02839	0,89160 9,95017	0,89162 9,95618	0,99862 9,99940	1,06752 0,02838	2,13551 0,32950
0,90941 9,95876	0,75952 9,88054	0,75953 9,88055	0,85068 9,92977	0,90937 9,95874	1,81915 0,25987
0,87558 9,94230	0,73127 9,86408	0,73129 9,86409	0,81904 9,91331	0,87555 9,94228	1,75149 0,24341
0,96982 9,98669	0,80998 9,90847	0,81000 9,90848	0,90720 9,95770	0,96979 9,98668	1,94001 0,28780
1,04660 0,01978	0,87410 9,94156	0,87412 9,94157	0,97901 9,99079	1,04656 0,01976	2,09359 0,32089
2,13807 0,33002	1,78568 0,25180	1,78571 0,25181	2,00000 0,30103	2,13800 0,33001	4,27693 0,63113

B. Vergleichungstabelle,

enthaltend eine Vergleichung von 12 verschiedenen Landesgewichten unter einander.

Dänisches und Norweg. Pfund.	Schwedisches Pfund.	Russisches Pfund.	Englisches Pfund.	Altfranzösisches Pfund (poids du marc).	Kilogramm.
0,93672 9,97161	1,09962 0,04124	1,14210 0,05770	1,03111 0,01331	0,95548 9,98022	0,46771 9,66998
1,12157 0,04983	1,31662 0,11946	1,36748 0,13592	1,23460 0,09153	1,14404 0,05844	0,56001 9,74820
1,12155 0,04982	1,31660 0,11945	1,36746 0,13591	1,23457 0,09152	1,14401 0,05843	0,56000 9,74819
1,00138 0,00060	1,17553 0,07023	1,22094 0,08669	1,10230 0,04230	1,02144 0,00921	0,50000 9,69897
0,93675 9,97162	1,09966 0,04126	1,14214 0,05772	1,03115 0,01332	0,95551 9,98024	0,46773 9,66999
0,46827 9,67050	0,54971 9,74013	0,57094 9,75659	0,51546 9,71220	0,47765 9,67911	0,23381 9,36887
1	1,17391 0,06963	1,21925 0,08609	1,10078 0,04170	1,02003 0,00861	0,49931 9,69837
0,85186 9,93037	1	1,03863 0,01646	0,93770 9,97206	0,86892 9,93898	0,42534 9,62874
0,82017 9,91391	0,96281 9,98354	1	0,90283 9,95560	0,83660 9,92252	0,40952 9,61228
0,90845 9,95830	1,06644 0,02793	1,10763 0,04440	1	0,92664 9,96691	0,45360 9,65667
0,98037 9,99139	1,15086 0,06102	1,19532 0,07748	1,07916 0,03309	1	0,48951 9,68976
2,00277 0,30163	2,35106 0,37126	2,44188 0,38772	2,20460 0,34333	2,04288 0,31024	1

C. Tabelle der specifischen Gewichte.

1) Feste Körper.

Ahornholz	0,65	bis	0,69
Alabaster	2,70		
Alaun	1,7	»	1,8
Alaunschiefer	2,34	»	2,59
Amalgam, natürliches	13,755		
Anthracit	1,4	»	1,48
Antimon	6,65	»	6,72
Apfelbaumholz	0,67	»	0,79
Arsenik	5,63	»	5,96
Asbest	2,10	»	2,80
Asphalt	1,07	»	1,16
Basalt	2,72	»	2,86
Bausteine, im Mittel	2,5		
Bernstein	1,06	»	1,09
Bimsstein	0,91	»	1,65
Birkenholz	0,60	»	0,80
Birnbaumholz	0,65	»	0,73
Blei	11,33	»	11,45
Bleiglätte	9,3	»	9,5
Bleiglanz	7,4	»	7,6
Braunkohle	1,22	»	1,29
Buchenholz	0,63	»	0,85
Butter	0,943		
Caoutschuk	0,925	»	0,934
Ebenholz	0,80	»	1,33
Eichenholz	0,62	»	0,85
Eis	0,916	»	0,927
Eisen, geschmiedet	7,6	»	7,79
» gegossen	7,0	»	7,5
» in Draht	7,6	»	7,75
Elfenbein	1,80	»	1,92
Erde	1,36	»	2,40

Erlenholz	0,42	bis	0,68
Fette.	0,92	»	0,94
Feuerstein	2,58	»	2,59
Fichtenholz.	0,38	»	0,79
Franzosenholz (Guajak)	1,33		
Glas, Bouteillen=	2,73		
» Krystall=	2,89		
» Flint=	3,20	»	3,78
Glockenmetall	8,81		
Gneiß	2,39	»	2,71
Gold, gediegen	14,6	»	19,1
» gegossen	19,25		
» gehämmert	19,5		
Granit	2,50	»	3,05
Harz, von Fichten	1,073		
Holz, Laubholz, trocken, im Mittel .	0,659		
» » mit Wasser gesättigt	1,110		
» Nadelholz, trocken, im Mittel.	0,453		
» » mit Wasser gesättigt	0,839		
Holzkohle, von Nadelholz.	0,28	»	0,44
» von Eichenholz	0,573		
Kalk, gebrannt	2,3	»	3,18
Kalkmörtel.	1,64	»	1,86
Kalkstein	2,46	»	2,84
Kiefernholz	0,463	»	0,910
Kieselsteine.	2,3	»	2,7
Kirschbaumholz	0,577	»	0,715
Kochsalz.	2,10	»	2,17
Korkholz	0,240		
Kreide, weiße	1,8	»	2,66
Kupfer, gegossen	8,59	»	8,90
» gehämmert.	8,88	»	9,00
» in Draht	8,78	»	8,95
Lehm	1,52	»	2,85
Lerchenholz.	0,473	»	0,565
Lindenholz.	0,559	»	0,604

Mahagonyholz	0,563	bis	1,063
Marmor	2,52	»	2,85
Mauerwerk von Bruchsteinen	2,40	»	2,46
» » Sandsteinen	2,05	»	2,12
» » Ziegelsteinen	1,47	»	1,70
Mehl von Weizen	1,56		
Messing, gegossen	8,40	»	8,71
» in Blechen	8,52	»	8,62
» in Draht	8,34	»	8,73
Mühlsteinquarz	1,24	»	2,61
Platin	20,9	»	21,5
Porphyr	2,4	»	2,8
Porzellan	2,38	»	2,49
Quarz (siehe Kieselsteine).			
Roggen in Masse	0,776		
Sand, fein und trocken	1,40	»	1,64
» » » feucht	1,90	»	1,95
» grob	1,37	»	1,49
Sandstein	1,90	»	2,70
Silber, gegossen	10,10	»	10,47
» gehämmert	10,51	»	10,62
Stahl, Cementstahl	7,26	»	7,80
» gefrischt	7,50	»	7,81
» Gußstahl	7,83	»	7,92
Steinkohlen	1,21	»	1,51
Tannenholz	0,49	»	0,75
Thon	1,80	»	2,63
Thonschiefer	2,76	»	2,88
Wachs	0,97		
Ziegelstein, gemeiner	1,40	»	2,20
» Klinker	1,52	»	2,29
Zink, gegossen	6,86	»	7,22
» gewalzt	7,19	»	7,86
Zinn	7,29	»	7,47

2) Tropfbare Flüssigkeiten.

Aether, bei 20° C.	0,716		
Alkohol, absoluter, bei 20° C.	0,792		
Bier	1,023	bis	1,034
Kochsalzlauge, bei 18°,15 gesättigt	1,208		
Milch	1,02	»	1,04
Oele: Baumöl, bei 12°	0,919		
Leinöl, bei 12°	0,940		
Olivenöl, bei 15°	0,918		
Rübsenöl, bei 15°	0,913		
Quecksilber, bei 0°	13,550	»	13,575
» gegen Wasser bei 0°	13,598		
Säuren: Salpetersäure, bei 12°	1,522		
Salzsäure, bei 15°	1,192		
Schwefelsäure, wasserfrei, bei 20°	1,970		
Seewasser	1,02	»	1,04
Wasser, destillirtes	1,000		
Wein, Rheinwein	0,992	»	1,002

3) Gas- und dampfförmige Flüssigkeiten.

Alcoholdampf	1,613		
Atmosphärische Luft	1,000		
Kohlenoxydgas	0,941		
Kohlensaures Gas	1,524		
Kohlenwasserstoffgas: 1) ölbildendes	0,985		
2) Grubengas	0,559		
Quecksilberdämpfe	6,976	bis	7,03
Sauerstoffgas	1,103		
Schwefelsaure Dämpfe	3,01		
Schwefligsaures Gas	2,247		
Steinkohlengas	0,5	»	0,6
Stickstoffgas	0,976		
Wasserdampf, bei 100°	0,624		
Wasserstoffgas	0,0688.		

D) Tabellen über Dichtigkeiten.

1) Gewicht von

	1	2	3	4
Quecksilber . . .	0,518	1,036	1,554	2,072
Wasser	0,038	0,076	0,114	0,153
Blei	0,434	0,867	1,301	1,734
Gußeisen	0,275	0,550	0,825	1,100
Stabeisen	0,294	0,588	0,882	1,176
Gold	0,745	1,490	2,234	2,979
Kupfer	0,340	0,680	1,020	1,360
Messing	0,326	0,653	0,980	1,306
Glockenmetall . .	0,337	0,673	1,010	1,347
Silber	0,405	0,810	1,215	1,619
Zink	0,287	0,575	0,863	1,150
Zinn	0,279	0,558	0,836	1,115

2) Gewicht von

	1	2	3	4
Luft	0,086	0,172	0,258	0,344
Wasserdampf. . .	0,054	0,107	0,161	0,215
Wasser	66	132	198	264
Blei	749	1498	2247	2996
Gußeisen	475	950	1426	1901
Stabeisen	508	1016	1525	2033
Kupfer	587	1175	1762	2350
Messing	564	1129	1693	2257
Glockenmetall . .	582	1164	1745	2327
Zink, gewalzt . .	497	994	1491	1988
Zinn	482	964	1445	1927
Mauerwerk:				
von Bruchstein	158	316	474	632
von Sandstein	135	270	405	540
von Ziegeln . .	101	202	303	404
Laubholz, trocken	43,5	87,0	130,5	174,0
mit Waſſ. geſättigt	73,3	146,5	219,8	293,0
Nadelholz, trocken	30	60	90	120
mit Waſſ. geſättigt	55,4	110,7	166,1	221,5

D) Tabellen über Dichtigkeiten.

1) Gewicht von

5	6	7	8	9 Cubikzoll.
2,589	3,107	3,625	4,143	4,661 Pfund.
0,192	0,229	0,267	0,306	0,344 »
2,167	2,601	3,034	3,468	3,901 »
1,375	1,650	1,925	2,200	2,475 »
1,470	1,765	2,059	2,353	2,647 »
3,724	4,467	5,213	5,958	6,703 »
1,700	2,040	2,379	2,719	3,059 »
1,633	1,959	2,286	2,612	2,939 »
1,683	2,020	2,357	2,693	3,030 »
2,024	2,429	2,834	3,239	3,644 »
1,438	1,726	2,013	2,301	2,588 »
1,394	1,673	1,952	2,230	2,509 »

2) Gewicht von

5	6	7	8	9 Cubikfuß.
0,430	0,515	0,601	0,687	0,773 Pfund.
0,268	0,322	0,376	0,430	0,483 »
330	396	462	528	594 »
3745	4495	5244	5993	6742 »
2376	2851	3326	3802	4277 »
2541	3049	3557	4066	4574 »
2937	3524	4112	4699	5287 »
2821	3386	3950	4514	5079 »
2909	3491	4073	4654	5236 »
2485	2982	3479	3976	4473 »
2409	2891	3373	3854	4336 »
				»
790	948	1106	1264	1422 »
675	810	945	1080	1215 »
505	606	707	808	909 »
217,5	260,9	304,4	347,9	391,4 »
366,3	439,6	512,8	586,1	659,3 »
150	180	210	240	270 »
276,9	332,2	387,6	443,0	498,3 »

E. Gewichtstafel für Metallbleche.

Bei der Dicke von	Ein Quadratfuß Blech wiegt aus			
	Schmiede-eisen.	Gußeisen.	Kupfer.	Messing.
Sechszehntel Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
1	2,64	2,43	3,07	2,85
2	5,29	4,87	6,14	5,71
3	7,94	6,30	9,21	8,57
4	10,58	9,74	12,28	11,43
5	13,23	12,17	15,35	14,29
6	15,88	14,61	18,42	17,15
7	18,52	17,04	21,49	20,01
8	21,17	19,48	24,56	22,87
9	23,82	21,91	27,63	25,73
10	26,47	24,35	30,71	28,59
11	29,11	26,78	33,78	31,45
12	31,76	29,22	36,85	34,30
13	34,41	31,65	39,92	37,16
14	37,06	34,09	42,99	40,01
15	39,70	36,52	46,06	42,86
16	42,34	39,05	49,13	45,72

F. Gewichtstafel für Quadrateisen.

Bei folgenden Breiten und Dicken.	Quadrateisen von 1 Fuß Länge wiegt			
	0	1	2	3 Achtelzoll.
Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
0	0,00	0,05	0,22	0,50
1	3,56	4,52	5,56	6,75
2	14,28	16,12	18,07	20,13
3	32,12	34,85	37,69	40,65
4	57,10	60,72	64,71	68,31
5	89,20	93,73	98,36	103,10
6	128,50	133,85	139,41	144,98
7	174,87	181,12	187,58	194,05
8	228,40	235,54	242,90	250,26

E. Gewichtstafel für Metallbleche.

Bei der Dicke von	Ein Quadratfuß Blech wiegt aus			
	Blei.	Zink.	Zinn.	Silber.
Sechszehntel Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
1	3,91	2,43	2,54	3,60
2	7,83	4,87	5,08	7,20
3	11,75	6,30	7.52	10,80
4	15,67	9,74	9,16	14,40
5	19,58	12,17	12,70	18,00
6	23,50	14,61	14,24	21,60
7	27,42	17,00	17,78	25,20
8	31,34	19,48	20,32	28,80
9	35,26	21,91	22,86	32,40
10	39,18	24,35	25,41	36,00
11	43,09	26,78	27,96	39,60
12	47,01	29,22	30.50	43,20
13	50,93	31,65	33,04	46,80
14	54,85	34,09	35,58	50,40
15	58,77	36,52	38,12	54,00
16	62,69	39,05	40,66	57,60

F. Gewichtstafel für Quadrateisen.

Bei folgenden Breiten und Dicken.	Quadrateisen von 1 Fuß Länge wiegt			
	4	5	6	7 Achtelzoll.
Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
0	0,89	1,39	2,01	2,73
1	8,03	9,43	10,93	12,55
2	22,31	24,59	26,99	29,50
3	43,72	46,90	50,19	53,59
4	72,27	76,34	80,52	84,81
5	107,96	112,92	117,99	123,18
6	150,78	156.58	162,60	168,62
7	200,74	207,44	214,35	221,27
8	257,84	265,43	273,24	281,04

G. Gewichtstafel für Rundeisen.

Bei folgenden Stärken.	Rundeisen von 1 Fuß Länge wiegt			
	0	1	2	3 Achtelzoll.
0 Zoll.	0.00 Pf.	0,04 Pf.	0,17 Pf.	0,39 Pf.
1	2,80	3,55	4,38	5,30
2	11,21	12,66	14.19	15,82
3	25,23	27,39	29,61	31,95
4	44,85	47,72	50,64	53,68
5	70,10	73,67	77,27	81,03
6	100,92	105,13	109,51	113,89
7	137,37	142,28	147,36	152,44
8	179,42	185,03	190,81	196,59

H. Gewichtstafel für Flacheisen.

Bei der Breite von	Flacheisen von 1 Fuß Länge wiegt bei der Dicke von			
	1/8	2/8	3/8	4/8 Zoll.
1 Zoll.	0,45 Pf.	0,89 Pf.	1,34 Pf.	1,78 Pf.
1 1/4	0,56	1,11	1,67	2,23
1 2/4	0,64	1,34	2,01	2,68
1 3/4	0.78	1,56	2,34	3,12
2	0.89	1,78	2,68	3.57
2 1/4	1,00	2,01	3,01	4,01
2 2/4	1,16	2,23	3,35	4,46
2 3/4	1,23	2,45	3,68	4.91
3	1,39	2,68	4,01	5,35
3 1/4	1,45	2,90	4,35	5,80
3 2/4	1,56	3,12	4,68	6,25
3 3/4	1,67	3,34	5,02	6,29
4	1,78	3,57	5,35	7,14
4 1/4	1,90	3,79	5,69	7,58
4 2/4	2,01	4,01	6,02	8,03
4 3/4	2,12	4,24	6,36	8,48
5	2,23	4,46	6,69	8,92
5 1/4	2,34	4,68	7,03	9,37
5 2/4	2,45	4,91	7,36	9,83
5 3/4	2,56	5,13	7,70	10,26
6	2,68	5,35	8,03	10,71

G. Gewichtstafel für Rundeisen.

Bei folgenden Stärken.	Rundeisen von 1 Fuß Länge wiegt			
	4	5	6	7 Achtelzoll.
0 Zoll.	0,71 Pf.	1,09 Pf.	1,58 Pf.	2,15 Pf.
1	6,31	7,41	8,59	9,86
2	17,52	19,33	21,20	23,18
3	34,34	36,86	39,42	42,11
4	56,77	60,00	63,25	66,66
5	84,80	88,74	92,69	96,71
6	118,45	123,00	127,73	132,46
7	157,70	162,95	168,38	173,82
8	202,55	208,51	214,64	220,77

H. Gewichtstafel für Flacheisen.

Bei der Breite von	Flacheisen von 1 Fuß Länge wiegt bei der Dicke von			
	5/8	6/8	7/8	1 Zoll.
1 Zoll.	2,23 Pf.	2,68 Pf.	3,12 Pf.	3,57 Pf.
1 1/4	2,79	3,35	3,90	4,47
1 2/4	3,35	4,01	4,68	5,35
1 3/4	3,90	4,68	5,46	6,25
2	4,46	5,36	6,25	7,14
2 1/4	5,02	6,02	7,03	8,03
2 2/4	5,58	6,69	7,81	8,92
2 3/4	6,13	7,36	8,59	9,83
3	6,69	8,03	9,37	10,71
3 1/4	7,25	8,70	10,15	11,60
3 2/4	7,81	9,37	10,92	12,49
3 3/4	8,37	10,04	11,71	13,38
4	8,92	10,71	12,49	14,28
4 1/4	9,48	11,38	13,27	15,17
4 2/4	10,06	12,05	14,05	16,06
4 3/4	10,60	12,72	14,83	16,95
5	11,15	13,38	15,62	17,85
5 1/4	11,71	14,05	16,40	18,74
5 2/4	12,27	14,72	17,18	19,63
5 3/4	12,83	15,39	17,86	20,52
6	13,38	16,06	18,74	21,42

I. Gewichtstabelle für gußeiserne Röhren.

Jedes Stück von 1 Fuß Länge wiegt					
bei der lichten Weite (in Zollen).	bei der Wanddicke (in Achtelzollen).				
	2	3	4	5	6
	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
1	3,24	5,35	7,78	10,54	13,62
1¼	3,89	6,32	9,08	12,16	15,56
1²/₄	4,54	7,29	10,37	13,78	17,51
1¾	5,19	8,27	11,67	15,40	19,45
2	5,84	9,23	12,97	17,02	21,40
2¼	6,48	10,21	14,26	18,65	23,34
2²/₄	7,13	11,28	15,56	20,26	25,29
2¾	7,78	12,16	16,86	21,88	27,23
3	8,43	13,13	18,15	23,50	29,18
3¼	9,08	14,10	19,45	25,12	31,13
3²/₄	9,73	15.07	20,75	26,74	33,07
3¾	10,47	16,05	22,04	28,37	35,01
4	11,02	17,02	23,34	29,09	36,96
4¼	11,67	17,99	24,64	31,60	38,90
4²/₄	12,32	18,96	25,94	33,23	40,85
4¾	12,97	19,94	27,23	34,85	42,79
5	13,62	20,91	28,53	36,47	44,74
5¼	14,26	21,88	29,83	38,09	46,68
5²/₄	14,85	22.86	31,12	39,71	48,63
5¾	15,52	23,83	32,42	41.33	50,48
6	16,20	24,80	33,72	42,96	52,52
6¼	16,86	25,77	35,01	44,58	54,47
6²/₄	17,51	26,75	36,31	46,20	56,41
6¾	18,15	27,72	37,61	47,82	58,36
7	18,80	28,69	38,90	49,44	60,30
7¼	19,44	29,66	40,20	51,06	62,25
7²/₄	20,10	30,64	41,50	52,68	64,19
7¾	20,75	31,61	42,80	54,30	66,14
8	21,40	32,58	44,09	55,92	68,08
8¼	22,04	33,55	45,39	57,54	70,02
8²/₄	22,69	34,53	46,68	59,16	71,97
8¾	23,34	35,50	47,98	60,79	73,92
9	23,99	36,47	49,28	62,40	75,86

I. Gewichtstabelle für gußeiserne Röhren.

Jedes Stück von 1 Fuß Länge wiegt				
bei der lichten Weite (in Zollen).	bei der Wanddicke (in Achtelzollen).			
	7	8	9	10
	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
1	17,02	20,75	24,80	29,18
1¼	19,29	23,34	27,72	32,42
1²/₄	21,56	25,94	30,64	35,66
1¾	23,83	28,53	33,55	38,90
2	26,10	31,12	36,47	42,15
2¼	28,37	33,72	39,39	45,39
2²/₄	30,64	36,31	42,31	48,63
2¾	32,91	38,90	45,22	51,87
3	35,17	41,52	48,15	55,11
3¼	37,44	44,09	51,06	58,36
3²/₄	39,71	46,68	53,98	61,60
3¾	41,98	49,28	56,90	64,84
4	44,25	51,87	59,81	68,08
4¼	46,52	54,46	62,73	71,32
4²/₄	48,79	57,06	65,65	74,57
4¾	51,06	59,65	68,57	77,81
5	53,33	62,25	71,49	81,05
5¼	55,60	64,84	74,40	84,29
5²/₄	57,87	67,43	77,32	87,53
5¾	60,14	70,03	80,24	90,78
6	62,41	72,62	83,16	94,02
6¼	64,68	75,21	86,07	97,26
6²/₄	66,95	77,81	88,99	100,40
6¾	69,22	80,40	91,91	103,74
7	71,49	82,99	94,83	106,99
7¼	73,75	85,59	97,75	110,23
7²/₄	76,02	88,18	100,66	113,47
7¾	78,29	90,78	103,57	116,71
8	80,57	93,37	106,50	119,95
8¼	82,83	95,96	109,42	123,19
8²/₄	85,10	98,56	112,33	126,44
8¾	87,37	101,14	115,25	129,68
9	89,64	103,74	118,17	132,92

24

I. Gewichtstabelle für gußeiserne Röhren.

Jedes Stück von 1 Fuß Länge wiegt					
bei der lichten Weite (in Zollen)	bei der Wanddicke (in Achtelzollen).				
	2	3	4	5	6
	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
9¼	24,64	37,44	50,57	64,03	77,80
9²/₄	25,29	38,42	51,87	65,65	79,75
9¾	25,94	39,40	53,17	67,27	81,70
10	26,58	40,36	54,46	68,90	83,64
10¼	27,23	41,33	55,76	70,51	85,59
10²/₄	27,88	42,31	57,06	72,13	87,53
10¾	28,53	43,28	58,36	73,75	89,48
11	29,18	44,25	59,65	75,38	91,42
11¼	29,83	45,22	60,95	77,00	93,37
11²/₄	30,47	46,20	62,25	78,62	95,32
11¾	31,12	47,17	63,54	80,24	97,26
12	31,77	48,14	64,84	81,86	99,20

Beispiele.

1) Nach Tabelle B. sind 67,5 Baierische Pfund
$= 67,5 \,.\, 1,23457 = 8,3333$ engl. Pfund.

2) Nach Tabelle C. wiegt 1 Cubikfuß Korkholz
$= 66 \,.\, 0,24 = 15,84$ Pfund.

3) Nach Tabelle D. wiegen 3,79 Cubikfuß Gußeisen:

$$\left\{\begin{array}{r} 1426 \\ 332 \\ 43 \end{array}\right\} = 1801 \text{ Pfund, und } 28,4 \text{ Cubikfuß}$$

$$\text{Ziegelmauer} \left\{\begin{array}{r} 2020 \\ 808 \\ 40 \end{array}\right\} = 2868 \text{ Pfund.}$$

I. Gewichtstabelle für gußeiserne Röhren.

Jedes Stück von 1 Fuß Länge wiegt				
bei der lichten Weite (in Zollen).	bei der Wanddicke (in Achtelzollen).			
	7	8	9	10
	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
$9^1/_4$	91,91	106,34	121,09	136,16
$9^2/_4$	94,18	108,93	124,01	139,41
$9^3/_4$	96,45	111,52	126,92	142,65
10	98,72	114,12	129,84	145,90
$10^1/_4$	100,99	116,71	132,76	149,13
$10^2/_4$	103,26	119,30	135,68	152,37
$10^3/_4$	105,53	121,90	138,59	155,62
11	107,80	124,49	141,51	158,86
$11^1/_4$	110,06	127,09	144,43	162,10
$11^2/_4$	112,33	129,68	147,35	165,34
$11^3/_4$	114,60	132,27	150,27	168,58
12	116,87	134,87	153,18	171,83

Beispiele.

4) Nach Tabelle E. wiegen 27,1 Quadratfuß Zinkblech von $^1/_8$ Zoll Dicke = 27,1 . 4,87 = 132 Pfund.

5) Nach Tabelle F. wiegt ein Eisenstab von $2^1/_4$ Zoll in's Quadrat und 5 Fuß Länge = 18,07 . 5 = 90,35 Pfund.

6) Nach Tabelle H. wiegt ein eiserner Reifen von 3 Zoll Breite, $^1/_2$ Zoll Dicke und 9 Fuß Länge = 5,35 . 9 = 48,15 Pfund.

Zweites Kapitel.

Formeln, Regeln und Tabellen der allgemeinen Mechanik.

§. 1. Einfache Bewegung.

Ist bei einer gleichförmigen Bewegung c die Geschwindigkeit und s der in der Zeit t'' zurückgelegte Raum, so hat man $s = ct$, $c = \frac{s}{t}$ und $t = \frac{s}{c}$.

Ist bei einer gleichbeschleunigten Bewegung die Acceleration p, die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ und die Geschwindigkeit nach der Zeit $t = v$, endlich der in dieser Zeit zurückgelegte Raum $= s$, so gelten folgende Formeln:

Gegeben:	v, t	s, t	p, t
Gesucht:	s, p	v, p	v, s
Formel:	$s = \frac{vt}{2}$	$v = \frac{2s}{t}$	$v = pt$
	$p = \frac{v}{t}$	$p = \frac{2s}{t^2}$	$s = \frac{pt^2}{2}$

Gegeben:	v, s	v, p	s, p
Gesucht:	t, p	t, s	t, v
Formel:	$t = \frac{2s}{v}$	$t = \frac{v}{p}$	$t = \sqrt{\frac{2s}{p}}$
	$p = \frac{v^2}{2s}$	$s = \frac{v^2}{2p}$	$v = \sqrt{2ps}$.

Beim freien Fall der Körper ist:

	Für das preuß. Fußmaaß.	Für das österreich. Fußmaaß.	Für das englische Fußmaaß.
$v =$	$31{,}25\ t$ $7{,}906\sqrt{s}$	$31{,}03\ t$ $7{,}878\sqrt{s}$	$32{,}20\ t$ $8{,}025\sqrt{s}$
$s =$	$15{,}625\ t^2$ $0{,}016\ v^2$	$15{,}515\ t^2$ $0{,}01611\ v^2$	$16{,}10\ t^2$ $0{,}01553\ v^2$
$t =$	$0{,}032\ v$ $0{,}253\sqrt{s}$	$0{,}03223\ v$ $0{,}2539\sqrt{s}$	$0{,}03106\ v$ $0{,}2492\sqrt{s}$

	Für das pariser Fußmaaß.	Für das Metermaaß.
$v =$	$30{,}20\ t$ $7{,}772\sqrt{s}$	$9{,}81\ t$ $4{,}429\sqrt{s}$
$s =$	$15{,}10\ t^2$ $0{,}01656\ v^2$	$4{,}905\ t^2$ $0{,}0510\ v^2$
$t =$	$0{,}03312\ v$ $0{,}2573\sqrt{s}$	$0{,}1019\ v$ $0{,}1428\sqrt{s}$

Folgende Tabellen geben die am gewöhnlichsten vorkommenden Fallhöhen und Endgeschwindigkeiten an; ihre Einrichtung ist die gewöhnliche. Hiernach entspricht z. B. der Endgeschwindigkeit von 3,5 Fuß die Fallhöhe 0,1960, und der Fallhöhe $s = 4{,}9$ Fuß die Endgeschwindigkeit $v = 17{,}50$ Fuß; auch bestimmt sich durch Interpolation nach Tafel II. die der Endgeschwindigkeit $v = 16{,}5$ Fuß entsprechende Fallhöhe $s = 4{,}3 + 0{,}1 \cdot \frac{50-39}{58-39} = 4{,}36$ Fuß, so wie nach Tafel I. die der Fallhöhe 0,06 Fuß entsprechende Endgeschwindigkeit $v = 1{,}9 + 0{,}1 \cdot \frac{600-578}{640-578} = 1{,}935$ Fuß.

Tafel (I).

Die Fallhöhen für die Geschwindigkeiten von 0 bis 10 Fuß.

$v =$	0	1	2	3	4 Fuß.
..,0	0,0000	0,0160	0,0640	0,1440	0,2560
..,1	0,0002	0,0194	0,0706	0,1538	0,2690
..,2	0,0006	0,0230	0,0774	0,1638	0,2822
..,3	0,0014	0,0270	0,0846	0,1742	0,2958
..,4	0,0026	0,0314	0,0922	0,1850	0,3098
..,5	0,0040	0,0360	0,1000	0,1960	0,3240
..,6	0,0058	0,0410	0,1082	0,2074	0,3386
..,7	0,0078	0,0462	0,1166	0,2190	0,3534
..,8	0,0102	0,0518	0,1254	0,2310	0,3686
..,9	0,0130	0,0578	0,1345	0,2434	0,3842

Tafel (II).

Die den Fallhöhen von 0 bis 10 Fuß entsprechenden Endgeschwindigkeiten.

$s =$	0	1	2	3	4 Fuß.
..,0	0,00	7,91	11,18	13,69	15,81
..,1	2,50	8,29	11,46	13,92	16,01
..,2	3,54	8,66	11,73	14,14	16,20
..,3	4,33	9,01	11,99	14,36	16,39
..,4	5,00	9,35	12,25	14,58	16,58
..,5	5,59	9,68	12,50	14,79	16,77
..,6	6,12	10,00	12,75	15,00	16,96
..,7	6,61	10,31	12,99	15,21	17,14
..,8	7,07	10,61	13,23	15,41	17,32
..,9	7,50	10,90	13,46	15,61	17,50

Tafel (I).

Die Fallhöhen für die Geschwindigkeiten von 0 bis 10 Fuß.

v =	5	6	7	8	9 Fuß.
..,0	0,4000	0,5760	0,7840	1,0240	1,2960
..,1	0,4162	0,5954	0,8066	1,0498	1,3250
..,2	0,4326	0,6150	0,8298	1,0758	1,3542
..,3	0,4494	0,6350	0,8526	1,1022	1,3838
..,4	0,4666	0,6554	0,8762	1,1290	1,4138
..,5	0,4840	0,6760	0,9000	1,1560	1,4440
..,6	0,5018	0,6970	0,9242	1,1834	1,4746
..,7	0,5198	0,7182	0,9486	1,2110	1,5054
..,8	0,5382	0,7398	0,9734	1,2390	1,5366
..,9	0,5570	0,7618	0,9986	1,2674	1,5682

Tafel (II).

Die den Fallhöhen von 0 bis 10 Fuß entsprechenden Endgeschwindigkeiten.

s =	5	6	7	8	9 Fuß.
..,0	17,68	19,36	20,92	22,36	23,72
..,1	17,85	19,53	21,07	22,50	23,85
..,2	18,03	19,68	21,21	22,64	23,98
..,3	18,20	19,84	21,36	22,78	24,11
..,4	18,37	20,00	21,51	22,91	24,24
..,5	18,54	20,16	21,65	23,05	24,37
..,6	18,71	20,31	21,79	23,18	24,49
..,7	18,87	20,46	21,94	23,32	24,62
..,8	19,04	20,62	22,08	23,45	24,75
..,9	19,20	20,77	22,22	23,58	24,87

Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche mit der Geschwindigkeit c anfängt, ist

$$v = c + pt = \frac{2s}{t} - c = \sqrt{c^2 + 2ps} = \frac{s}{t} + \frac{pt}{2},$$

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} = \left(\frac{c+v}{2}\right)t = \frac{v^2 - c^2}{2p} = vt - \frac{pt^2}{2}.$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung ist

$$v = c - pt = \frac{2s}{t} - c = \sqrt{c^2 - 2ps} = \frac{s}{t} - \frac{pt}{2},$$

und

$$s = ct - \frac{pt^2}{2} = \left(\frac{c+v}{2}\right)t = \frac{c^2 - v^2}{2p} = vt + \frac{pt^2}{2}.$$

Für frei fallende und steigende Körper ist

$p = g = 9{,}81$ Meter $= 31{,}25$ Fuß

einzusetzen.

Für jede ungleichförmige Bewegung ist, wenn $\varkappa$ den in einem Zeitelement τ erhaltenen Zuwachs an Geschwindigkeit und σ den in einem Zeitelemente durchlaufenen Raum bezeichnet:

1) $\varkappa = p\tau$, 2) $\sigma = v\tau$, also auch

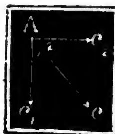
3) $p = \frac{\varkappa}{\tau}$, 4) $v = \frac{\sigma}{\tau}$, endlich

5) $p\sigma = v\varkappa$.

§. 2. Zusammengesetzte Bewegung.

Aus den Seitengeschwindigkeiten c_1 und c_2, so wie dem eingeschlossenen Winkel $c_1 A c_2 = A$, Fig. 145, folgt die mittlere Geschwindigkeit

Fig. 145.



$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\, c_1\, c_2 \cos. A},$$ und der Winkel $c_1 A c = A_1$, welchen dieselbe mit der Richtung von c_1 einschließt,

$$\sin. A_1 = \frac{c_2 \sin. A}{c}, \text{od.} \tang. A_1 = \frac{c_2 \sin. A}{c_1 + c_2 \cos. A}.$$

Schließen beide Bewegungen c_1 und c_2 den

Rechtwinkel ein, so ist $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ und $tang.\, A_1 = \frac{c_2}{c_1}$.
Umgekehrt folgt aus der mittleren Geschwindigkeit c und den Winkeln A_1 und A_2, welche dieselbe mit ihren Componenten einschließt:

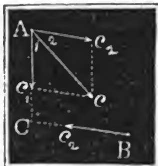
$$c_1 = \frac{c\ sin.\, A_2}{sin.\, (A_1 + A_2)} \text{ und } c_2 = \frac{c\ sin.\, A_1}{sin.\, (A_1 + A_2)}.$$

Sollen die Componenten c_1 und c_2, Fig. 146, rechtwinkelig gegen einander stehen, also $A = A_1 + A_2 = 90°$ sein, so hat man

Fig. 146.



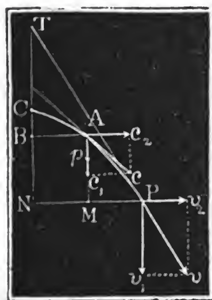
Fig. 147.



$c_1 = c\ cos.\, A_1$ und
$c_2 = c\ sin.\, A_2$.

Aus der absoluten Geschwindigkeit c_1 eines Körpers A, Fig. 147, und aus der absoluten Geschwindigkeit c_2 eines anderen B, folgt mit Hilfe des Winkels C, um welchen die Richtungen beider Geschwindigkeiten von einander abweichen, die relative Geschwindigkeit des ersten Körpers in Hinsicht auf den zweiten: $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2\, c_1 c_2\, cos.\, C}$ und für den Winkel A_1, welcher die Richtung dieser Bewegung angibt: $sin.\, A_1 = \frac{c_2\ sin.\ C}{c}$.

Fig. 148.



Diese Formeln gelten auch bei der Zerlegung, Zusammensetzung und Vergleichung der Accelerationen, in welchem Falle nur statt c_1, c_2 und c, p_1, p_2 und p zu substituiren sind.

Hat ein Punkt A die Geschwindigkeit c und Acceleration p, Fig. 148, deren Richtungen den Winkel $c A p = A$ zwischen sich einschließen, so sind die Coordinaten

des Scheitels C der entsprechenden parabolischen Bahn:

$$CB = a = \frac{c^2 \sin 2A}{2p} \text{ und}$$

$$BA = b = \frac{c^2 \cos. A^2}{2p}.$$

Für irgend einen Punkt P, den der Körper nach t Secunden einnimmt, hat man die Abscisse

$AM = x = ct \cos. A + \frac{p t^2}{2}$ und die Ordinate

$MP = y = ct \sin. A$, auch $x = y \operatorname{cotg.} A + \frac{p y^2}{2c^2 \sin. A^2}$;

ferner sind im Punkte P die Seitengeschwindigkeiten:

$$v_1 = c \cos. A + pt \text{ und } v_2 = c \sin. A,$$

und die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{c^2 + 2\,pt \cos. A + p^2 t^2};$$

und für die Richtung dieser Geschwindigkeit:

$\sin. vPv_1 = \sin. P = \frac{c \sin. A}{v}$ oder $\operatorname{tang.} P = \frac{v_2}{v_1} = \frac{c \sin. A}{c \cos. A + pt}$.

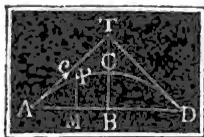
Vom Scheitel C ausgegangen ist, wenn x_1 die Abscisse CN und y_1 die Ordinate NP bezeichnen:

$$x_1 = \frac{p y_1^2}{2\, c^2 \sin. A^2}, \text{ und } y_1 = c \sin. A \sqrt{\frac{2x_1}{p}},$$

auch $\operatorname{tang.} P = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{NP}{2\,CN}$.

Für die Wurfbewegung hat man, wenn c die Wurfgeschwindigkeit und A den Elevationswinkel TAB, Fig. 149, bezeichnet, die Wurfhöhe

Fig. 149.



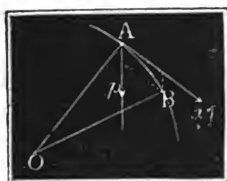
$CB = a = \frac{c^2 \sin. \alpha^2}{2g}$, die halbe Wurfweite $BA = BD = b = \frac{c^2 \sin. 2\alpha}{2g}$; die Abscisse $AM = x = ct \cos. A$ und die Ordinate $MP = y = ct \sin. A - \frac{g t^2}{2}$

$$= x \operatorname{tang.} A - \frac{g x^2}{2\, c^2 \cos. A^2}.$$

Aus der Geschwindigkeit $Av = v$ und der Acceleration $Ap = p$, Fig. 150, an irgend einer Stelle der krummlinigen Bewegung, folgt mittels des Winkels $pAv = A$ der Krümmungshalbmesser $r = \frac{v^2}{p \sin. A}$, so wie die Acceleration

$$p = \frac{v^2}{r \sin. A}.$$

Fig. 150.



§. 3. Kraft und Arbeit.

Ist G das Gewicht eines Körpers und g die Beschleunigung der Schwere, so hat man die Masse dieses Körpers: $M = \frac{G}{g}$, so wie umgekehrt $G = Mg$.

Für das preußische Fußmaaß ist:

$$M = \frac{G}{31,25} = 0,032\ G \text{ und } G = 31,25\ M.$$

Für das Metermaaß aber:

$$M = \frac{G}{9,81} = 0,1019\ G \text{ und } G = 9,81\ M.$$

Ist γ die Dichtigkeit des Wassers, und ε das specifische Gewicht eines Körpers, so hat man die Dichtigkeit desselben $\gamma_1 = \varepsilon \gamma$.

Ist überdies V das Volumen desselben, so hat man sein absolutes Gewicht:

$$G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma, \text{ und umgekehrt } V = \frac{G}{\varepsilon\gamma}.$$

Für das preußische Maaß und Gewicht ist:

$$G = 66\varepsilon V \text{ Pfd. und } V = \frac{G}{66\varepsilon} = 0,01515\ \frac{G}{\varepsilon} \text{ Cub.-Fß.}$$

Für das französische Maaß und Gewicht:

$$G = 1000\ \varepsilon\ V \text{ Kilgr. und } V = 0,001\ \frac{G}{\varepsilon} \text{ Cub.-Meter.}$$

Ist P die Kraft, welche einer Masse die Acceleration p ertheilt, so hat man $P = Mp = \frac{pG}{g}$, und umgekehrt

$$p = \frac{P}{M} = \frac{P}{G}\, g.$$

Aus der Kraft P und dem Wege s ihres Angriffspunktes, in der Richtung der ersteren gemessen, folgt die **Arbeit** oder **Leistung** der Kraft:

$$L = Ps.$$

Ist P veränderlich, so hat man einen mittleren Werth derselben einzuführen.

Um eine Masse M aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit v zu versetzen, ist die Arbeit

$$L = Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right) G$$

nöthig; auch kann die Masse diese Arbeit verrichten, wenn sie gezwungen wird, ihre Geschwindigkeit v in c umzusetzen.

Eine Pferdekraft ist 75 Kilogrammmeter = 510 Fußpfund, daher $L = \frac{Ps}{510} = 0{,}00196\, Ps$ Pferdekräfte, wenn P in Pfunden und s in Fußen ausgedrückt werden; dagegen $L = \frac{Ps}{75} = 0{,}01333\; Ps$ Pferdekräfte, wenn P in Kilogramm und s in Metern gegeben sind.

Folgende Tabelle drückt die hier zu Grunde liegenden Größen g, γ u. s. w. in verschiedenen Landesmaaßen aus.

	Beschleunigung g	Reciproke $\frac{1}{g}$	Dichtigkeit des Wassers γ	Reciproke $\frac{1}{\gamma}$
Preußen .	31,25 Fß.	0,03200	66 Pf.	0,01515
Oesterreich	31,03 »	0,03223	56,32 »	0,01776
Baiern . .	33,65 »	0,02976	44,33 »	0,02256
Sachsen .	34,63 »	0,02887	45,35 »	0,02210
Hannover	33,58 »	0,02978	53,20 »	0,01897
Baden . .	32,70 »	0,03059	53,92 »	0,01855
Darmstadt	39,24 »	0,02549	31,20 »	0,03205
England .	32,18 »	0,03108	62,33 »	0,01604
Würtembg.	34,24 »	0,02921	50,20 »	0,01992
Frankreich	30,20 »	0,03312	69,92 »	0,01430
»	9,81 Meter.	0,10196	1000 Kil.	0,001

	Fußpfund.	Reciproke. $\frac{1}{\text{Fußpfund.}}$	Pferdekraft.
Preußen . . .	1	1	510 Fßpf.
Oesterreich . .	0,8292	1,0259	424 »
Baiern . . .	0,8981	1,1114	459 »
Sachsen . . .	1,0367	0,9646	530 »
Hannover . .	1,0745	0,9307	549 »
Baden	0,9786	1,0218	500 »
Darmstadt . .	1,1744	0,8515	600 »
England . . .	1,0618	0,9418	543 »
Würtemberg .	1,0955	0,9129	560 »
Frankreich . .	0,9232	1,0832	472 »
»	0,1468 Kilogrmet.	6,8121	75 Kilogrmet.

Beispiele. 1) Ein Körper von 5,3 engl. Cubikfuß Inhalt und 2,15 specifischem Gewicht, hat das absolute Gewicht: $G = 5{,}3 \,.\, 2{,}15 \,.\, 62{,}33 = 710{,}25$ Pfd. engl., und die Masse: $M = \frac{G}{g} = 710{,}25 \,.\, 0{,}03108 = 22{,}07$ Pfd.

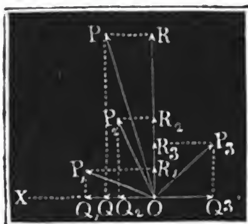
2) Eine Leistung von 4735 Fußpfund baierisch ist = 4735 . 1,1114 = 5262 Fußpfund preuß. = 10,3 Pferdekräfte.

3) Eine Leistung von 27 Pferdekräften ist = 27 . 75 = 2025 Kilogrammeter = 27 . 424 = 11448 Fußpfund österreichisch.

§. 4. Zusammensetzung der Kräfte.

Kräfte werden genau so zusammengesetzt und zerlegt wie Accelerationen und Geschwindigkeiten, weshalb denn die in §. 2 mitgetheilten Formeln auch hier ihre Anwendung finden.

Fig. 151.



Wird ein Körper O, Fig. 151, von den Kräften P_1, P_2, P_3, ... ergriffen, deren Richtungen in einer Ebene liegen und mit einer Axe OX die Winkel $P_1 OX = O_1$, $P_2 OX = O_1 + O_2$, $P_3 OX = O_1 + O_2 + O_3 + \ldots$ einschließen, so hat man für die entsprechende Mittelkraft folgende Formeln:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$$
$$= P_1 cos. O_1 + P_2 cos. (O_1 + O_2) + P_3 cos. (O_1 + O_2 + O_3) + \ldots,$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$
$$= P_1 sin. O_1 + P_2 sin. (O_1 + O_2) + P_3 sin. (O_1 + O_2 + O_3).$$
$$P = \sqrt{Q^2 + R^2}, \text{ und } tang. POX = \frac{R}{Q}.$$

Greifen die Kräfte P_1, P_2 u. s. w. in verschiedenen Punkten A_1, A_2 ..., Fig. 152 (auf nebenst. Seite), des Körpers an, und sind die Hebelarme dieser Kräfte:

$$ON_1 = a, \; ON_2 = a_2, \; ON_3 = a_3 \text{ u. s. w.},$$

so hat man überdies den Hebelarm der Mittelkraft:

$$ON = a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \ldots}{P}.$$

Von Parallelkräften P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 153, ist die Mittelkraft $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, und ihr Mittelpunkt A, d. i. der Punkt, durch welchen die Kraft

Fig. 152.

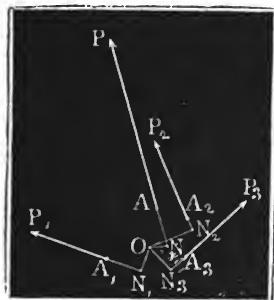
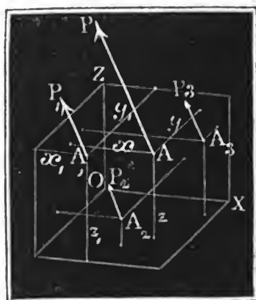


Fig. 153.



bei jeder Richtung dieses Kräftesystemes gehen muß, bestimmt durch folgende Abstände von den drei Projectionsebenen:

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}$$

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots} \quad \text{und}$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}.$$

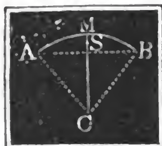
Wirken die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . nach Richtungen in verschiedenen Ebenen, so führt man diese auf eine oder zwei Mittelkräfte auf folgende Weise zurück. Zunächst verlege man alle Angriffspunkte in eine und dieselbe Ebene, z. B. in eine Horizontalebene, dann zerlege man jede Kraft in eine Seitenkraft, deren Richtung normal auf dieser Ebene steht und in eine Seitenkraft, deren Richtung in diese Ebene selbst fällt; endlich vereinige man die erstere nach der letzten und die anderen nach der vorletzten Regel zu einer Mittelkraft. Wenn sich die Richtungen dieser Mittelkräfte schneiden, so lassen sich beide nach den obigen Regeln auf eine einzige Mittelkraft zurückführen, außerdem aber ist eine solche Zurückführung gar nicht möglich.

§. 5. Der Schwerpunkt.

1) Die Schwerpunkte regelmäßiger Räume fallen mit den Mittelpunkten derselben zusammen; die der symmetrischen Räume liegen in den Symmetriearen oder Symmetrieebenen.

2) Der Abstand $CS = z$ des Schwerpunktes S eines Kreisbogens $AMB = b$, Fig. 154, wird mit Hilfe des Halbmessers $CM = r$ und der Sehne $AB = s$ durch die Proportion:

Fig. 154.



$\frac{z}{r} = \frac{s}{b}$ gefunden.

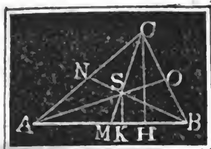
Ist β^0 der Centriwinkel ACB, so hat man hiernach

$z = \frac{rs}{b} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta} . r$, und für den Halbkreis $z = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366..r$, ungefähr $= \frac{7}{11} r$.

3) Die Diagonalen eines Parallelogrammes schneiden einander im Schwerpunkte desselben.

4) Die Geraden CM, BN, AO von den Ecken eines Dreieckes ABC, Fig. 155, nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten schneiden einander im Schwerpunkte S; auch ist die Entfernung des Schwerpunktes S von der Spitze $C = \frac{2}{3}$ und von der Mitte $M = \frac{1}{3}$ der Halbirungslinie CM, so wie der Abstand SK desselben von der Grundlinie $\frac{1}{3}$ und von der Spitze $\frac{2}{3}$ der Höhe CH.

Fig. 155.



5) Sind a, b und c die Abstände der Eckpunkte eines Dreieckes von einer Ebene, so hat man für den Abstand z seines Schwerpunktes von eben dieser Ebene:

$$z = \frac{a + b + c}{3}.$$

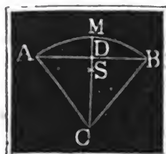
6) Der Schwerpunkt S eines Trapezes AC, Fig. 156, wird gefunden, wenn man $CE = AB = b_1$ und $AF = CD = b_2$ macht, und EF, so wie die Halbirungslinie MN zieht; der Durchschnitt dieser beiden Linien ist S, und der Abstand $SK = z$ dieses Punktes von der Basis wird mittels der Basen b_1 und b_2 und der Höhe $DH = h$ durch die Formel $z = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}$ gefunden.

Fig. 256.



7) Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes ACB, Fig. 157, liegt in der Halbirungslinie CM, und steht um $z = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta} r$ vom Mittelpunkte C ab (vergl. Nr. 2). Hiernach ist für den Halbkreis $z = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244r$, annähernd $= \frac{14}{33} r$.

Fig. 157.



8) Für den Schwerpunkt des Kreisabschnittes $AMBD$, Fig. 157, ist, wenn F den Inhalt und s die Sehne AB desselben bezeichnet, $z = \frac{s^3}{12F}$.

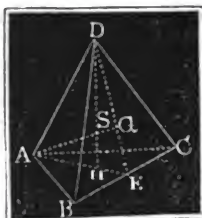
9) Für das concentrische Ringstück mit den Halbmessern r_1 und r_2 und dem Centriwinkel β^0 ist:

$$z = \frac{4}{3} \frac{\sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

10) Der Schwerpunkt eines Prismas, so wie seines Mantels liegt in der Mitte der die Schwerpunkte beider Grundflächen verbindenden Linie; der Schwerpunkt des Mantels einer geraden Pyramide oder eines geraden Kegels liegt in der Höhenlinie, und zwar um $\frac{1}{3}$ dieser Linie von der Basis und $\frac{2}{3}$ derselben von der Spitze ab; der Schwerpunkt einer Kugelzone liegt endlich in der Mitte der die Mittelpunkte beider Begrenzungskreise verbindenden Geraden.

11) Der Schwerpunkt S einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 158, ist der Durchschnitt aller Geraden AG, DH . . von einem Eckpunkte nach dem Schwerpunkte der Gegenfläche; und steht um den vierten Theil einer solchen Linie von dieser Fläche, also um Dreiviertel derselben Linie von dem Eckpunkte, oder um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche, so wie um drei Viertel der Höhe von der Spitze ab.

Fig. 158.



12) Stehen die vier Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide um a, b, c, d von einer Ebene ab, so ist der Abstand des Schwerpunktes dieser Pyramide von eben dieser Ebene

$$z = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

13) Der Schwerpunkt einer jeden Pyramide befindet sich in der Linie von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche und steht um drei Viertel der Höhe von jener und um ein Viertel von dieser ab.

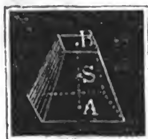
15) Sind F_1 und F_2 die Grundflächen und ist h die Höhe einer abgekürzten Pyramide, so hat man den Abstand des Schwerpunktes derselben von F_1:

$$z = \frac{F_1 + 2\sqrt{F_1 F_2} + 3F_2}{F_1 + \sqrt{F_1 F_2} + F_2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Für den abgekürzten Kegel mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist:

$$z = \frac{r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Fig. 159.

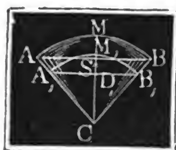


16) Für den Obelisken, Fig. 159, dessen rectanguläre Grundflächen G_1 und G_2 die Dimensionen a_1 und b_1 und a_2 und b_2 haben, und dessen Höhe $AB = h$ ist, hat man den Abstand des Schwerpunktes von G_1:

$$z = \frac{a_1 b_1 + 3\,a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{2\,a_1 b_1 + 2\,a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

17) Der Schwerpunkt S des Kugelausschnittes ACB, Fig. 160, ist zugleich der Schwerpunkt der Calotte A_1B_1, deren Halbmesser $CA_1 = {}^3/_4\,r = {}^3/_4$ des Halbmessers CA der Kugel ist, befindet sich also in der Mitte der Höhe $D_1M_1 = {}^3/_4\,h$ der Calotte AMB und im Abstande $z = {}^3/_4 \left(r - \frac{h}{2}\right)$ vom Mittelpunkte C.

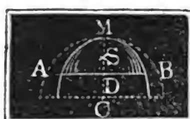
Fig. 160.



Für die Halbkugel ist $h = r$ und sonach $z = {}^3/_8\,r$.

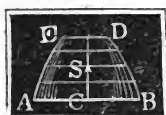
18) Der Schwerpunkt des Abschnittes einer Kugel oder eines Sphäroides AMB, Fig. 161, steht vom Mittelpunkte der Kugel ab, um $z = {}^3/_4 \frac{(2\,r - h)^2}{3\,r - h}$, wobei h wie in Nr. 17 die Höhe MD des Abschnittes und r den Halbmesser CM der Kugel oder des Sphäroides bezeichnet.

Fig. 161.



19) Sind F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 die Querschnitte eines Körpers oder einer Fläche AD, Fig. 162, in gleichen Abständen von einander und ist h die ganze Höhe, oder der Abstand zwischen F_0 und F_4, so hat man den Abstand des Schwerpunktes S von F_0 annähernd:

Fig. 162.



$$CS = z = \frac{0\,.\,F_0 + 1\,.\,4\,F_1 + 2\,.\,2F_2 + 3\,.\,4F_3 + 4\,.\,F_4}{F_0 + 4\,F_1 + 2\,F_2 + 4\,F_3 + F_4} \cdot \frac{h}{6}.$$

20) Bei der Bestimmung des Schwerpunktes zusammengesetzter Körper ist von den Formeln:

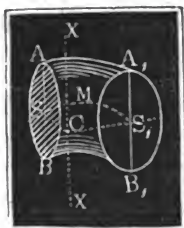
$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + ..}{P_1 + P_2 + ..},\; y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + ..}{P_1 + P_2 + ..},\; z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + ..}{P_1 + P_2 + ..}$$

Gebrauch zu machen (siehe den vorigen Paragraphen). Sind die Körpertheile homogen, so kann man statt ihrer Gewichte P_1, P_2.., ihre Volumina V_1, V_2.. einsetzen.

§. 6. Die Guldinische Regel.

Der Inhalt eines Rotationskörpers AB, Fig. 163, ist gleich dem eines Prismas, welches zur Basis die Erzeugungsfläche $AB = A_1B_1 = F$ des ersteren und zur Höhe die Axe, d. i. den Weg $SMS_1 = s$ hat, welchen der Schwerpunkt S der Fläche bei Umdrehung oder Erzeugung des Körpers zurücklegt. Ist der Umdrehungswinkel $SCS_1 = \beta^0$, so hat man hiernach den gedachten Inhalt:

Fig. 163.



$$V = Fs = \beta rF = \frac{\beta^0}{180^0} . \pi rF.$$

Ebenso ist für eine Rotationsfläche G, wenn r den Abstand des Schwerpunktes ihrer Erzeugungslinie l von der Umdrehungsaxe bezeichnet:

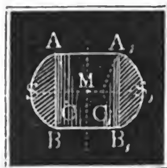
$$G = ls = \beta rl = \frac{\beta^0}{180^0} \pi r l.$$

Für den Ring mit elliptischem Querschnitte ist, wenn a und b die Halbaxen der Ellipse, r aber den Abstand CS ihres Mittelpunktes von der Umdrehungsaxe bezeichnet:

$$V = 2\pi^2 a b r.$$

Für einen Ring, dessen Querschnitt F ein Kreissegment AB, Fig. 164, ist, hat man, wenn c die Sehne desselben und a den Abstand MC seines Mittelpunktes C von der Umdrehungsaxe bezeichnet, nach Nr. 8, §. 5:

Fig. 164.



$$S = 2\pi \left(a + \frac{c^3}{12F}\right)$$

$$V = 2\pi \left(aF + \frac{c^3}{12}\right).$$

Z. B. für den Ring mit halbkreisförmigem Querschnitte, wo $F = \frac{1}{2}\pi r^2$ und $c = 2r$ ist, $V = \pi r^2 (\pi a + \frac{4}{3} r)$.

Für die krumme Oberfläche dieses Ringes hat man

nach Nr. 2, §. 5, wenn b den Erzeugungsbogen AB bezeichnet, $G = 2\pi \left(a + \frac{c}{b}\, r\right) b = 2\pi\, (ab + cr)$.

Dieselben Formeln lassen sich auch auf die Kuppeln, wie ADB, Fig. 165, anwenden. Aus der Höhe $MD = h$ und der halben lichten Weite $MA = MB = r$ der Kuppel folgt zunächst der Centriwinkel $ACD = \varphi$, durch die Formel:

Fig. 165.



1) $tang.\ \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{h}$; und hieraus der Bogenhalbmesser $CA = CD$;

2) $r_1 = \frac{h}{sin\ \varphi}$, ferner der Abstand $CM = a$ des Mittelpunktes von der Axe der Kuppel;

3) $a = r_1 - r$; der Erzeugungsbogen AD;

4) $b = \varphi r_1$ und das Erzeugungssegment;

5) $F = \left(\varphi - \frac{sin.2\varphi}{2}\right) \frac{r_1^2}{2}$.

Hiernach ist der cubische Fassungsraum der Kuppel:

6) $V = 2\pi \left(\frac{h^3}{3} - aF\right)$ und die Oberfläche derselben:

7) $G = 2\pi\, (hr - ab)$.

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem eines gerade abgeschnittenen, das mit demselben einerlei Grundfläche und zur Höhe den Abstand des Schwerpunktes der schiefen Schnittfläche von der Basis hat. Ist G der Inhalt der Grundfläche und h dieser Abstand, so folgt demnach $V = G h$.

Drittes Kapitel.

Statik.

§. 7. Die Hebel.

Ist $CA = a$ der Hebelarm der Kraft P und $CB = b$ der der Last Q eines Hebels ACB, Fig. 166, 167, 168, so

Fig. 166.

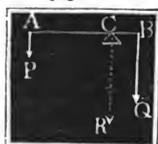


Fig. 167.

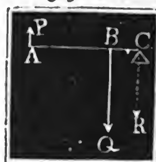
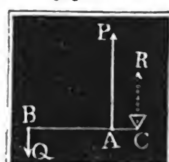


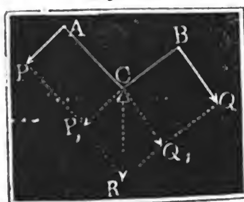
Fig. 168.



hat man $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$, oder $P\,a = Q\,b$, d. i. im Gleichgewichtszustande eines Hebels verhält sich die Kraft zur Last umgekehrt wie der Hebelarm der Kraft zum Hebelarm der Last, oder es ist das statische Moment der Kraft gleich dem der Last.

Beim doppelarmigen Hebel ACB, Fig. 166, ist der Druck im Stützpunkte:

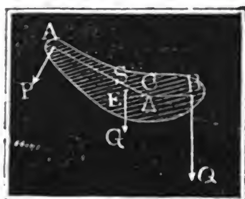
Fig. 169.



$R = P + Q$, beim einarmigen Hebel in Fig. 167 ist:
$R = Q - P$, beim einarmigen Hebel in Fig. 168:
$R = P - Q$, endlich beim Winkelhebel ACB, Fig. 169, wo die Kraft- und Lastrichtung einen Winkel $P_1\,CQ_1 = \alpha$ zwischen sich einschließen:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\,\cos.\alpha}.$$

Fig. 170.



Ist G das Gewicht des Hebels und e der Horizontalabstand CE, Fig. 170, seines Schwerpunktes von dem Stützpunkte C, so hat man das Moment des Hebelgewichtes $= Ge$, und daher, mit Berücksichtigung des letzteren:

$$Pa \pm Ge = Qb.$$

§. 8. Stabilität.

Im statischen Sinne ist das Maaß der Stabilität eines Körpers $ABCD$, Fig. 171, das Product aus dem Gewichte G dieses Körpers, und dem Abstande AM der äußersten Kante A seiner Basis von der vertikalen Schwerlinie SG.

Fig. 171.

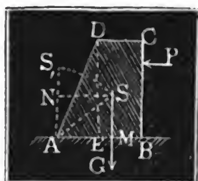
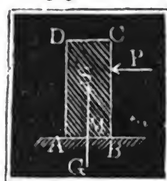


Fig. 172.



Für eine parallelepipedische Mauer AC, Fig. 172, von der Breite $AB = b$, Höhe $AD = h$ und Länge $= l$ ist, bei der Dichtigkeit γ das Maaß der Stabilität:

$$S = \tfrac{1}{2}\, b^2 h l \gamma.$$

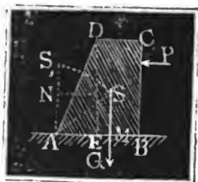
Für die geböschte Mauer AC, Fig. 171, ist, wenn man die Böschung oder Ausladung der Rückseite auf jeden Fuß Höhe $= n$ nimmt:

$$S = (\tfrac{1}{2}\, b^2 + nbh + \tfrac{1}{3}\, n^2 h^2)\, hl\gamma.$$

Im dynamischen Sinne ist das Maaß der Stabilität eines Körpers die Arbeit, welche man aufzuwenden hat, um den Körper aus dem stabilen in den labilen Gleichgewichtszustand zu bringen, so daß sein Schwerpunkt senkrecht über

den Stützpunkt zu stehen kommt. Sind $AM = x$ und $MS = y$ die horizontalen und vertikalen Coordinaten des Schwerpunktes S, Fig. 173, in Hinsicht auf die Kante A der Stützung, so hat man die Höhe, auf welche der Schwerpunkt steigen muß, um das labile Gleichgewicht des Körpers herzustellen:

Fig. 173.



$S_1 N = \sqrt{x^2 + y^2} - y$; ist endlich noch G das Gewicht des Körpers, so folgt die gesuchte Stabilität oder Arbeit:

$$S = G\,(\sqrt{x^2 + y^2} - y).$$

Für die geböschte Mauer in Fig. 173 ist:

$$x = \frac{3b^2 + 6nbh + 2n^2h^2}{3(2b + nh)},$$

$$y = \frac{3b + nh}{2b + nh} \cdot \frac{h}{3}, \text{ und}$$

$$G = (b + \tfrac{1}{2}nh)\,hl\gamma.$$

§. 9. Schiefe Ebene.

Ist G das Gewicht eines Körpers S, Fig. 174, auf der schiefen Ebene EH, und α der Neigungswinkel EHR derselben gegen den Horizont, so hat man:

1) das Bestreben des Körpers zum Herabgleiten: $P = G \sin.\alpha$,
2) den Normaldruck desselben gegen die Ebene: $N = G \cos.\alpha$.

Fig. 174.

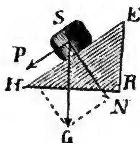
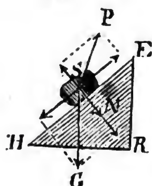


Fig. 175.



Soll eine Kraft P, Fig. 175, dem Gewichte G eines Körpers auf einer schiefen Ebene das Gleichgewicht halten, deren Richtung um einen Winkel $PSK = \beta$ von der schiefen Ebene abweicht, so hat man:

1) $P = \frac{G \sin.\alpha}{\cos.\beta}$, und der Normaldruck:

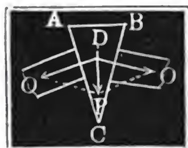
2) $N = \frac{G \cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta}$.

Ist P horizontal gerichtet, so folgt $P = G \text{ tang. } \alpha$, und

$$N = \frac{G}{\cos. \alpha}.$$

Für den Keil ACB, Fig. 178, ist, wenn die Kraft winkelrecht auf den Rücken AB des Keiles $= P_1$ und die Last winkelrecht gegen die Seite des Keiles $= Q$, die Schärfe ACB des Keiles aber $= \alpha$ gesetzt wird:

Fig. 176.



$$P = 2\,Q \sin. \frac{\alpha}{2}.$$

§. 10. Seilpolygon.

Wenn Gleichgewicht zwischen den Kräften eines Seilpolygones stattfindet, so müssen sich auch die Kräfte in jedem Knoten das Gleichgewicht halten, auch müssen sämmtliche Kräfte im Gleichgewichte sein, wenn sämmtliche Kräfte in einem einzigen Punkte angreifend angenommen werden.

Beim festen Knoten K, Fig. 177, ist die Spannung des durch zwei Kräfte P und Q gespannten Seiles KL: $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos. K}$, und für die Richtung desselben: $\sin. K_1 = \frac{P \sin. K}{S}$.

Fig. 177.

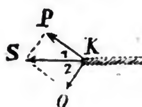
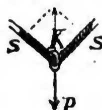


Fig. 178.



Beim losen Knoten K, Fig. 178, sind die Spannungen S beider Enden eines und desselben Seiles einander gleich, weshalb die Richtung der Kraft P den vom Seile gebildeten Winkel $SKS = K$ halbirt, und

$$P = 2\,S \cos. \tfrac{1}{2} K \text{ ist.}$$

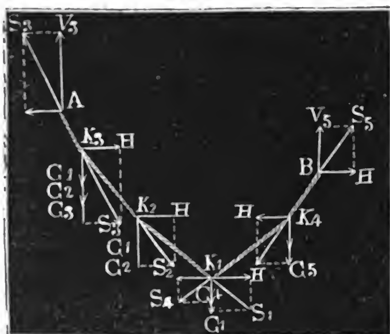
Wird ein Seil durch Parallelkräfte, z. B. durch Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w., Fig. 179 a. f. S., gespannt, so ist:

1) Die Horizontalspannung H an allen Stellen eine und dieselbe;

2) die Summe der Vertikalspannungen an beiden Enden gleich der Summe der sämmtlichen Gewichte; und

3) die Vertikalspannung an jedem Punkte gleich der Vertikalspannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüber hängenden Gewichte.

Fig. 179.



4) Die Richtungen der einzelnen Seilstücke ergeben sich durch Anwendung folgender Formeln:

Ist G das am untersten Knoten K_1 hängende Gewicht und sind α_1 und β_1 die Neigungswinkel der diesen Knoten bildenden Seilstücke $K_1\,K_2$ und $K_1\,K_4$ gegen den Horizont, so hat man die Spannungen dieser Stücke:

$S_1 = \frac{G\,cos.\,\beta_1}{sin.(\alpha_1 + \beta_1}$ und $S_4 = \frac{G\,cos.\,\alpha_1}{sin.(\alpha_1 + \beta_1}$, ferner die Vertikalspannungen derselben:

$$V_1 = G_1 = S_1\ sin.\,\alpha_1 = \frac{G\,sin.\,\alpha_1\,cos.\,\beta_1}{sin.\,(\alpha_1 + \beta_1)} \text{ und}$$

$$V_4 = G_4 = S_2\ sin.\ \beta_1 = \frac{G\,sin.\,\beta_1\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,(\alpha_1 + \beta_1)},$$ und die Horizontalspannung:

$$H = S_1\ cos.\ \alpha_1 = S_2\ cos.\ \beta_1 = \frac{G\,cos.\,\alpha_1\,cos.\,\beta_1}{sin.\,(\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Hängt nun im Knoten K_2 ein Gewicht G_2, so ist die Vertikalspannung des Seilstückes $K_2 K_3$:

$$V_2 = G_1 + G_2$$

und für den Neigungswinkel α_2 desselben:

$$tang.\ \alpha_2 = \frac{G_1 + G_2}{H} = tang.\ \alpha_1 + \frac{G_2}{H}.$$

Hängt ferner im Knoten K_3 das Gewicht G_3, so ist die Vertikalspannung des Seilstückes $K_3 A$:

$$V_3 = G_1 + G_2 + G_3$$

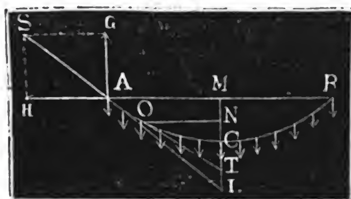
und für den Neigungswinkel α_3 desselben gegen den Horizont:

$$tang.\ \alpha_3 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} = tang.\ \alpha_1 + \frac{G_2 + G_3}{H} = tg.\alpha_2 + \frac{G_3}{H}.$$

§. 11. Kettenlinie.

Hängen an einem vollkommen biegsamen und gewichtlosen Seile ACB, Fig. 180, lauter gleiche Gewichte in gleichen Horizontalabständen und in sehr großer Anzahl, so bildet dasselbe eine Parabel. Ist a die Bogenhöhe CM und b die entsprechende halbe Spannweite AM, so hat man für den Neigungswinkel $MAL = \alpha$ des Seilendes A gegen den Horizont: $tang.\ a = \frac{2a}{b}$, und ist noch G die Summe der am Seilstücke AC hängenden Gewichte, so hat man die Vertikalspannung in A, $V = G$, die Horizontalspannung $H = G\ cotg.\alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{G}{2}$, und die Mittelspannung $S = \frac{G}{sin.\alpha} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{G}{2}$.

Fig. 180.



Ist ferner die Abscisse CN eines andern Punktes O, $= x$, so hat man die Ordinate NO desselben:

$y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, und für den Neigungswinkel $NOT = \varphi$,

$tang.\, \varphi = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{a\,x}}{b}$.

Wird eine Kette durch ihr Gewicht allein gespannt, so läßt sich die von ihr gebildete Kettenlinie nur dann als Parabel behandeln, wenn ihre Spannhöhe sehr klein, also

b sehr groß gegen *a*, oder
H » » » *G* ist.

Die **gemeine Kettenlinie** wird gebildet, wenn gleich lange Stücke gleich schwer sind. Von ihr soll auch nur die Rede sein. Wiegt jedes Stück von der Länge 1 (Fuß) $= \gamma$, so hat das Kettenstück CA, dessen Länge $= l$ sein mag, das Gewicht $G = l\gamma$, und eben so groß ist auch die Vertikalspannung in A. In einem anderen Punkte O, unter dem das Kettenstück OC von der Länge s hängt, ist die Vertikalspannung $V = s\gamma$.

Die Horizontalspannung H läßt sich $= c\gamma$ setzen, wenn c die Länge eines Kettenstückes ist, dessen Gewicht der H gleichkommt. Hiernach ist für den Neigungswinkel der Kettenlinie in A:

$$tang.\, \alpha = \frac{G}{H} = \frac{l}{c}, \text{ und in } O:$$

$$tang.\, \varphi = \frac{V}{H} = \frac{s}{c}.$$

Sind $CN = x$ und $NO = y$ die zusammengehörigen und dem Bogen $CO = s$ entsprechenden Coordinaten der Kettenlinie, so hat man:

1) $s = \sqrt{2cx + x^2}$, also umgekehrt $x = \sqrt{c^2 + s^2} - c$

und $c = \frac{s^2 - x^2}{2x}$.

2) $s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right)$, umgekehrt

$$y = c\; log.\, nat. \left(\frac{s + \sqrt{c^2 + s^2}}{c}\right),$$

wobei $e = 2{,}71828$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

3) $y = c \; log. \; nat. \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right)$, umgekehrt

$$x = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - c,$$

4) $y = \frac{s^2 - x^2}{2x} \; log. \; nat. \left(\frac{s + x}{s - x}\right)$.

Für stark gespannte Ketten gelten annähernd und noch genauer als die Gleichungen der Parabel, folgende Gleichungen:

$$y = \left(1 - \frac{x}{12c}\right)\sqrt{2cx},$$

$$s = \left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right] y \text{ und}$$

$$tang. \; \varphi = \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\frac{2x}{y}.$$

Um weitläufige Rechnungen zu umgehen, bedient man sich mit großem Vortheile folgender für den Parameter $c = 1$ construirten Tabelle. Wie dieselbe zu gebrauchen ist, werden folgende Beispiele vor Augen führen.

1) Für die Spann- oder Bogenhöhe $a = 12$ Fuß und halbe Spannweite $b = 50$ Fuß also $\frac{b}{a} = \frac{50}{12} = 4{,}166..$ findet man, wenn man hierzu die nächste Zahl in der fünften Columne aufsucht und von da aus horizontal zurückgeht, den Aufhängewinkel α nahe $= 26^0$, und wenn man interpolirt, genauer $\varphi = 26^0 + \frac{4{,}176 - 4{,}167}{4{,}176 - 3{,}843}(28^0 - 26^0)$ $= 26^0 + \frac{9.2^0}{333} = 26^0{,}3'$. Ferner folgt durch eine Proportion aus den Werthen in der dritten und vierten Columne die Bogenlänge annähernd $l = \frac{0{,}48773}{0{,}47021} \,.\, b = \frac{24{,}3865}{0{,}47021}$ $= 51{,}863$ Fuß.

Wäre $\alpha = 28^0$, so würde $l = \frac{53171}{50940} . 50 = 52,190$ Fß., also um $52,190 - 51,863 = 0,327$ größer ausfallen; da wir aber α nur 3 Minuten über 26^0 haben, so ist auch l nur um $\frac{0,327.3}{120} = 0,008$ größer, also $l = 51,871$ Fuß zu setzen. Wäre das Gewicht von dem laufenden Fuß der Kette $\gamma = 3$ Pfund, also das ganze Kettengewicht $G = 3 . 51,871 = 155,61$ Pfund, so würde die Horizontalspannung der Kette $= G\, cotg. \alpha = 155,61 . cotg. 26^0,3'$ $= 318,34$ Pfund, und die ganze Kettenspannung im Aufhängepunkte $S = \frac{G}{sin. \alpha} = \frac{155,61}{sin. 26^0,3'} = 354,34$ Pfd. betragen.

2) Welche Gestalt bildet die Kette, von welcher die eine Hälfte die Länge $l = 60$ Fuß und das Gewicht $G = 480$ Pfund hat und an ihrem Ende mit der Kraft $S = 2000$ Pfund gespannt wird. Hier folgt sogleich

$sin. \alpha = \frac{G}{S} = \frac{480}{2000} = 0,24$, daher $\alpha = 13^0, 53'$.

Nun gibt die Tabelle, wenn man 13^0 und 14^0 in ihrer ersten Columne aufsucht und horizontal herübergeht:

$a = 0,02630$, $b = 0,22887$ und $l = 0,23087$,
und $a = 0,03061$, $b = 0,24681$ und $l = 0,24933$,

es ist daher nach bekannten Regeln hier:

$a = \frac{2630}{23087} . 60 = 6,835$, $b = \frac{22887 . 60}{23087} = 59,479$ Fuß,

$a = \frac{3061 . 60}{24933} = 7,366$, $b = \frac{24681 . 60}{24933} = 59,394$ Fuß.

Durch Interpolation folgt nun:

$a = 7,366 - \frac{7}{60} . 0,531 = 7,304$ und
$b = 59,394 + \frac{7}{60} . 0,085 = 59,384$ Fuß.

Die Horizontalspannung ist $H = \sqrt{S^2 - G^2} = 1941,6$ Pfd.

Tafel.

Die Hauptverhältnisse der Kettenlinie für den Parameter $c = 1$ angebend.

Aufhängewinkel α^0.	Spannhöhe a.	Halbe Spannweite b.	Bogenlänge l.	Verhältniß $\frac{b}{a}$.	Verhältniß $\frac{l}{b}$.
1°	0,00015	0,01745	0,01745	114,586	1,0000
2	0,00061	0,03491	0,03492	57,279	1,0002
3	0,00137	0,05238	0,05241	38,171	1,0005
4	0,00244	0,06987	0,06993	28,613	1,0008
5	0,00382	0,08738	0,08749	22,874	1,0013
6	0,00551	0,10491	0,10510	19,046	1,0018
7	0,00751	0,12248	0,12278	16,309	1,0025
8	0,00983	0,14008	0,14054	14,254	1,0033
9	0,01247	0,15773	0,15838	12,654	1,0041
10	0,01543	0,17542	0,17633	11,372	1,0052
11	0,01872	0,19318	0,19438	10,820	1,0062
12	0,02234	0,21099	0,21256	9,444	1,0073
13	0,02630	0,22887	0,23087	8,701	1,0088
14	0,03061	0,24681	0,24933	8,060	1,0102
15	0,03528	0,26484	0,26795	7,508	1,0117
16	0,04030	0,28296	0,28675	7,021	1,0134
17	0,04569	0,30116	0,30573	6,591	1,0152
18	0,05146	0,31946	0,32492	6,208	1,0171
19	0,05762	0,33786	0,34433	5,863	1,0192
20	0,06418	0,35637	0,36397	5,553	1,0213
22	0,07853	0,39376	0,40403	5,014	1,0261
24	0,09484	0,43169	0,44523	4,562	1,0314
26	0,11260	0,47021	0,48773	4,176	1,0372
28	0,13257	0,50940	0,53171	3,843	1,0438
30	0,15470	0,54930	0,57735	3,551	1,0511
36	0,22078	0,65284	0,70021	2,957	1,0725
40	0,30540	0,76291	0,83910	2,498	1,0999
45	0,41421	0,88137	1,00000	2,128	1,1346
50	0,55573	1,01068	1,19175	1,819	1,1792
60	1,00000	1,31690	1,73210	1,317	1,3153

§. 12. Rollen und Radwelle.

Bei der festen Rolle ACB, Fig. 181, ist die Kraft P gleich der Last Q, und der Zapfendruck $R = 2 P cos. \frac{\alpha}{2}$, wenn α den Winkel bezeichnet, unter dem die Seilrichtungen zusammenstoßen, und der den mit Seil bedeckten Bogen zu 180° ergänzt.

Fig. 181.

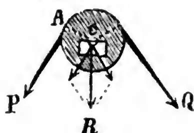
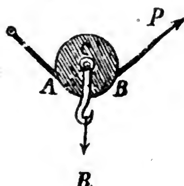


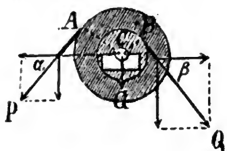
Fig. 182.



Für die lose Rolle ACB, Fig. 182, ist $\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$, d. i. es verhält sich die Kraft P zur Last R, wie der Halbmesser $CA = r$ der Rolle zu der mit Seil bedeckten Sehne AB. Sind die Seile parallel, so hat man $a = 2r$, daher $P = \frac{1}{2} R$, dagegen aber auch den Weg von $R = \frac{1}{2}$ des Weges von P.

Bei einer Radwelle ACB, Fig. 183, ist, wie beim Hebel $Pa = Qb$, oder $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$, d. i. es verhält sich die Kraft

Fig. 183.



P zur Last Q umgekehrt wie der Hebelarm $CA = a$ der Kraft zum Hebelarme $CB = b$ der Last.

Ist G das Gewicht der Maschine, α der Winkel, um welchen die Kraft P, und β der Winkel, um welchen die Last Q vom Horizonte abweicht, so hat man den Vertikaldruck, welchen beide Zapfen zusammen auszuhalten haben:

$$V = G + P \sin. \alpha + Q \sin. \beta.$$

Die Wirkungen der Horizontaldrücke $P \cos. \alpha$ und $Q \cos. \beta$ auf die Zapfen sind nach der Theorie des zusammengesetzten Hebels zu berechnen. Liegen die Richtungen von P und Q nahe in einer und derselben Ebene, so kann man den Horizontaldruck auf beide Zapfen zusammen $= P \cos. \alpha - Q \cos. \beta$ setzen.

§. 13. Die gleitende Reibung.

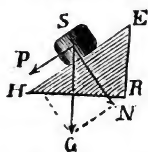
Die Reibung ist dem Drucke proportional und unabhängig von der Geschwindigkeit und von der Ausdehnung der Berührungsflächen. Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gleitende und größer als die wälzende Reibung. Die Reibung der Ruhe ist größer als die der Bewegung.

Aus dem Normaldrucke N eines Körpers gegen seine Stütze und aus dem Reibungscoefficienten φ folgt die Größe der Reibung, oder der Kraft, mit welcher dieselbe jeder Bewegung entgegenwirkt: $F = \varphi N$.

Ist s der relative Weg des Körpers auf seiner Stützfläche, so hat man die zur Zurücklegung dieses Weges zu verwendende Arbeit: $L = \varphi N s$.

Bei einem Körper S auf einer schiefen Ebene EH, Fig. 184, deren Neigungswinkel $EHR = \alpha$ ist, fällt demnach die Reibung $F = \varphi N = \varphi G \cos. \alpha$ aus; es ist daher das Bestreben zum Herabgleiten:

Fig. 184.



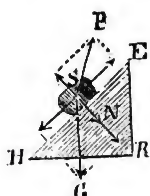
$$P = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) G,$$

und dasselbe Null für $\tang. \alpha = \varphi$.

Der Winkel, welcher durch die letzte Gleichung bestimmt ist, dessen Tangente also dem Reibungscoefficienten gleich kommt, wird der Reibungs- oder Ruhewinkel genannt. So lange die Richtung einer Kraft um einen Winkel von der Normalen der Stützfläche abweicht, welcher noch nicht den Reibungswinkel übertrifft, so lange wird auch die Kraft von der Stützfläche vollkommen aufgenommen.

Die Reibung ist eine passive Kraft, kann nur Be-
gung mäßigen und verhindern, aber nicht beschleunigen o
erzeugen. Deshalb wirkt sie auch nur hindernd, wenn
darauf ankommt, Bewegung zu erzeugen, dagegen förder
wenn es darauf ankommt, Bewegung zu verhindern.

Fig. 185.



Damit eine Kraft *P* das Her-
gleiten eines Körpers *G* von der sch-
fen Ebene *EH*, Fig. 185, verhinde
muß sein:

$$P = \left(\frac{sin.\,\alpha - \varphi\ cos.\,\alpha}{cos.\,\beta - \varphi\ sin.\,\beta}\right) G, \text{ od}$$

wenn ϱ den Reibungswinkel bezeichn

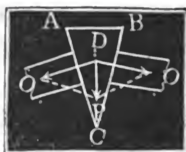
$$P = \frac{sin.\ (\alpha - \varrho)}{cos.\ (\beta + \varrho)} G, \text{ (vgl. §. 9}$$

Damit sie hingegen das Aufsteige
des Körpers auf der Ebene hervorbringe, muß sein:

$$P = \left(\frac{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}{cos.\,\beta + \varphi\ sin.\,\beta}\right) G = \frac{sin.\ (\alpha + \varrho)}{cos.\ (\beta - \varrho)}\ G.$$

Wirkt die Kraft horizontal, so ist $\beta = -\alpha$, daher im
ersten Falle: $P = G\ tang.\ (\alpha - \varrho)$
und im zweiten: $P = G\,tang.\ (\alpha + \varrho)$.

Fig. 186.



Für den Keil, Fig. 186, ist mit
Berücksichtigung der Reibung an den
Seitenflächen:

$$P = 2\ Q\ (sin.\ {}^1\!/_2\,\alpha + \varphi\ cos.\,{}^1\!/_2\ \alpha)$$

(vergl. §. 9).

Anmerkung zu folgender Tabelle. Es bedeutet
(=), daß die Bewegung in der Richtung der Fasern beider
Körper, (+), daß sie rechtwinkelig gegen die Fasern des
gleitenden Körpers erfolge, und (⊥), daß sich Hirnholz auf
Langholz in der Faserrichtung des letzteren bewege.

Coefficienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche. (Schmiere)	Reibungscoefficient für die Ruhe	Reibungscoefficient für die Bewegung.
Eiche auf Eiche	(=)	trocken	0,62	0,48
	(=)	trockene Seife	0,44	0,16
	(+)	trocken	0,54	0,34
	(+)	mit Wasser benetzt	0,71	0,25
	(⊥)	trocken	0,43	0,19
Esche, Tanne, Buche, Vogelbeer auf Eiche	(=)	desgl.	0,53	0,38
Rindsleder auf Eiche	flach	desgl.	0,61	0,51
	hochkantig	desgl.	0,43	0,33
	hochkantig	mit Wasser benetzt	0,79	0,29
Schwarz zugerichtetes Leder (Riemen)	(=)	trocken	0,74	0,27
Hanfgurte auf Eiche	(=)	desgl.	0,64	0,52
Hanfseil auf Eiche	(=)	desgl.	0,80	0,52
Schmiedeeisen auf Eiche	(=)	mit Wasser benetzt	0,65	0,26
	(=)	Talg	0,11	0,08
Gußeisen auf Eiche	(=)	trocken	—	0,49
		mit Wasser benetzt	0,65	0,22
		trockene Seife	—	0,19
Messing auf Eiche	(=)	trocken	0,62	—
Rindsleder als Kolbenliderung auf Gußeisen	(flach)	mit Wasser benetzt	0,62	—
		mit Oel, Seife od. Schweinefett	0,12	—

Coefficienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche (Schmiere).	Reibungscoefficient für die Ruhe	Reibungscoefficient für die Bewegung.
Lederne Riemen auf gußeisernen Rollen	(flach)	trocken	0,28	—
		mit Wasser benetzt	0,38	—
Gußeisen auf Gußeisen	. .	etwas fettig	0,16	0,15
	. .	mit Wasser benetzt	—	0,31
Schmiedeeisen auf Gußeisen	. .	trocken	0,19	0,18
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	. .	desgl.	0,13	—
Gußeisen auf Bronze	. .	desgl.	—	0,15
Schmiedeeisen auf Bronze	. .	desgl.	—	0,17
Bronze auf Bronze	. .	desgl.	—	0,20
Bronze auf Gußeisen	. .	desgl.	—	0,21
Bronze auf Schmiedeeisen	. .	etwas fettig	—	0,16
Eiche, Ulme, Weißbuche, wilder Birnbaum, Gußeisen, Schmiedeeisen, Stahl und Bronze, gleitend auf einander u. auf sich selbst	(=)	auf gewöhnliche Art geschmiert mit Talg, Schweinefett, Oel, Wagenschmiere ꝛc.	0,11	0,075
		blos fettig	—	0,15
Rogenstein auf Rogenstein	. .	ohne Schmiere	0,74	0,64
Muschelkalk auf Rogenstein	. .	desgl.	0,75	0,67

Coefficienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche (Schmiere).	Reibungscoefficient für die Ruhe	Reibungscoefficient für die Bewegung.
Ziegelstein auf Rogenstein	. .	ohne Schmiere	0,67	0,65
Eiche auf Rogenstein	(⊥)	desgl.	0,63	0,38
Schmiedeeisen auf Rogenstein	parallel	desgl.	0,49	0,69
Muschelkalk auf Muschelkalk	. .	. . .	0,70	0,38
Rogenstein auf Muschelkalk	. .	. . .	0,75	0,65
Ziegelstein auf Muschelkalk	. .	. . .	0,67	0,60
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	. .	. . .	0,42	0,24
Eiche auf Muschelkalk	(⊥)	. . .	0,64	0,38
Rogenstein auf Rogenstein	. .	Mit Mörtel aus drei Theilen feinen Sand und einem Theile hydraulischen Kalk	0,74	—

Beispiel. Welche Kraft ist nöthig, um einen belasteten Schlitten von 500 Pfund Gewicht auf einer Holzbahn von 32° Neigung hinaufzuziehen? Es ist hier im ungeschmierten Zustande der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}4$ zu setzen, weshalb die nöthige Kraft folgt:

$P = (sin.32^0 + 0{,}4 \,.\, cos.32^0) \,.\, 500 = (0{,}530 + 0{,}4 \,.\, 0{,}848) \,.\, 500$
$= 0{,}869 \,.\, 500 = 434{,}5$ Pfund.

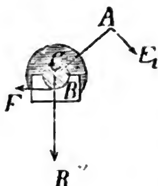
Käme es darauf an, den Schlitten herabzulassen, so würde der nöthige Widerstand sein:
$P = (sin. 32^0 - 0{,}4\, cos. 32^0) . 500 = 0{,}191 . 500 = 95{,}5$ Pfd.

Wäre die Länge der schiefen Ebene 60 Fuß, so wäre die aufzuwendende Arbeit im ersten Falle = 60 . 434,5 = 26070 Fußpfund, und im zweiten
= 60 . 95,5 = 5730 Fußpfund.

§. 14. Die Zapfenreibung.

Die Reibung F eines Zapfens CB, Fig. 187, in einem ausgelaufenen Lager ist kleiner als in einem neuen, genau anschließenden Lager und auch kleiner in einem runden, als in einem Lager mit ebenen Flächen. Ist r der Zapfenhalbmesser CB, so hat man das dem Zapfendrucke R entsprechende Moment der Zapfenreibung $Fr = \varphi R r$, und wirkt die Kraft an einem Hebelarme, $CA = a$, so ist die auf den Kraftpunkt reducirte Reibung, oder die zur Ueberwindung der Zapfenreibung nöthige Kraft:

Fig. 187.



$$F_1 = \frac{r}{a} F = \frac{r}{a} \varphi R.$$

Ist die Umdrehungszahl des Zapfens pr. Min. = u, so hat man die Geschwindigkeit der Reibung $v = \frac{\pi u r}{30}$, daher die Arbeit der Reibung pr. Sec.:

$$F v = \frac{\pi u \varphi R r}{30} = 0{,}105\, u \varphi R r.$$

Durch Anwendung von Frictionsrädern wird u und folglich auch die Arbeit der Reibung herabgezogen. Zur Erleichterung der Rechnung kann man für den Zapfendruck einen Näherungswerth einsetzen. Besteht R aus den rechtwinkeligen Componenten V und H, ist also $R = \sqrt{V^2 + H^2}$, und $V > H$, so kann man setzen, nach Poncelet:

$R = 0{,}96\ V + 0{,}40\ H$, und hierbei höchstens um 4 Procent fehlen.

Ist H nicht über 0,2 V, so kann man nach dem Verfasser setzen: $R = V$, und ist H über 0,2 V und unter V, so ist $R = 0{,}89\ V + 0{,}49\ H$, und der größte Fehler ist dann nur 2 Procent.

Coefficienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird	
		auf gewöhnliche Art.	ununterbrochen.
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07 bis 0,08	0,054
	mit denselben Schmieren naß	0,08	»
	mit Asphalt	0,054	»
	fettig	0,14	»
	fettig und naß	0,14	»
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07 bis 0,08	0,054
	fettig	0,16	»
	fettig und naß	0,16	»
	sehr wenig fettig	0,19	»
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Franzosenholz (Guajak)	ohne Schmiere	0,18	»
	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	»	0,090
	fettig von Oel oder Schweinefett	0,10	»
	fettig von Schweinefett und Graphit	0,14	»

Coefficienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird	
		auf gewöhnliche Art.	ununterbrochen.
Zapfen von Schmiedeeisen auf gußeisernen Lagern	geschmiert mit Olivenöl, Talg, Schweinefett oder Schweinefett und Graphit	0,07 bis 0,08	0,054
Zapfen von Schmiedeeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett oder Talg	0,07 bis 0,08	»
	geschmiert mit fester Wagenschmiere	0,09	»
	fett und naß	0,19	»
	sehr wenig fett	0,25	»
Schmiedeeiserne Zapfen auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	0,11	»
	blos fettig	0,19	»
Zapfen von Bronze auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Oel	0,10	»
	geschmiert mit Schweinefett	0,09	»
Zapfen von Bronze auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Oel oder Talg	0,09	0,045 bis 0,052
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern v. Gußeisen	geschmiert mit Schweinefett	0,12	»
	blos fettig	0,15	»
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert mit Schweinefett	»	0,07

Bei Stiften oder stehenden Zapfen (an Turbinen, Göpeln u. s. w.), welche sich an ihrer ebenen zugespitzten oder abgerundeten Basis reiben, sind die Coefficienten der gleitenden Reibung einzuführen.

Das Reibungsmoment ist für den Zapfen mit ebener Basis $= \frac{2}{3} r \cdot \varphi R$, mit zugespitzter Basis $= \frac{2}{3} r \frac{\varphi R}{sin.\,\alpha}$, 2α die Zuspitzungswinkel ADB und r den Halbmesser CA, Fig. 188, bezeichnend; mit abgerundeter Basis

Fig. 188.

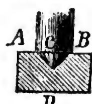
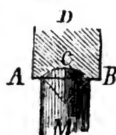


Fig. 189.



$= \frac{2}{3}\left[1 + 0{,}3\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] \varphi R r$, wenn r_1 den Abrundungshalbmesser MA, r aber den Zapfenhalbmesser CA, Fig. 189, bezeichnet.

Beispiel. Welche Arbeit consumirt die Reibung am Stifte einer Turbine, welche 1500 Pfund wiegt, und pr. Minute 100 Umdrehungen macht, wenn der Halbmesser des Stiftes 1 Zoll mißt und die Basis desselben mit einem Radius von 4 Zoll abgerundet ist? Der Reibungscoefficient ist hier = 0,075, folglich die Reibung = 0,075 . 1500 = 112,5 Pfund; der Reibungshalbmesser ist

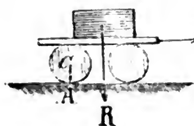
$$= \frac{2}{3}\left[1 + 0{,}3\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] r = \frac{2}{3\,.\,12}(1 + 0{,}3\,.\,\tfrac{1}{16}) = \frac{1{,}019}{18}$$

= 0,0566 Fuß, folglich die Geschwindigkeit der Reibung $v = 0{,}105\ .\ 100\ .\ 0{,}0566 = 0{,}594$ Fuß, und endlich die Arbeit, welche die Reibung an diesem Stifte pr. Secunde verzehrt wird, $Fv = 112{,}5\ .\ 0{,}594 = 66{,}8$ Fußpfund $= \frac{66{,}8}{510} = 0{,}13$ Pferdekräfte.

Die wälzende Reibung zwischen glatten Körpern von Metall, Holz oder Steinen ist so klein, daß sie in Ansehung der Zapfen- und gleitenden Reibung unbeachtet gelassen werden kann. Man setzt sie dem Drucke R direkt und dem Wal-

zenhalbmesser $CA = r$, Fig 190, umgekehrt proportional. Gibt man r in Zollen, so kann man für hölzerne und eiserne Walzen die Reibung $F = 0{,}02 \frac{R}{r}$ bis $0{,}03 \frac{R}{r}$, in dem abgebildeten Falle aber, wo sich jede Walze doppelt, nämlich oben und unten reibt, $F = 0{,}04 \frac{R}{r}$ bis $0{,}06 \frac{R}{r}$ setzen.

Fig. 190.



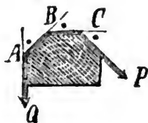
§. 15. Reibung der Seile und Ketten.

Wird ein gespanntes Seil um ein festliegendes Prisma ABC, Fig. 191, gelegt, so ist das Verhältniß der Kraft P zur Last Q bestimmt durch die Gleichung:

$$P = \left[\left(1 + 2\varphi sin. \frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] Q,$$

wobei n die Anzahl und α die Größe der Ablenkungswinkel bezeichnet. Dieselbe Formel gilt auch für den Fall, wenn sich eine Kette um einen Cylinder legt, wobei aber α den Ablenkungswinkel an jedem Kettengliede bezeichnet, der aus der Länge l eines Kettengliedes und aus dem Halbmesser r des Cylinders durch die Formel $sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$ bestimmt wird.

Fig. 191.



Für ein um einen festliegenden Cylinder liegendes Seil ADB, Fig. 192, ist, wenn β den mit Seil bedeckten Bogen für den Halbmesser 1 bezeichnet:

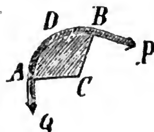
$$P = e^{\varphi\beta} Q,\ Q = \frac{P}{e^{\varphi\beta}},$$

wo $e = 2{,}71828$ ist, umgekehrt:

$$\beta = \frac{1}{\varphi} \cdot log.\ nat. \left(\frac{P}{Q}\right)$$

$$= \frac{2{,}3026}{\varphi} (log.\ P - log.\ Q).$$

Fig. 192.



Nimmt man $\varphi = \frac{1}{3}$, so ist für:

$\beta = \frac{\pi}{2}$,	oder =	¼	Umwickelung	$P = 1{,}69\ Q$,
$= \pi$	oder	½	»	$P = 2{,}85\ Q$,
$= 2\pi$	oder	1	»	$P = 8{,}12\ Q$,
$= 4\pi$	oder	2	»	$P = 65{,}94\ Q$.

Kommt es darauf an, die Bewegung zu verhindern, oder die Beschleunigung aufzuheben, so hat man Q als Kraft und P als Last anzusehen.

Wird eine gespannte Kette um eine um ihre Axe drehbare Trommel oder Scheibe gelegt, so hat man die auf den Kraftpunkt reducirte Kettengliederreibung: $F = \varphi \frac{r}{a} Q$, wenn r den Halbmesser der Kettenglieder oder Kettenbolzen, a aber den Halbmesser der Trommel bezeichnet.

Findet bloß ein Auf- oder ein Abwickeln Statt, so ist hiernach die Kraft $P = \left(1 + \varphi \frac{r}{a}\right) Q$, findet aber beides zugleich Statt, so hat man $P = \left(1 + \varphi \frac{r}{a}\right)^2 Q$, annähernd $= \left(1 + 2\varphi \frac{r}{a}\right) Q$, wozu aber noch die auf den Kraftpunkt reducirte Zapfenreibung kommt.

§. 16. Steifigkeit der Seile.

Der Steifigkeitswiderstand der Seile, oder die Kraft, welche nöthig ist, um ein Seil über Scheiben oder Trommeln zu wickeln, hängt vorzüglich von der Spannung Q des Seiles, von der Art und der Stärke d des Seiles und von dem Scheibenhalbmesser a ab. Nach den Versuchen von Coulomb ist dieser Widerstand zu setzen, für neue Kloben- und Haspelseile aus Hanf, und bei Zugrundelegung des Pfund- und Zollmaaßes:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a} (14,23 + 0,295\ Q),$$ und für gebrauchte:

$$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a} (6,83 + 0,141\ Q).$$

Bei gepichten Seilen ist diese Kraft im Mittel noch um ein Sechstel, und bei nassen Seilen ist sie im Mittel ein Zwölftel größer.

In der Praxis kann man von folgenden Tabellen Gebrauch machen.

I. Steifigkeit neuer Seile für den Rollenhalbmesser $a = 1$ Zoll.

Seilstärke d in Viertelzollen.	Seilspannung Q in Pfunden.										
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	1	4	7	10	13	15	18	21	24	26	29
2	4	13	23	32	41	50	59	68	77	86	95
3	9	28	45	63	81	99	117	135	153	171	190
4	14	44	73	103	132	162	191	221	250	280	309
5	21	64	107	150	193	236	279	322	366	409	452
6	28	87	146	205	263	322	381	440	498	547	777

II. Steifigkeit gebrauchter Seile für den Rollenhalbmesser $a = 1$ Zoll.

Seilstärke d in Viertelzollen.	Seilspannung Q in Pfunden.										
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	3	8	13	19	24	29	35	40	45	51	56
3	5	14	23	33	42	52	61	71	80	89	99
4	7	21	35	49	63	77	91	105	120	134	148
5	9	29	48	67	86	96	125	144	164	183	202
6	11	37	62	87	111	136	161	186	212	236	261

Für Drahtseile kann man nach des Verfassers Versuchen setzen:

$$S = K + \frac{\alpha Q}{a},$$

wo K und α Erfahrungsconstanten bezeichnen.

Für ein Seil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von 1½ Linien Dicke bestand und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde $S = 1{,}04 + 0{,}0208 \frac{Q}{a}$ Pfund gefunden.

Hiernach ist folgende, für den praktischen Gebrauch nützliche Tabelle berechnet worden:

III. Steifigkeitswiderstände eines Drahtseiles.

Rollenhalbmesser a	Seilspannung Q Pfund.						
	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
12 Zoll.	1,0	4,6	8,2	11,7	15,3	18,9	22,4
24 »	1,0	2,8	4,6	6,4	8,2	10,0	11,7
36 »	1,0	2,2	3,4	4,6	5,8	7,0	8,2

Beispiele. 1) Welche Kraft ist nöthig, um eine Last $Q = 900$ Pfund mittels eines um eine feste Rolle liegenden Seiles zu heben, wenn der Halbmesser der Rolle $a = 3$ Zoll und die Stärke des Seiles $d = \frac{1}{2}$ Zoll beträgt. Nach Tafel II. ist für $d = \frac{2}{4}$ und $a = 1$, $S = 51$ Pfund; da aber hier $a = 3$ ist, so hat man $S = \frac{51}{a} = \frac{51}{3} = 17$ Pfund und daher die Kraft $P = Q + S = 917$ Pfund zu setzen, wobei jedoch die Zapfenreibung noch außer Acht gelassen ist.

2) Welchen Widerstand verursacht das Umlegen eines mit 2000 Pfund Kraft gespannten Drahtseiles um eine

Seilscheibe von 4 Fuß Durchmesser? Nach der letzten Tabelle III. ist für $a = 2$ Fuß $= 24$ Zoll und $Q = 2000$ Pfd., $S = 8{,}2$ Pfund.

§. 17. Absolute Elasticität und Festigkeit.

Der Elasticitätsmodul E ist diejenige Kraft, welche einen prismatischen Körper von 1 Quadratzoll Querschnitt um seine anfängliche Länge ausdehnt oder zusammendrückt. Ist P die ausdehnende oder zusammendrückende Kraft, F der Querschnitt und l die Länge des Körpers, λ aber die durch diese Kraft bewirkte Verlängerung oder Verkürzung des Körpers, so hat man:

$$1)\quad P = \frac{\lambda}{l} FE, \quad 2)\ \lambda = \frac{P}{FE}\, l.$$

Die Leistung oder das Arbeitsquantum, welches der Ausdehnung λ entspricht, ist

$$3)\quad L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2 l}{2FE}.$$

Der Tragmodul T ist diejenige Kraft, welche den Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt oder zusammendrückt, der Festigkeitsmodul K aber diejenige, welche ein Zerreißen oder Zerdrücken des Körpers hervorbringt. Für den Querschnitt F des Körpers hat man die Tragkraft:

$$P = FT, \text{ umgekehrt } F = \frac{P}{T},$$

die Kraft zum Zerreißen:

$$P_1 = FK, \text{ umgekehrt } F = \frac{P_1}{K}.$$

Um auf die Dauer vor dem Zerreißen gesichert zu sein, bestimmt man die Querschnitte der Körper nach dem Tragmodul, oder führt statt K nur $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ des Werthes, oder einen sogenannten Sicherheitsmodul ein.

Die Modul der absoluten Elasticität und Festigkeit.

Namen der Körper.	Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze $\frac{\lambda}{l}$.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul T.	Festigkeitsmodul K.	Sicherheitsmodul K_1.
Buchen-, Eichen-, Fichten-, Kiefern- und Tannenholz .	$1/600$	1800000	3000	12000	1200
Eisen in Drähten	$1/1250$	26000000	21000	85000	14000
Eisen in Stäben	$1/1520$	29000000	20000	58000	10000
Eisen in Blech	—	26000000	—	55000	9000
Gußeisen . . .	$1/1200$	17000000	14000	19000	3000
Stahl	$1/885$	30000000	36000	120000	20000
Gehärteter Gußstahl . .	$1/4500$	44000000	96000	146000	24000
Kupfer	—	—	—	35000	6000
Kupferdraht .	—	—	—	73000	12000
Messing	$1/1320$	95000000	7000	18000	3000
Messingdraht.	$1/742$	145000000	20000	73000	12000
Glockengut . .	$1/1590$	47000000	30000	34000	5600
Blei	$1/477$	700000	1500	1900	320
Bleidraht . . .	$1/1500$	1000000	700	2000	340
Marmor . . .	—	2600000	—	2000	200
Hanfseile: unter 1 Zoll dick	—	—	—	9000	3000
1—3 » »	—	—	—	7000	2300
über 3 » »	—	—	—	5000	1700
Riemen	—	—	—	—	290

Beispiele. 1) Welche Last kann ein Drahtseil tragen, welches aus 16 Drähten von 1½ Linie Dicke besteht, wenn 6fache Sicherheit vorausgesetzt wird. Es ist hier

$F = \frac{16}{144} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{144}$ Quadr.-Zoll, und nimmt man aus der Tabelle $K_1 = 14000$ Pfund, so erhält man

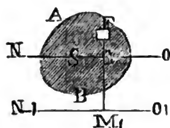
$$P = \frac{9.\pi}{144}\ 14000 = 2750 \text{ Pfund.}$$

2) Welchen Querschnitt muß ein eisernes Gestänge erhalten, das bei 1000 Fuß Länge eine Last von 75000 Pfd. zu tragen hat? Nehmen wir hier $K_1 = 10000$, und setzen wir das Gewicht von einem Cubikzoll Schmiedeeisen 0,29 Pfund, so erhalten wir $75000 + 12 \,.\, 1000 \,.\, 0{,}29\ F = 10000\ F$, daher $F = \frac{75000}{10000-3480} = \frac{7500}{652} = 11{,}5$ Quadratzoll. Die Verlängerung, welche dieses Gestänge durch die Last $P = 75000$ Pfund erleidet, ist, da der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens $E = 29000000$ Pfund beträgt, $\lambda = \frac{Pl}{FE} = \frac{75000 \,.\, 12000}{29000000 \,.\, 11{,}5} = \frac{900}{29 \,.\, 11{,}5} = \frac{900}{333{,}5}$ $= 2{,}70$ Zoll. Wegen des Gestänggewichtes fällt aber diese Verlängerung noch um $\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Gl}{FE} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{0{,}29\ F\ l^2}{FE}$ $= \frac{1}{2} \,.\, 0{,}29 \cdot \frac{12000^2}{29000000} = 0{,}145 \,.\, \frac{144}{29} = 0{,}72$ Zoll größer, im Ganzen also 3,42 Zoll aus.

§. 18. Relative Elasticität.

Das Biegungsmoment eines prismatischen Balkens wird gemessen durch das Aggregat

Fig. 193.

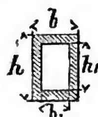


$W = F_1 z_1{}^2 + F_2 z_2{}^2 + F_3 z_3{}^2 + \ldots,$
wo $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die Theile seines Querschnittes $AB = F$, Fig. 193, und z_1, z_2, z_3 u. s. w. die Abstände $FM \ldots$ derselben von der durch den

Schwerpunkt S der ganzen Fläche gehenden neutralen Axe NO bezeichnen.

Für ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h ist $W = \frac{b h^3}{12}$; für ein Dreieck: $W = \frac{b h^3}{36}$; für ein hohles

Fig. 194.



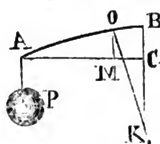
Rechteck, Fig. 194, mit den äußeren Dimensionen b und h und den inneren b_1 und h_1, $W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}$; für den Kreis vom Halbmesser r endlich $W = \frac{\pi r^4}{4}$.

Ist W_1 das Maaß des Biegungsmomentes in Beziehung auf irgend eine Axe $N_1 O_1$, und d der Abstand dieser Axe vom Schwerpunkte, so hat man:

$$W = W_1 - F d^2.$$

Für die von der neutralen Axe AOB, Fig. 195, eines

Fig. 195.



gebogenen Balkens gebildete elastische Linie hat man, wenn P die biegende Kraft, l die Länge AB des ganzen Balkens, x die Abscisse AM, y die Ordinate MO und r den Krümmungshalbmesser KO eines Punktes bezeichnet:

$$WE = Pxr.$$

$$y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right),$$ und daher die Bogenhöhe:

$$BC = a = \frac{Pl^3}{3WE}.$$

Die Leistung oder Arbeit, bei welcher der Körper um einen Bogen von der Höhe a gekrümmt wird, ist:

$$L = \tfrac{1}{2} Pa = \frac{P^2 l^3}{6WE}.$$

Ist die Last Q auf AB gleichförmig vertheilt und trägt jede Längeneinheit des Balkens $= q$, ist also $Q = lq$, so hat man:

$$y = \frac{qx}{6WE}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right); \text{ daher}$$

$$a = \frac{Ql^3}{8WE}, \text{ und } L = \frac{17Q^2l^3}{768WE}.$$

Ruht der Balken mit beiden Enden auf, so hat man im ersten Falle der Belastung:

$$a = \frac{Pl^3}{48WE}, \; L = \frac{P^2l^3}{96WE}, \text{ und im zweiten}$$

$$a = \frac{5}{8}\,\frac{Ql^3}{48WE}, \; L = \frac{5}{8}\cdot\frac{Q^2l^3}{96WE}.$$

§. 19. Relative Festigkeit.

Ist e der Abstand der entferntesten Faser des gebogenen Körpers von der neutralen Axe, so hat man die Tragkraft

$$P = \frac{WT}{el}, \text{ so wie die Kraft zum Abbrechen:}$$

$$P = \frac{WK}{el}.$$

Für einen massiven Balken mit rectangulärem Querschnitte hat man: $P = \frac{bh^2}{6l}K$, und für einen hohlen, wie Fig. 196 und 197, $P = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6hl}K$.

Für einen Körper mit triangulärem Querschnitte ist bei der Höhe h und Breite b: $P = \frac{bh^2}{24l}K$.

Fig. 196.

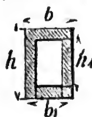


Fig. 197.



Fig. 198.



Für einen massiven Cylinder ist $Pl = \frac{\pi}{4}r^3K$, und für einen hohlen, wie Fig. 198, $Pl = \frac{\pi}{4}\,\frac{r^4 - r_1^4}{r}K$.

Für einen Balken mit elliptischem Querschnitte, wie Fig. 199, wenn die Halbaxe a in der Kraftebene steht:

$$Pl = \frac{\pi}{4}\, b a^2 K.$$

Der gerippte Balken, Fig. 200, ist ein ausgehöhlter Balken mit einem besonderen Mittelstücke von der Breite b_2 und Höhe h, daher hat man für ihn:

$$P = \frac{b h^3 - b_1 h_1{}^3 + b_2 h_2{}^3}{6 h l}\, K.$$

Fig. 199.



Fig. 200.

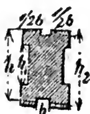
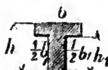


Fig. 201.



Fig. 202.



Für den Balken mit kreuzförmigem Querschnitte, Fig. 201, ist $P = \frac{b h^3 + b_1 h_1{}^3}{6 h l} K$, und für den mit Tförmigem Querschnitte, Fig. 202:

$$P = \frac{(b h^2 - b_1 h_1{}^2)^2 - 4\, b b_1\, h h_1\, (h - h_1)^2}{b h^2 - b_1 h_1{}^2} \cdot \frac{K}{6}.$$

Bei einem aus einem Baumstamme zu zimmernden Balken soll sich die Höhe zur Breite wie 7 : 5 verhalten. Das Tragvermögen des letzteren ist nun 35 Procent kleiner als das des ersteren.

Folgende Tabelle enthält die vorzüglichsten Brechungsmodul K; für Holz nimmt man nur den zehnten und für Metalle und Steine den dritten bis vierten Theil derselben, wenn es darauf ankommt, die Dimensionen belasteter Körper zu finden.

Tabelle.

Die Brechungs- oder Festigkeitsmodul der Biegung.

Namen der Körper.	Modul K.	Namen der Körper.	Modul K.
Buchenholz	10000-24000	Ulmenholz	6000—12000
Eichenholz	8000-24000	Gußeisen	24000-56000
Fichtenholz	8000-13000	Kalkstein	700—1700
Kiefernholz	7000-17000	Sandstein	600—800
Tannenholz	7000-14000	Ziegel	180—340

In der Anwendung ist von folgenden Regeln Gebrauch zu machen:

Für parallelepipedische und cylindrische Körper aus

Holz $Pl = 200\ bh^2 = 950\ r^3$,

Gußeisen $Pl = 1000\ bh^2 = 4700\ r^3$,

Schmiedeeisen $Pl = 800\ bh^2 = 3600\ r^3$.

Bei Maschinentheilen, wie z. B. Wellen, wo wegen Erschütterungen große Biegungen zu vermeiden sind, setzt man besser für Körper aus

Holz $Pl^2 = 170\ bh^3 = 1600\ r^4$,

Gußeisen $Pl^2 = 980\ bh^3 = 9250\ r^4$,

Schmiedeeisen $Pl^2 = 1680\ bh^3 = 15800\ r^4$.

Ist die Last Q auf den an einem Ende festgehaltenen Körper gleichförmig vertheilt, so hat man statt P, $\frac{Q}{2}$ zu substituiren; ruht er an beiden Enden auf, und wirkt P in der Mitte, so ist statt P, $\frac{P}{4}$ einzuführen; ist in diesem

Falle Q gleichförmig vertheilt, so ist statt P, $\frac{Q}{8}$ zu nehmen; ist endlich der Balken an beiden Enden eingemauert, so hat man P durch $\frac{P}{8}$ oder $\frac{Q}{16}$ zu ersetzen.

Ist ein an beiden Enden aufliegender Balken durch ein Gewicht P belastet, dessen Angriffspunkt von den Stützpunkten um l_1 und l_2 absteht, so hat man Pl durch $\frac{P l_1 l_2}{l}$ zu ersetzen, also $P = \frac{l}{l_1 l_2} \cdot b h^2 \cdot \frac{K}{6}$ zu nehmen; ist aber die Last Q auf einen Theil c der Balkenlänge l gleichförmig vertheilt, und steht die Mitte dieses Theiles von den Stützpunkten um l_1 und l_2 ab, so hat man statt Pl $Q\left(\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8}\right)$ zu nehmen.

Körper von gleichem Widerstande haben bei constanter Breite zum Längenprofil:

eine Parabel, wenn, wie ACB in Fig. 203, die Kraft P nur in einem Punkte angreift; hingegen:

Fig. 203.

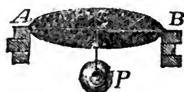


Fig. 204.



eine Ellipse, wenn wie AB, Fig. 204, die Last Q auf der ganzen Länge des Körpers gleichförmig vertheilt ist.

§. 20. Rückwirkende Festigkeit.

Man unterscheidet rückwirkende Festigkeit des Zerdrückens und rückwirkende Festigkeit des Zerknickens; jene kommt bei kurzen oder niedrigen Körpern, diese aber bei Säulen, welche mindestens zehn Mal so lang als diese sind, in Betracht.

Steine werden durch Druckkräfte in Stücke zertheilt, Holzstücke hingegen bekommen eine wulstförmige Anschwellung, indem sich ihre Fasern von einander trennen. Lange Säulen hingegen werden durch Druckkräfte nach vorhergegangener Biegung in einem Querschnitte abgebrochen. Die Festigkeit des Zerdrückens ist ziemlich genau dem Querschnitte F des Körpers proportional; ist hiernach K der Festigkeitsmodul, so hat man die Kraft zum Zerdrücken: $P = FK$

Tabelle
der Festigkeitsmodul des Zerdrückens.

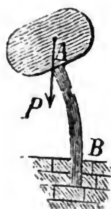
Namen der Körper.	Festigkeitsmodul K in Pfund.	Namen der Körper.	Festigkeitsmodul K in Pfund.
Basalt	27000	Ziegelstein	580 bis 2200
Gneis	5100	Eichenholz	2800 » 6800
Granit	6000 bis 11000	Fichtenholz	6800 » 8000
Kalkstein	1500 » 6000	Tannenholz	2000
Marmor	3200 » 12000	Gußeisen	146000
Mörtel	450 » 900	Schmiedeeisen	72000
Sandstein	1400 » 13000	Kupfer	60000

In der Anwendung gibt man bei Holz und Steinen die zehnfache, bei Metallen die fünf- und bei Mauern die zwanzigfache Sicherheit. Für Säulen, welche 12mal so lang als dick sind, nimmt man K um ein Sechstel kleiner, und für solche, welche 24mal so lang als dick sind, zwei Sechstel. Auf das Zerknicken ist Rücksicht zu nehmen: bei Säulen aus Gußeisen, die mindestens 10mal so lang als dick sind, bei Säulen aus Schmiedeeisen, deren Länge die

Dicke 20mal übertrifft, und bei Säulen aus Holz, welche die 25fache Dicke zur Länge haben.

Für die Festigkeit des Zerknickens hat man bei einer an einem Ende festgehaltenen Säule *AB*, Fig. 205:

Fig. 205.



$$P = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 WE;$$

ist daher dieselbe parallelepipedisch, *b* die größere und *h* die kleinere Dimension ihres Querschnittes, so hat man:

$$P = \frac{\pi^2}{48}\,\frac{b\,h^3}{l^2}\,E = 0{,}205\,\frac{b\,h^3}{l^2}\,E.$$

Für die massive cylindrische Säule ist:

$$P = \frac{\pi^3}{16}\,\frac{r^4 E}{l^2} = 1{,}938\,\frac{r^4\,E}{l^2},$$

und für die hohle: $P = \frac{\pi^3}{16}\left(\frac{r_1{}^4 - r_2{}^4}{l^2}\right)E = 1{,}938\,\frac{(r_1{}^4 - r_2{}^4)}{l^2}\,E.$

Wird die Säule am unteren Ende nicht festgehalten, stemmt sich dieselbe nur gegen die Unterstützungsfläche, so hat man in obige Formeln statt l, $\frac{l}{2}$ einzuführen, weshalb die Tragkraft selbst vervierfacht wird.

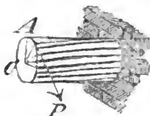
Die Versuche von Hodgkinson bestätigen wenigstens eine angenäherte Richtigkeit dieser Formeln für das Zerknicken. Nehmen wir für Holz $E = 1800000$, so erhalten wir für eine bloß eingestemmte Holzsäule mit quadratischem Querschnitte: $P = 4\,.\,0{,}205\,\frac{b^4}{l^2}\,.\,1800000 = 1476000\,\frac{b^4}{l^2}$.

Nach Hodgkinson ist aber $P = 2550000\,\frac{b^4}{l^2}$. Uebrigens findet dieser Experimentator, daß an den Enden abgerundete Säulen circa nur ein Drittel so viel tragen als rechtwinkelig abgeschnittene Säulen.

§. 21. Torsionsfestigkeit.

Der einfachste Fall der Torsion tritt ein, wenn eine an einem Ende B, Fig. 206, festgehaltene Welle am anderen Ende A von einer Umdrehungskraft P ergriffen wird; zunächst aber bei jeder Radwelle, an welcher sich zwei in verschiedenen Umdrehungsebenen wirkende Kräfte das Gleichgewicht halten. Ist s die Torsion oder seitliche Verrückung einer Faser, l die Länge und F der Querschnitt derselben, so hat man für ihre Torsionskraft:

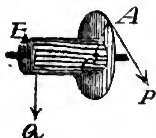
Fig. 206.



$$P = \frac{s}{2l} FE.$$

Für eine massive runde Welle BC, Fig. 207, vom Halbmesser r, und von der Länge l, welche das Umdrehungsmoment $P \,.\, AC = Pa$ aufnimmt, ist das Maaß des Torsionswinkels:

Fig. 207.



$$\alpha = \frac{4l}{\pi r^4} \frac{Pa}{E},$$

und umgekehrt das entsprechende Torsionsmoment:

$$Pa = \frac{\alpha \pi r^4 E}{4l}.$$

Ist die Welle hohl und sind ihre Halbmesser r_1 und r_2, so gilt die Formel:

$$Pa = \frac{\alpha \pi E}{4l} (r_1{}^4 - r_2{}^4).$$

Für einen parallelepipedischen Schaft mit den Querdimensionen $2b$ und $2h$ ist:

$$Pa = \frac{\alpha b h}{2l} \left(\frac{b^2 + h^2}{3}\right) E, \text{ also für } h = b,\ Pa = \frac{4 \alpha b^4}{3l} E.$$

Das Moment zum Abwürgen runder oder quadratischer Wellen ist: $Pa = \frac{\pi r^3}{2} \sqrt{\frac{KE}{2}} = \frac{4 b^3}{3} \sqrt{KE}.$

Tabelle für die Coefficienten der Torsion.

Material.	Kreisförmiger Querschnitt.	Quadratischer Querschnitt.
Holz	$Pa = 3500 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 5800 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$
Gußeisen	$Pa = 160000 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 280000 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$
Stahl und Schmiedeeisen	$Pa = 280000 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 470000 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$.

Für die Torsionsfestigkeit hat man bei Gußeisen $\sqrt{\frac{KE}{2}} = 30000$ bis 66000 Pfund; nimmt man fünffache Sicherheit, so folgt für Wellen aus Gußeisen:

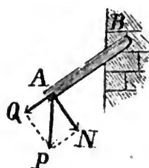
$$Pa = 12600\, r^3 = 15000\, b^3.$$

Für solche aus Schmiedeeisen lassen sich dieselben Coefficienten anwenden, bei Stahl soll man sie doppelt so groß, bei Messing und Kanonenmetall nur halb und bei Holz ein Zehntel so groß setzen.

§. 22. Zusammengesetzte Festigkeit.

Wird ein an einem Ende festgehaltener Balken AB, Fig. 208, von einer Kraft P ergriffen, deren Richtung um den Winkel $PAQ = \alpha$ von der Axenrichtung des Balkens abweicht, so hat man es mit einer Ausdehnungskraft $Q = P \cos. \alpha$ und mit einer Biegungskraft $N = P \sin. \alpha$ zu thun, und deshalb:

Fig. 208.



$K = \frac{P \cos. \alpha}{F} + \frac{P\, e\, l \sin. \alpha}{W}$; für einen rectangulären Querschnitt bh:

$$K = \frac{P\,cos.\alpha}{b\,h} + \frac{P\,l\,sin.\alpha}{\frac{1}{6}b\,h^2}, \text{ oder}$$

$$b\,h = \frac{P}{K}\left(cos.\alpha + \frac{6\,l}{h}sin.\alpha\right), \text{ oder besser:}$$

$$= \frac{P\,cos.\alpha}{K_1} + \frac{6\,P\,l}{K_2 h}\,sin.\alpha, \text{ wenn } K_1 \text{ den Coefficient}$$

des Zerreißens und K_2 den des Zerbrechens bezeichnet.

Nach dem Obigen ist nun zu setzen:

für Holz $b\,h = P\left(\frac{cos.\,\alpha}{1200} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{200\,h}\right)$ und

für Eisen $b\,h = P\left(\frac{cos.\,\alpha}{3000} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{1000\,h}\right)$.

Für eine Hängesäule BC, Fig. 209, welche von einer Kraft P ergriffen wird, deren Richtung um den Abstand $CA = a$ von der Axe der Säule absteht, hat man: $K = \frac{P}{F} + \frac{P\,a\,e}{W}$.

Fig. 209.



Ist die Säule cylindrisch, also $F = \pi r^2$ und $W = \frac{\pi r^4}{4}$, so folgt hiernach:

$$K = \frac{P}{\pi r^2}\left(1 + \frac{4a}{r}\right);$$

ist sie aber im Querschnitt quadratisch, also $F = b^2$, und $W = \frac{b^4}{12}$, so folgt $K = \frac{P}{b^2}\left(1 + \frac{6\,a}{b}\right)$.

Z. B. für $a = \frac{1}{2}b$, $K = \frac{4\,P}{b^2}$, also $P = \frac{1}{4}b^2 K = \frac{F}{4}K$.

Fig. 210.

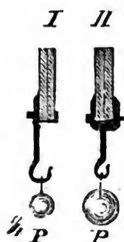
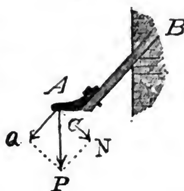


Fig. 211.



In dem in I., Fig. 210, abgebildeten Falle trägt folglich die Säule nur ein Viertel so viel als in II.

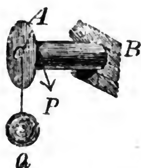
Für die schiefe Hängesäule AB, Fig. 211, ist:

$$K = P\left[\left(\frac{1}{F} + \frac{ae}{W}\right) sin.\,a + \frac{l\,e\,cos.\,\alpha}{W}\right],$$

wobei α den Winkel PAQ bezeichnet, um welchen die Kraftrichtung von der Axe der Säule abweicht, l die Länge dieser Säule, a den Abstand AC der Kraftrichtung von der Säulenaxe, und e die halbe Dicke der Säule angibt.

Wird eine Welle BC, Fig. 212, einer Torsionskraft P und einer Biegungskraft Q zugleich ausgesetzt, so hat man für dieselbe:

Fig. 212.



$$\frac{WK}{e} = Ql + \frac{P^2a^2e}{2WE},$$

wobei a den Hebelarm CA der Umdrehungskraft bezeichnet u. s. w.

Für eine cylindrische Welle folgt:

$$\frac{\pi r^3 K}{4} = Ql + \frac{2P^2a^2}{\pi r^3 E},$$

und für eine vierkantige, mit der Seite s:

$$\frac{Ks^3}{6\sqrt{2}} = Ql + \frac{3P^2a^2\sqrt{2}}{s^3E}.$$

Führt man doppelte Coefficienten ein, so erhält man hiernach für gußeiserne Wellen:

$$s^6 = \frac{Qls^3}{707} + \frac{P^2a^2}{3520000},$$

$$r^6 = \frac{Qlr^3}{4700} + \frac{P^2a^2}{158800000};$$

für hölzerne Wellen:

$$r^6 = \frac{Qls^3}{141} + \frac{P^2a^2}{35200},$$

$$r^6 = \frac{Qlr^3}{950} + \frac{P^2a^2}{1588000}.$$

Viertes Kapitel.

Dynamik.

§. 23. Trägheitsmomente.

Sind M_1, M_2, M_3 . . . die einzelnen Theile einer rotirenden Masse und z_1, z_2, z_3 . . . ihre Abstände von der Umdrehungsaxe, so hat man das **Trägheitsmoment** dieser Masse:

$$T = M_1 z_1^2 + M_2 z_2^2 + M_4 z_3^2 + \, . \, . = \Sigma \, (Mz^2),$$

und es ist die auf den Abstand z reducirte Masse:

$$M = \frac{T}{z^2} = \frac{\Sigma(Mz^2)}{z^2}.$$

Ist ferner T das Trägheitsmoment eines Körpers in Hinsicht auf eine Drehungsaxe durch den Schwerpunkt des Körpers, und T_1 das in Hinsicht auf eine andere Axe, welche überall um e von jener absteht, so hat man:

$$T_1 = T + Me^2.$$

Für eine Stange, welche sich um eine Axe durch ihren Schwerpunkt dreht, ist $T = \frac{1}{3} \, Ma^2$, wenn a den Abstand ihrer Enden von der Axe bezeichnet.

Für einen Kreis, welcher sich um seinen Durchmesser $2r$ dreht, ist $T = \frac{1}{4} \, Mr^2$, und für einen solchen, welcher sich um seinen Mittelpunkt dreht, so wie für einen sich um seine Axe drehenden Cylinder:

$$T = \tfrac{1}{2} \, Mr^2.$$

Für eine Kugel, die sich um einen ihrer Durchmesser dreht, $T = \frac{2}{5} \, Mr^2$. Steht aber die Umdrehungsaxe um a von dem Kugelmittelpunkte ab, so hat man natürlich:

$$T_1 = \tfrac{2}{5} \, Mr^2 + Ma^2 = (a^2 + \tfrac{2}{5} \, r^2) \, M.$$

Für ein Parallelepiped, welches sich um seine Schwerlinie dreht, die mit den Seitenkanten desselben parallel läuft,

hat man $T = \frac{1}{3} M (b^2 + h^2)$, wenn b und h die halben Seiten seines rectangulären Querschnittes bezeichnen.

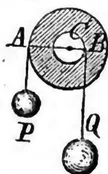
Für ein Prisma mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen ist, wenn dessen Drehungsaxe durch den Schwerpunkt geht und mit den Seitenkanten parallel läuft, $T = \frac{2}{9} M d^2$, wo d die halbe Hypotenuse der Grundfläche bezeichnet.

Für eine um ihre Axe umlaufende Röhre mit den Halbmessern r_1 und r_2 hat man:

$$T = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2).$$

Wenn an einer Radwelle ACB, Fig. 213, die Gewichte P und Q mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CB = b$ wirken und das Trägheitsmoment dieser Maschine $= T$ ist, so hat man die Beschleunigung, mit welcher P sinkt:

Fig. 213.



$$p = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + T} \cdot ga,$$

und die, mit welcher Q steigt:

$$q = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + T} \cdot gb,$$

die Spannung des Seiles von P ist $= P\left(1 - \frac{p}{g}\right)$ und die des Seiles von $Q = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right)$.

Beispiel. Das Rad einer Radwelle hat den Halbmesser $a = 10$ Zoll und das Gewicht $G_1 = 16$ Pfund, die Welle derselben hat den Halbmesser $b = 3$ Zoll und das Gewicht $G_2 = 12$ Pfund; wenn nun an ersteres ein Gewicht $P = 30$ Pfund und an letztere ein Gewicht $Q = 80$ Pfund angehangen wird, welche Bewegung wird die Radwelle annehmen? Es ist die bewegende Kraft $= P - \frac{b}{a} Q = 30 - \frac{3}{10} \,.\, 80 = 6$ Pfund, und es sind die auf den Kraftpunkt reducirten Massen:

$\frac{P}{g} = \frac{30}{g}$, ferner $\frac{1/_{\circ} G_1}{g} = \frac{8}{g}$, $\frac{b^2}{a^2} \frac{Q}{g} = \frac{9}{100} . \frac{80}{g} = \frac{7,2}{g}$ und $\frac{b^2}{a^2} . \frac{G^2}{2g} = \frac{9}{100} . \frac{6}{g} = \frac{0,54}{g}$ Pfund; daher folgt die Beschleunigung des Kraftpunktes oder des sinkenden Gewichtes P:

$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{6\,g}{30+8+7,2+0,54} = \frac{6\,g}{45,74} = \frac{6\ .\ 31,25}{45,74}$ $= 4,10$ Fuß. Dagegen die des Lastpunktes oder steigenden Gewichtes Q: $q = \frac{b}{a}\,p = 0,3\ .\ 4,10 = 1,23$ Fuß. Dieselben Werthe geben auch die obigen Formeln für p und q, wenn man darin $T = 1/_2\, G_1\, a^2 + 1/_2\, G_2\, b^2$ substituirt. Die Seilspannungen sind $S_1 = (1 - 0,131)\ .\ 30 = 26,07$ Pfd., und $S_2 = (1 + 0,0393) . 80 = 83,144$ Pfd. Nach 10 Sec. hat P die Geschwindigkeit $v_1 = p\,t = 4,10 . 10 = 41$ Fuß, Q aber die Geschwindigkeit $v_2 = 0,3\ .\ 41 = 12,3$ Fuß erlangt, und letzteres ist um $s = 1/_2\, v_2\, t = 1/_2\ .\ 12,3\ .\ 10 = 61,5$ Fuß gestiegen.

§. 24. Centrifugalkraft.

Die **Centrifugalkraft** eines in einer krummen Linie laufenden Körpers ist: $P = \frac{v^2}{r}\,M = \frac{v^2}{gr}\,G$, wenn v die Geschwindigkeit, M die Masse, G das Gewicht des Körpers, r aber den Krümmungshalbmesser seiner Bahn bezeichnet.

Auch ist $P : G = 2\ .\ \frac{v^2}{2g} : r$, d. i. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Krümmungshalbmesser der Bahn.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man auch:

$$P = \omega^2\,M\,r.$$

Ist t die Umdrehungszeit eines im Kreise umlaufenden Körpers, so gilt die Formel:

$$P = \frac{4\pi^2}{gt^2}\,Gr = 1{,}2633\frac{Gr}{t^2}.$$

Ist endlich u die Anzahl der Umdrehungen des Körpers pr. Minute, so folgt:

$$P = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{u}{60}\right)^2 Gr = 0{,}0003509\,u^2 Gr.$$

Die Centrifugalkräfte der Theile einer Masse lassen sich natürlich nur dann auf eine Kraft zurückführen, wenn ihre Richtungen in eine Ebene fallen; außerdem ist nur eine Zurückführung auf zwei Kräfte möglich.

Bei einer dünnen Scheibe CS, Fig. 214, welche auf der Umdrehungsaxe XX rechtwinkelig steht, ist der Schwerpunkt S der Angriffspunkt der Centrifugalkraft, und daher $CS = r$. Liegen die Schwerpunkte aller auf der Umdrehungsaxe rechtwinkelig stehender scheibenförmigen Elemente eines Körpers mit der Umdrehungsaxe in einer Ebene, so ist eine Zurückführung auf eine einzige Centrifugalkraft möglich.

Fig. 214.

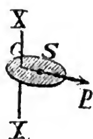
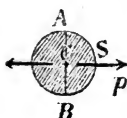


Fig. 215.



Die Centrifugalkräfte von den beiden Hälften eines sich um seine geometrische Axe drehenden Cylinders sind

$$P = \omega^2 M \,.\, \frac{4\,r}{3\pi} = \frac{2\omega^2}{3g}\,.\,r^3 h\gamma,$$

wenn r und h den Halbmesser und die Höhe, γ aber die Dichtigkeit des Cylinders bezeichnen. Soll der Körper durch die Centrifugalkraft zerbersten, so hat man: $2\,hrK = \frac{2\omega^2}{3g}\,r^3h\gamma$, folglich: $\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{3\,gK}{\gamma}}$ oder $u = \frac{30\,\omega}{\pi} = \frac{30}{\pi r}\sqrt{\frac{3\,gK}{\gamma}}$.

Heben sich die sämmtlichen Centrifugalkräfte gegenseitig auf, so daß sie auf die Umdrehungsaxe ohne Wirkung bleiben, so heißt diese Axe eine freie Axe. Dieselbe geht stets durch den Schwerpunkt des Körpers. Jeder Körper hat mindestens drei freie Axen.

§. 25. Fallen in vorgeschriebenen Wegen.

Die Beschleunigung eines auf einer schiefen Ebene herabgleitenden Körpers ist ohne Rücksicht auf Reibung:

$p = g \sin. \alpha$, mit Rücksicht auf Reibung aber:

$p = g (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)$, wenn α den Neigungswinkel und φ den Reibungscoefficienten bezeichnet.

Die Acceleration eines von einer schiefen Ebene herabrollenden Körpers ist, wenn $T = Ga^2$ das Trägheitsmoment und r den Wälzungshalbmesser des Körpers bezeichnet:

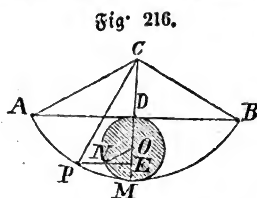
$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{a^2}{r^2}}$. Z. B. für eine herabwälzende Kugel, wo

$$a^2 = \tfrac{2}{5}\, r^3,\ p = \tfrac{5}{7}\, g \sin. \alpha.$$

Ist c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit eines ohne Reibung von einer schiefen Ebene herabgleitenden Körpers, und ist h die Vertikalprojection des Fallweges, so gilt die Formel: $\frac{v^2 - c^2}{2g} = h$.

Die Zeit eines Pendelschwunges, d. i. die Zeit, in welcher ein materieller Punkt einen Bogen AMB, Fig. 216, fallend und steigend durchläuft, ist, wenn h die Fall- oder Steighöhe MD und r den Schwingungsradius $CA = CB$ bezeichnet:

Fig. 216.



$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \ldots \right]$$

Bei mäßigen Ausschlägen ist $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{h}{8r}\right)$, und bei kleinen sogar $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}5620 \sqrt{r}$ zu setzen. Für ein Secundenpendel hat man $t = 1$, folglich $r = \frac{g}{\pi^2} = 38$ Zoll $= 0{,}9938$ Meter.

Die Zeit, innerhalb welcher das Pendel einen Bogen AP durchfällt, dessen Vertikalprojection $DE = MD - ME = h - h_1$ ist, gibt die Formel:

$$t = \left(\varphi + \frac{h}{8r}(\varphi + sin.\ \varphi) + \ldots\right) \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}},$$

wo φ^0 den Centriwinkel DON bezeichnet, der durch die Formel $cos.\ \varphi = \frac{2h_1 - h}{h}$ bestimmt ist. Uebrigens ergeben sich die Fallhöhen h und h_1 aus den Elongationswinkeln $ACM = \alpha$ und $PCM = \alpha_1$ durch die Formeln: $h = r(1 - cos.\alpha)$, $h_1 = r(1 - cos.\alpha_1)$, weshalb auch ist

$$cos.\ \varphi = 2\left(\frac{1 - cos.\alpha_1}{1 - cos.\alpha}\right) - 1 = 2\left(\frac{sin.\tfrac{1}{2}\alpha_1}{sin.\tfrac{1}{2}\alpha}\right)^2 - 1.$$

Die Länge r desjenigen einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, ist gleich dem Abstande des **Schwingungspunktes** von der Umdrehungsaxe, und zu setzen:

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Hiernach ist z. B. für eine schwere Linie oder für einen Stab, welcher sich um einen seiner Endpunkte schwingt, bei der Länge l:

$$r = \frac{\tfrac{1}{3}Ml^2}{\tfrac{1}{2}Ml} = \tfrac{2}{3}\,l, \text{ daher } t = \pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Der Aufhängungspunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels sind **wechselseitig**; d. h. die Schwingungszeit ist dieselbe, man mag das Pendel in dem einen oder in dem anderen aufhängen. Hierauf beruht die Theorie der **Reversionspendel**.

§. 26. Der Stoß.

Für den geraden Centralstoß zweier sich mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in gleicher Richtung bewegenden

Massen M_1 und M_2 ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit im Augenblicke des stärksten Zusammendrückens:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Sind beide Massen unelastisch, so ist dies auch die Geschwindigkeit, mit der sie sich gemeinschaftlich nach dem Stoße fortbewegen.

Die lebendige Kraft, welche durch den Zusammenstoß unelastischer Körper verloren geht, ist:

$$K = M_1 \ (c_1 - v)^2 + M_2 \ (v - c_2)^2,$$

und der entsprechende Verlust an Arbeitsvermögen:

$$L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Sind v_1 und v_2 die veränderlichen, jedoch gleichzeitigen Geschwindigkeiten während des Stoßes, so gilt die allgemeine Regel:

$$M_1 \ (c_1 - v_1) = M_2 \ (v_2 - c_2) \text{ oder } M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2.$$

Ist überdies der Stoß vollkommen elastisch, so hat man auch:

$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2) \text{ oder } M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2.$$

Aus beiden Gleichungen resultirt der Geschwindigkeitsverlust des stoßenden Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \text{ und}$$

der Geschwindigkeitsgewinn des gestoßenen Körpers:

$$v_2 - c_2 = \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

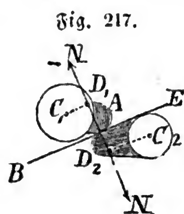
Sind die Körper unvollkommen elastisch, so nimmt der Faktor 2 auf der rechten Seite einen Werth zwischen 1 und 2 an, und sind sie ganz unelastisch, so geht er in 1 über. Ist der eine Körper vor dem Stoße in Ruhe, so setze man $c_2 = 0$, und laufen die Körper einander entgegen, so ist c_2 negativ in Rechnung zu bringen.

Beim schiefen Centralstoße bleiben die Geschwindigkeiten parallel zur Berührungsfläche unverändert, wogegen die Geschwindigkeiten normal zur Berührungsfläche gerade so

verändert werden wie beim geraden Centralstoß. Es ist deshalb erst eine Zerlegung der Geschwindigkeiten vor dem Stoße und dann eine Zusammensetzung der Geschwindigkeiten nach dem Stoße vorzunehmen, um die Größen und Richtungen der Geschwindigkeiten nach dem Stoße zu erhalten.

Die im Vorstehenden gegebenen Formeln gelten auch für den Fall, wenn der eine oder andere der sich stoßenden Körper nicht frei ist, sondern sich um eine feste Axe dreht. Es sind in diesem Falle die Geschwindigkeiten c_1, c_2, v_1 und v_2 auf die Lothpunkte D_1 und D_2, Fig. 217, der von den Drehungaxen C_1 und C_2 gegen die Stoßrichtung $N\bar{N}$ gefällten Perpendikel $C_1D_1 = a_1$ und $C_2D_2 = a_2$ zu beziehen, so wie auch die Massen M_1 und M_2 eben dahin zu reduciren. Sind T_1 und T_2 die Trägheitsmomente beider Körper in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxen, so hat man folglich

Fig. 217.



$M_1 = \frac{T_1}{a_1^2}$ und $M_2 = \frac{T_2}{a_2^2}$ in Rechnung zu bringen.

Ist der eine oder der andere der zum Stoße gelangenden Körper frei und geht die Stoßrichtung nicht durch den Schwerpunkt desselben, so ist die Wirkung der Stoßkraft eine doppelte; sie ist erstens dieselbe, als wenn die Stoßrichtung durch den Schwerpunkt ginge und zweitens dieselbe, als wenn der Körper im Schwerpunkte festgehalten würde und sich daher nur um diesen drehen könnte. Deshalb nimmt denn auch der Körper nach dem Stoße eine zusammengesetzte Bewegung an, welche aus einem Fortschreiten des Schwerpunktes und aus einer Drehbewegung um diesen Punkt besteht.

Soll die Stoßkraft keine Reaction auf den um eine Axe drehbaren Körper ausüben, so muß sie durch den Schwingungspunkt des Körpers (**Mittelpunkt des Stoßes**)

gehen, ihre Richtung also von der Umdrehungsaxe abstehen um

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Die Stoßkraft wirkt in vielen Fällen der Technik, z. B. beim Schmieden der Metalle, beim Einschlagen von Nägeln, Einrammen von Pfählen, Zerschlagen oder Zerreißen von Körpern u. s. w. Für das Einrammen eines Pfahles hat man, wenn G das Gewicht des Rammbäres, G_1 das Gewicht des Pfahles, h die Fallhöhe des ersteren bezeichnet, die einem Schlage entsprechende Arbeit:

$$Ps = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Wenn nun der Pfahl bei den letzten n Schlägen um die Tiefe s, also im Mittel bei einem Schlage um $\sigma = \frac{s}{n}$ eindringt, so hat man den Widerstand des Eindringens, und also auch die Tragkraft des Pfahles:

$$P = \frac{G^2}{G + G_1} \cdot \frac{h}{\sigma} = \frac{G^2}{G + G_1} \cdot \frac{nh}{s}.$$

Man gibt in der Anwendung 10- bis 100fache Sicherheit.

Um einen prismatischen Körper durch einen Schlag in der Axenrichtung desselben um λ zusammenzudrücken oder auszudehnen, hat man die Arbeit $\frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2}{FE} \cdot \frac{l}{2}$ nöthig; soll aber diese durch ein Gewicht G verrichtet werden, welches von der Höhe h herabfällt, so hat man bei dem Gewichte G_1 des gestoßenen Körpers diese Arbeit $= \frac{G^2}{G + G_1} h$; deshalb folgt die Kraft:

$$P = G \sqrt{\frac{FE}{G + G_1} \cdot \frac{2h}{l}},$$

ferner die Ausdehnung oder Zusammendrückung

$$\lambda = G \sqrt{\frac{2hl}{(G + G_1) FE}},$$

endlich für das Zerschlagen und Zerreißen: der Festigkeitsmodul $K = G\sqrt{\frac{E}{(G+G_1)F} \cdot \frac{2h}{l}}$.

Soll der Körper der Trennung widerstehen, so muß sein Querschnitt sein:

$$F = \frac{G^2 E}{(G+G_1)K^2} \cdot \frac{2h}{l}.$$

Um einen an beiden Enden aufliegenden Balken durch eine Kraft in der Mitte so zu biegen, daß sich die Bogenhöhe a herausstellt, hat man die Arbeit $\frac{Pa}{2} = \frac{P^2 l^3}{96\,WE}$ nöthig. Wird nun diese Arbeit durch ein von der Höhe h herabfallendes Gewicht G verrichtet, so hat man diese Arbeit $\frac{G^2\,h}{G+\frac{1}{2}G_1}$ zu setzen, wenn G_1 das Gewicht des gebogenen Balkens bezeichnet. Hiernach ist denn:

$$P = G\sqrt{\frac{96\,WE}{G+\frac{1}{2}G_1} \cdot \frac{h}{l^3}},$$ ferner

$$a = G\sqrt{\frac{h\,l^3}{24(G+\frac{1}{2}G_1)WE}}$$

und für das Zerbrechen:

$$K = \frac{\frac{1}{4}Ple}{W} = G\sqrt{\frac{6E}{(G+\frac{1}{2}G)W} \cdot \frac{e^2 h}{l}},$$

wenn e den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe bezeichnet.

Fünftes Kapitel.

Hydraulik.

§. 27. Hydrostatischer Druck.

Der Druck einer Flüssigkeit gegen eine ebene Fläche ist $P = Fh\gamma$, wo F den Inhalt dieser Fläche, h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter der Oberfläche der Flüssigkeit und γ die Dichtigkeit der letzteren bezeichnet. Um den Vertikaldruck oder den vertikalen Componenten dieser Kraft zu finden, ist statt F die Horizontalprojection der Fläche einzuführen, und um den Horizontaldruck zu erhalten, muß man die Vertikalprojection von F als Druckfläche ansehen.

Der Mittel- oder Angriffspunkt des Wasserdruckes liegt unter dem Schwerpunkte der gedrückten Fläche, sein Abstand vom Wasserspiegel ist:

$$z = \frac{\text{Trägheitsmoment der Fläche}}{\text{statisches Moment derselben}}.$$

Für ein Rechteck, dessen eine Seite im Wasserspiegel liegt, ist z. B. $z = \frac{\frac{1}{3}Fa^2}{\frac{1}{2}Fa} = \frac{2}{3}a$, d. i. Zweidrittel der Höhe. Der Druck des Wassers gegen eine krumme Fläche nach irgend einer Richtung ist:

$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \ldots)\,\gamma,$$

wo h_1, h_2, h_3 . . die Druckhöhen und G_1, G_2, G_3 . . die Projectionen der Flächenelemente, winkelrecht gegen die gegebene Richtung bezeichnen.

Der Horizontaldruck des Wassers gegen eine krumme Fläche nach irgend einer Richtung ist $P = Gh\gamma$, wo G die Vertikalprojection dieser Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung, h aber die Tiefe des Schwerpunktes dieser Projection unter dem Wasserspiegel ist.

Der Vertikaldruck des Wassers gegen eine krumme Fläche ist gleich dem Gewichte einer über dieser Fläche stehenden und bis zur Oberfläche des Wassers reichenden Wassersäule.

Ist r der innere Halbmesser eines kugelförmigen Gefäßes, e die Dicke der Gefäßwand und $p = h\gamma$ der mittlere Druck des Wassers in diesem Gefäße auf jede Flächeneinheit, so hat man $e = \frac{pr}{2K}$.

Für eine Röhre oder ein cylinderförmiges Gefäß hingegen $e = \frac{pr}{K}$.

Der Sicherheit wegen nimmt man, wenn d die innere Weite der Röhre in Zollen und p den Druck in Atmosphären, jede zu 33 Fuß, bezeichnet, für Röhren aus:

Eisenblech . . .	$e = 0{,}00086\ nd + 0{,}12$	Zoll,
Gußeisen . . .	$e = 0{,}00238\ nd + 0{,}33$	»
Kupfer	$e = 0{,}00148\ nd + 0{,}16$	»
Blei	$e = 0{,}00242\ nd + 0{,}20$	»
Zink	$e = 0{,}00507\ nd + 0{,}16$	»
Holz	$e = 0{,}0323\ nd + 1{,}04$	»
natürlichem Stein	$e = 0{,}0369\ nd + 1{,}15$	»
künstlichem Stein	$e = 0{,}0538\ nd + 1{,}53$	»

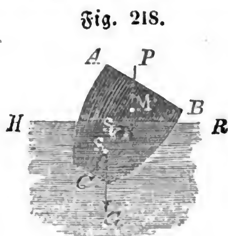
§. 28. Gleichgewicht des Wassers mit anderen Körpern.

Der Auftrieb oder die Kraft, mit welcher das Wasser einen eingetauchten Körper emportreibt, ist gleich dem Gewichte $V\gamma$ des verdrängten Wassers, also Volumen V des Körpers oder seines eingetauchten Theiles, mal Dichtigkeit γ des Wassers oder der Flüssigkeit; und sein Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des verdrängten Wassers.

Ein Schiff oder anderer Körper ACB, Fig. 218, auf folg. Seite, schwimmt mit Stabilität, wenn sein Metacentrum M über dem Schwerpunkte S des Körpers liegt und

das Maaß der Stabilität ist der Abstand $SM = c$ dieser Punkte. Ist b die Breite des Schiffes im Niveau des Wasserspiegels, F der Inhalt des eingetauchten Schiffsquerschnittes und e die Höhe SS_1 des Schwerpunktes S_1 vom verdrängten Wasser über dem vom Schiffe, so hat man: $c = \frac{b^3}{12F} + e$.

Fig. 218.



Ist G das Gewicht eines unter Wasser getauchten Körpers, P der Auftrieb des letzteren, γ die Dichtigkeit des Wassers oder der Flüssigkeit, γ_1 aber die des Körpers, so hat man $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{G}{P}$, und hiernach auch das specifische Gewicht eines Körpers: $\varepsilon = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust im Wasser}}$.

Um specifische Gewichte unter Eins auszumitteln, verbindet man den leichten Körper mit einem schweren, und bestimmt sowohl den Auftrieb P der Verbindung, als auch den Gewichtsverlust P_1 des schweren Körpers. Es ist dann $\varepsilon = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{P - P_1}$.

Aus dem absoluten Gewichte G einer mechanischen Verbindung zweier Körper und aus den specifischen Gewichten ε, ε_1 und ε_2 der ersteren und der letzteren ergeben sich die Gewichte dieser Körper durch die Formeln:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ und}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

In communicirenden Röhren verhalten sich die Höhen verschiedener Flüssigkeitssäulen umgekehrt wie die specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

§. 29. Gleichgewicht der Luft.

Eine Atmosphäre ist gleich dem Drucke einer 76 Centimeter = 28 Pariser Zoll = 29 Preußische Zoll hohen Quecksilbersäule, oder einer 10,336 Meter = 31,73 Pariser Fuß = 32,84 Preußische Fuß hohen Wassersäule.

Uebrigens ist 76 Centimeter = 28,075 Zoll, und daher eine Atmosphäre zu 76 Centimeter um 0,27 Procent größer als die ältere Atmosphäre zu 28 Pariser Zoll.

Einer Atmosphäre zu 76 Centimeter entspricht ferner der Druck von

1,0336 Kilogramm auf 1 Quadratcentimeter,
oder 10336 » auf 1 Quadratmeter,
» 15,05 Pfund auf 1 Quadratzoll,
» 2167 » auf 1 Quadratfuß.

Einer Atmosphäre zu 28 Pariser Zoll entspricht hingegen der Druck von

1,0310 Kilogramm auf 1 Quadratcentimeter,
10310 » auf 1 Quadratmeter,
15,01 Pfund auf 1 Quadratzoll,
2162 » auf 1 Quadratfuß.

Zur Reduction dieser Atmosphärenmaaße läßt sich folgende Tabelle gebrauchen:

Atmosphäre.	Zoll.	Pfund.
1	28	15,01
0,03571	1	0,5361
0,06661	1,865	1

Für n Atmosphären ist hiernach der Druck auf eine Fläche von F Quadratzoll: $P = 15{,}01\, n F$ Pfd.; ferner einer

Quecksilbersäule von h Zoll entspricht 0,03571 . h Atmosphäre = 0,5361 . h Pfund Druck u. s. w.

Nach dem Mariotteschen Gesetze sind die Spannkräfte eines und desselben Luftquantums, bei unveränderter Temperatur den Dichtigkeiten direct und folglich den Volumen umgekehrt proportional. Sind p und p_1, oder h und h_1 die Spannungskräfte, γ und γ_1 die entsprechenden Dichtigkeiten und V und V_1 die Volumen eines und desselben Luftquantums, so hat man hiernach:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V}.$$

Die Leistung L, welche nöthig ist, um ein Luftvolumen V aus der Spannung p in die Spannung p_1 zu versetzen, bestimmt sich durch die Formeln:

$$L = V\,p\ log.\,nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\ V\,p\ log.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

$$= V_1 p_1\ log.\,nat. \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) = 2{,}3026\ V_1\,p_1\ log.\left(\frac{V}{V_1}\right).$$

Eben so groß ist auch das Arbeitsvermögen, welches frei wird, wenn die höhere Spannung p_1 eines Luftvolumens V_1 in die tiefere Spannung p umgesetzt wird.

In einer größeren Luftsäule nimmt die Expansivkraft und Dichtigkeit von unten nach oben zu ab. Ist p und γ Spannung und Dichtigkeit der Luft an einer unteren, p_1 und γ_1 aber Spannung und Dichtigkeit an einer um s Fuß höheren Stelle, so hat man:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}},$$ wo $e = 2{,}71828$, und daher

$$s = \frac{p}{\gamma}\,log.\,nat.\left(\frac{p}{p_1}\right) = 58604\ log.\left(\frac{h}{h_1}\right)$$ Fuß, wenn h und h_1 die Barometerstände bezeichnen. Die Anwendung dieser Formel beim barometrischen Höhenmessen (s. oben Seite 342 u. s. w.).

Nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze ist für ein und

dasselbe Luftquantum bei den Temperaturen t und t_1, Dichtigkeiten γ und γ_1 und Volumen V und V_1:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1+0{,}00367\,t_1}{1+0{,}00367\,t}.$$

Sind überdies noch die Spannungen p und p_1 oder h und h_1 ungleich, so hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1+0{,}00367\,t_1}{1+0{,}00367\,t} \cdot \frac{h}{h_1}.$$

Hiernach ist nun die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei t^0 (Centes.) Wärme und h Meter Barometerstand:

$$\gamma = \frac{1{,}2995}{1+0{,}00367\,t} \cdot \frac{h}{0{,}76} = \frac{1.710\,h}{1+0{,}00367\,t} \text{ Kilogramm}$$

und bei h Zoll (Pariser) Barometerstand:

$$\gamma = \frac{0{,}08566}{1+0{,}00367\,t} \cdot \frac{h}{28} = \frac{0{,}003059\,h}{1+0{,}00367\,t} \text{ Pfund};$$

ferner bei dem Drucke p Kil. auf das Quadratcentimeter:

$$\gamma = \frac{1{,}2995}{1+0{,}00367\,t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{1{,}2572\,p}{1+0{,}00367\,t} \text{ Kilogramm},$$

und bei dem Drucke p Pfund auf den Quadratzoll:

$$\gamma = \frac{0{,}08566}{1+0{,}00367.t} \cdot \frac{p}{15{,}01} = \frac{0.005707\,p}{1+0{,}00367\,t} \text{ Pfund}.$$

Beispiel. Ein Gebläse, welches pr. Secunde 10 Cubikfuß Luft von $^{11}/_{10}$ Atmosphären Spannung liefert, nimmt die theoretische Leistung $L = 11 \,.\, 144 \,.\, 15{,}01 \; Ln.\, 1{,}1 = 23776 \,.\, 0{,}09531 = 2266$ Fußpfund $= 4{,}44$ Pferdekräfte in Anspruch.

§. 30. Theoretischer Ausfluß des Wassers.

Ist h die Druckhöhe, d. i. die Tiefe der Mitte der Ausflußmündung unter dem Wasserspiegel, und F der Inhalt der Ausflußmündung oder des Strahlquerschnittes, so hat man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh} = 7{,}906\,\sqrt{h} \text{ Fuß},$$

und das Ausflußquantum pr. Secunde:

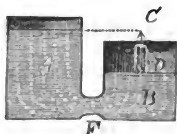
$$Q = Fv = F\sqrt{2gh}.$$

Es ist also die **Ausflußgeschwindigkeit** gleich der Endgeschwindigkeit eines Körpers, welcher von einer der Druckhöhe gleichen Höhe frei herabfällt, und das Ausflußquantum gleich dem Inhalte eines Prismas, welches den Querschnitt der Mündung oder des Strahles zur Basis, die Ausflußgeschwindigkeit aber zur Höhe hat.

Ist die Oberfläche G des Wasserspiegels nicht mindestens 10mal so groß als der Querschnitt der Ausflußmündung, so muß man $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$ setzen.

Beim Ausflusse des Wassers aus einem Gefäße A, Fig. 219, in ein Gefäß B hat man statt h den Niveauabstand CD der Wasserspiegel einzuführen.

Fig. 219.



Ist ferner über dem Wasserspiegel des Ausflußgefäßes ein anderer Druck vorhanden als vor der Ausmündung, so hat man noch zu h die Differenz dieser Drücke zu addiren. Mündet z. B. die Ausflußöffnung in einen Raum aus, wo ein durch eine Wassersäule gemessener Luftdruck a_1 statt hat, während die Atmosphäre auf dem Wasserspiegel mit der Wasser-Barometerhöhe a drückt, so hat man $v = \sqrt{2g(h + a - a_1)}$ zu setzen.

Drückt ein Kolben K, Fig. 220, auf den Wasserspiegel G eines Ausflußgefäßes mit einer Kraft P, also auf jeden Quadratzoll derselben mit der Kraft $p = \frac{P}{G}$ die dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe $\frac{p}{\gamma} = \frac{P}{G\gamma}$ zu setzen ist, so hat man

Fig. 220.



$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g\left(h + \frac{P}{G\gamma}\right)},$$

und wenn die Mündung F nicht sehr klein gegen G ist:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Umgekehrt ist $h + \frac{p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$, und für einen anderen Querschnitt G_1, und die Höhe h_1 über der Mündung: $h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$, daher endlich der hydraulische Druck an irgend einer Stelle:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + h - h_1 - \left[\left(\frac{F}{G}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

= hydrostatischer Druck minus Differenz der Geschwindigkeitshöhen entsprechend der Geschwindigkeit an eben dieser Stelle und der an dem Wasserspiegel.

Bei dem Ausfluß durch einen Wandeinschnitt ist die mittlere Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$, wenn h die Tiefe der Ueberfallschwelle oder unteren Kante des Einschnittes unter dem Wasserspiegel bezeichnet. Ist nun noch b die Breite dieser Abflußöffnung, so hat man das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{2}{3}\, b\, h \sqrt{2gh}.$$

Für den Ausfluß durch eine rectanguläre Seitenöffnung, deren horizontale Seitenkanten um die Tiefen h_1 und h_2 vom Wasserspiegel abstehen, ist:

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2},$$

und annähernd, wenn man die Oeffnungshöhe $h_1 - h_2 = a$ und die mittlere Druckhöhe $\frac{h_1 + h_2}{2} = h$ einführt:

$$v = \left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right] \sqrt{2gh}.$$

Für den Ausfluß durch eine kreisrunde Mündung,

deren Halbmesser $= r$ ist und deren Mittelpunkt um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel liegt, ist:

$$v = \left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \tfrac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \,.\,.\right]\sqrt{2gh}.$$

§. 31. Contraction der Wasserstrahlen.

Ist die Ausflußöffnung sehr glatt und genau abgerundet, so fließt das Wasser aus derselben in parallelen Fäden und mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}96 v$ bis $0{,}98 v$ aus, welche nur um 4 bis 2 Procent kleiner ist als die theoretische Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$.

Fließt hingegen das Wasser durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand, so fließt das Wasser in convergenten, einen contrahirten Wasserstrahl bildenden Fäden aus, und es ist der Querschnitt F_1 des Strahles in einiger Entfernung von der Mündung ungefähr nur $0{,}64\, F$ oder 64 Procent von dem der Mündung, also bei einer kreisförmigen Oeffnung die kleinste Dicke des Strahles nur 0,8 von der Weite der Mündung. Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ zwischen dem Querschnitte des Wasserstrahles und dem der Mündung den Contractionscoefficienten und bezeichnet es durch α, hat also hier ungefähr $\alpha = 0{,}64$. Hiervon ist noch der Geschwindigkeitscoefficient φ, d. i. das Verhältniß der effectiven Geschwindigkeit v_1 zu der theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ und der Ausflußcoefficient μ, nämlich das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge Q_1 zur theoretischen $Q = F\sqrt{2gh}$ zu unterscheiden. Man hat also:

$$\alpha = \frac{F_1}{F},\ \varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2gh}} \text{ und } \mu = \frac{F_1 v_1}{F v} = \alpha\,\varphi.$$

Endlich ist noch der Widerstandscoefficient ζ, nämlich das Verhältniß der verlorenen Geschwindigkeitshöhe

$\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^{\,2}}{2g}\right)$ zur effectiven Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^{\,2}}{2g}$ in Betracht zu ziehen. Da $v_1 = \varphi v$, also $v = \frac{v_1}{\varphi}$, so hat man auch $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$, so wie umgekehrt $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$.

Für den Ausfluß durch Mündungen in der dünnen Wand ist im Mittel zu setzen:

$$\alpha = 0{,}64; \qquad \varphi = 0{,}96,$$
$$\mu = 0{,}615 \quad \text{und} \quad \zeta = 0{,}085.$$

Uebrigens sind diese Coefficienten bei verschiedenen Druckhöhen und verschiedenen Mündungen nicht genau dieselben, namentlich sind die Ausflußcoefficienten für kleine Mündungen und für kleine Druckhöhen größer als 0,615. Am genauesten brennt man durch Poncelet und Lesbros die Ausflußcoefficienten für rectanguläre Seidenmündungen von 2 Decimeter (ungefähr 8 Zoll) Breite und 0 bis 2 Decimeter Höhe. Dieselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt, und letztere setzt voraus:

1) Daß das Wasser vor der Mündungswand ziemlich in Ruhe befindlich, diese Wand also gegen die Mündung sehr groß sei.
2) Daß die Druckhöhe bis Mitte der Mündung und nicht unmittelbar in der Mündungsebene, sondern einige Fuß oberhalb derselben gemessen worden sei.

I.
Tabelle der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Mündungen in der dünnen Wand.

Wasserstand üb. der obern Kante der Mündung.	Oeffnungshöhen.					
	8 Zoll.	4 Zoll.	2 Zoll.	1½ Zoll	1 Zoll.	½ Zoll.
Zoll.						
½	0,567	0,592	0,605	0,620	0,643	0,690
¾	0,570	0,595	0,612	0,625	0,644	0,684
1	0,573	0,598	0,616	0,627	0,646	0,679
1½	0,580	0,602	0,620	0,632	0,647	0,673
2	0,583	0,605	0,624	0,633	0,647	0,671
3	0,587	0,608	0,628	0,634	0,645	0,664
4	0,590	0,610	0,629	0,633	0,643	0,661
5	0,592	0,612	0,629	0,633	0,643	0,659
6	0,594	0,613	0,630	0,632	0,640	0,655
8	0,596	0,614	0,630	0,631	0,639	0,653
10	0,597	0,615	0,630	0,631	0,638	0,651
1 Fß.	0,598	0,615	0,629	0,631	0,837	0,648
1¼	0,600	0,616	0,628	0,630	0,635	0,645
1½	0,601	0,616	0,628	0,629	0,635	0,641
1¾	0,602	0,616	0,628	0,629	0,634	0,641
2	0,603	0,617	0,627	0,628	0,633	0,640
2½	0,604	0,616	0,627	0,628	0,632	0,637
3	0,604	0,615	0,626	0,627	0,631	0,634
4	0,603	0,614	0,623	0,625	0,626	0,625
5	0,602	0,612	0,619	0,620	0,619	0,616
6	0,601	0,608	0,614	0,614	0,613	0,611
8	0,601	0,605	0,608	0,610	0,610	0,611
10	0,601	0,603	0,605	0,606	0,607	0,609

Für den Ausfluß durch einen rectangulären Einschnitt in der dünnen Wand (Ueberfall) sind die Coefficienten nach Poncelet und Lesbros in folgender Tabelle aufgeführt.

Diese Coefficienten wurden durch Versuche mit einem Wandeinschnitte von 2 Decimeter oder circa 8 Zoll Breite angestellt. Bei Anwendung dieser Tabelle ist zu beachten:

1) Daß der Einschnitt in einer großen ebenen Wand befindlich sein, also das Wasser vor derselben fast stillstehen muß.
2) Daß die Druckhöhe vom Wasserspiegel bis Schwelle oder untere Kante der Mündung, und zwar einige Fuß vor der Mündungswand, oberhalb der Senkung des Wasserspiegels, zu messen ist.

II.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Einschnitte in der dünnen Wand.

Druckhöhe h in Zollen.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	6	8
Ausflußcoefficient $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu$	0,422	0,414	0,407	0,404	0,397	0,395	0,393	0,390

Bei Anwendung der in den vorstehenden Tabellen enthaltenen Coefficienten hat man mit den Formeln:

1) $Q = \mu F \sqrt{2gh} = \mu a b \sqrt{2gh}$,

2) $Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2gh^3} = \mu_1 b \sqrt{2gh^3}$

zu rechnen, und es ist b die möglichst wenig von 8 Zoll abweichende Breite, a die Höhe der Oeffnung, h aber in 1) bis Mitte, in 2) bis untere Kante der Mündung zu messen.

Beispiele. 1) Welches Wasserquantum fließt durch eine rectanguläre Mündung von 8 Zoll Breite und 3 Zoll Höhe, wenn der Wasserspiegel 4 Fuß über der unteren Kante dieser Mündung steht? Es ist hier $F = \frac{8.3}{144} = \frac{1}{6}$ Quadratfuß; ferner die Druckhöhe $h = 4 - \frac{3}{24} = 3,876$ Fuß, und nach der ersten Tabelle $\mu = \frac{0,614 + 0,623}{2}$

= 0,6185 zu nehmen, daher das gesuchte Wasserquantum $Q = 0,6185 \cdot \frac{1}{6} \cdot 7,906 \sqrt{3,876} = 0,815 \cdot 1,968 = 1,604$ Cubikfuß pr. Secunde.

2) Welches Wasserquantum fließt durch einen Wandeinschnitt von 9 Zoll Breite, wenn das Wasser 6 Zoll über der Schwelle steht? Es ist hier $b = 9$ Zoll $= \frac{3}{4}$ Fuß, $h = 6$ Zoll $= \frac{1}{2}$ Fuß, daher nach der zweiten Tabelle $\mu_1 = 0,393$ und $Q = 0,393 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7,906 \sqrt{(\frac{1}{2})^3} = 2,331 \cdot 0,35355 = 0,824$ Cubikfuß pr. Secunde.

§. 32. Unvollkommene Contraction.

Der Contractionscoefficient nimmt zu, wenn die dünne Wand, worin sich die Mündung befindet, nach der Mündung zu unter 180°, aber ab, wenn sie über 180° convergirt und ist auch größer, wenn die Contraction auf einer oder mehreren Seiten der Mündung ganz aufgehoben ist. Im letzteren Falle hat man es mit der unvollständigen Contraction zu thun. Bei derselben findet also ein stärkerer Ausfluß, zugleich auch noch eine schiefe Richtung des Strahles Statt.

Ist n das Verhältniß des eingefaßten Theiles vom Mündungsumfang, wo also eine Contraction nicht statthat, zum ganzen Umfang der Mündung, μ_n der entsprechende Ausflußcoefficient und μ_0 der bei vollständiger Contraction, so kann man setzen:

$$\mu_n = (1 + 0,143 \cdot n)\, \mu_0.$$

Unvollkommene Contraction der Wasserstrahlen tritt ein, wenn die Mündung einen ansehnlichen Theil von der Wand einnimmt, in welcher dieselbe befindlich ist, wenn also das Wasser vor der Mündung nicht als stillstehend angesehen werden kann, sondern an derselben mit einer ansehnlichen Geschwindigkeit ankommt. Bezeichnet man das Verhältniß $\frac{F}{F_1}$ des Querschnittes F der Mündung zur

Wandfläche oder zum Querschnitte F_1 des ankommenden Wassers durch n, so hat man den Ausflußcoefficienten zu setzen, für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0 \, [1 + 0{,}04564 \, (14{,}821^n - 1)],$$

für rectanguläre:

$$\mu_n = \mu_0 \, [+ 0{,}0760 \, (9^n - 1)],$$

Folgende Tabellen geben die Correctionen $\mu_n - \mu_0$ an, um welche die Ausflußcoefficienten μ_0 für vollkommene Contraction zu vergrößern sind, um die Coefficienten μ_n für unvollkommene Contraction zu erhalten.

Tabelle I.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Mündungen.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_n} = 0,$	014	034	059	092	134	189	260	351	471

Tabelle II.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Mündungen.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,$	019	042	071	107	152	208	278	365	473

Die Coefficienten in den vorstehenden Tabellen setzen voraus, daß die Druckhöhe an einer Stelle gemessen worden sei, wo das Wasser ziemlich still steht; wird sie aber an einer Stelle vor der Mündung F gemessen, wo der Quer-

schnitt des Wasserstromes F_1, die Geschwindigkeit also $= \frac{F}{F_1} v$ ist, so hat man für die Poncelet'schen Mündungen zu setzen:

$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,641 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = 0,641\ n^2$, und daher

$$Q = \left[1 + 0,641 \left(\frac{a b}{a_1 b_1}\right)^2\right] \mu_0\ a b \sqrt{2g \left(h - \frac{a}{2}\right)}$$

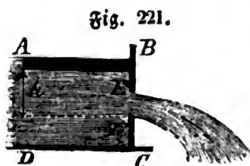


Fig. 221.

wo a und b Höhe und Breite der Mündung $EF = F$, Fig. 221, a_1 und b_1 Höhe und Breite des ankommenden Wasserstromes $ABCD$, h aber die Tiefe der unteren Mündungskante unter dem Wasserspiegel bezeichnet.

Tabelle III.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Mündungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_n} = 0,$	002	006	014	026	040	058	103	160

Für Poncelet'sche Ueberfälle, Fig. 222, hat man

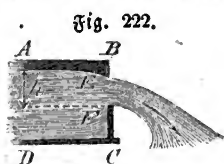


Fig. 222.

$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1,718 \left(\frac{F}{F_1}\right)^4 = 1,718\ n^4$, für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, aber

$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,041 + 0,369 n^2$

zu setzen.

Es ist hiernach die Ausflußmenge im ersten Falle:

$Q_1 = \frac{2}{3}\left[1+1{,}718\left(\frac{hb}{a_1 b_1}\right)^4\right]\mu_0 b\sqrt{2gh^3}$, und im zweiten

$Q_1 = \frac{2}{3}\left[1{,}041 + 0{,}369\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right]\mu_0 b\sqrt{2gh^3}$, wobei

die Bezeichnungen die obigen sind.

Tabelle IV.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Ueberfälle.

n	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$=0,	000	001	003	007	014	026	044	070	107

Tabelle V.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle über die ganze Wand, ohne Seitencontractionen.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$=0,	041	042	045	049	056	064	074	100	133

Beispiel 1. Welches Wasserquantum gibt die Mündung im Beispiel 1. des vorigen Paragraphen, wenn sie in einer ebenen Wand von 10 Zoll Breite und 6 Zoll Höhe ausgeschnitten ist? Hier ist $n = \frac{F}{F_1} = \frac{8.3}{10.6} = 0{,}4$, daher nach Tabelle II. $\frac{\mu_{0,4} - \mu_0}{\mu_{0,4}} = 0{,}107$, und das oben gefundene Wasserquantum $Q = 1{,}604$ Cubik-Fuß um

0,107 . 1,604 = 0,172 Cubik-Fuß größer, also im Ganzen = 1,604 + 0,172 = 1,776 Cubik-Fuß zu setzen.

Beispiel 2. Wenn der Ueberfall im Beispiel 2. des vorigen Paragraphen in einer ebenen Wand von 1¼ Fuß Breite ausgeschnitten ist, und die Ueberfall-Schwelle fünf Zoll über dem Gerinnboden steht, so hat man

$$n = \frac{F}{F_1} = \frac{9\ .\ 6}{15(6+5)} = \frac{54}{165} = 0{,}33,$$

daher die Correction der Ausflußmenge nach Tabelle IV.: 0,021 und $Q = 0{,}824 + 0{,}824 . 0{,}021 = 0{,}841$ Cub.-Fuß.

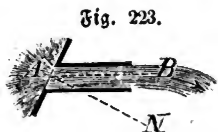
§. 33. Ausfluß durch kurze Ansatzröhren.

Für den Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre, welche 2- bis 3mal so lang als weit ist, hat man den Contractionscoefficienten $\alpha = 1$, daher den Ausflußcoefficienten μ = dem Geschwindigkeitscoefficienten φ, und zwar im Mittel = 0,815. Der entsprechende Widerstandscoefficient ist $\zeta = 0{,}505$.

Ragt die Röhre im Innern des Gefäßes vor und ist die Stirnfläche derselben schmal, so fällt μ noch kleiner aus, und es hört vielleicht gar der volle Ausfluß auf.

Ist die Röhre schief angesetzt, oder dieselbe innen schief abgeschnitten wie AB, Fig. 223, so wird μ kleiner, folglich ζ größer, und zwar um so mehr, je größer der Winkel $BAN = \delta$ ist, um welchen die Axe AB der Röhre von der Normale AN zur Einmündungsebene abweicht. Es ist überhaupt

Fig. 223.



$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}303\ sin.\ \delta + 0{,}226\ (sin.\ \delta)^2$$

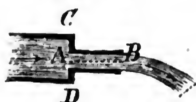
zu setzen, oder von folgender Tabelle I. Gebrauch zu machen.

Tabelle I.

Winkel δ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Widerstandscoefficient ζ	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
Ausflußcoefficient μ	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Sitzt die kurze Ansatzröhre AB, Fig. 224, in einer Wand, deren Inhalt F_1 den Querschnitt F der Röhre nicht vielfach übertrifft, so tritt das Wasser mit unvollkommener Contraction in die Röhre, und es findet deshalb eine Vergrößerung der Ausflußmenge Statt. Ist n das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{F_1}$ zwischen der Röhre und der Wand, so hat man:

Fig. 225.



$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3,$$

und hiernach Tabelle II., enthaltend die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kurze Ansatzröhren wegen Unvollkommenheit der Contraction.

Tabelle II.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,$	013	027	043	060	080	102	127	152	181

Bei conisch convergenten Ansatzröhren ist μ größer und bei conisch divergenten kleiner als bei kurzen cylindrischen

Ansatzröhren, wofern nur für F der Querschnitt der Ausmündung eingesetzt wird. Bei circa 13° Convergenz der conisch convergenten Röhre ist μ am größten und zwar $= 0{,}95$. Sehr kurze innen abgerundete oder nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke geben sogar $\mu = 0{,}97$ bis 0,98.

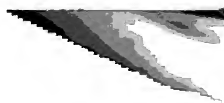
Beispiel. Welches Wasserquantum liefert eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 2½ Zoll Weite unter 5 Fuß Druck, wenn ihre Axe 25 Grad von der Normale zu ihrer Einmündungsebene abweicht? Es ist hier nach Tabelle I.
$\zeta = \frac{0{,}635 + 0{,}713}{2} = 0{,}674$, oder nach obiger Formel
$= 0{,}505 + 0{,}303 \sin. 25^0 + 0{,}226 (\sin. 25^0)^2$
$= 0{,}505 + 0{,}128 + 0{,}040 = 0{,}673$, daher
$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}673}} = 0{,}773$, ferner $F = \left(\frac{5}{24}\right)^2 . \frac{\pi}{4} = 0{,}03409$
Quadr.-Fuß und $\sqrt{h} = \sqrt{5} = 2{,}236$, daher das gesuchte Ausflußquantum $Q = 0{,}773 . 7{,}906 . 0{,}03409 . 2{,}236$ $= 0{,}4658$ Cubik-Fuß.

§. 34. Ausfluß durch lange Röhren.

Ist h das Gefälle vom Wasserspiegel bis Mitte der Ausflußmündung, oder, wenn Ausfluß unter Wasser statthat, von Wasserspiegel zu Wasserspiegel gemessen, ferner l die Länge und d die Weite der Röhrenleitung, ζ_1 der Widerstands- oder Reibungscoefficient der Röhre, ζ aber der für das Einmündungsstück, so hat man:

$$h = \left(1 + \zeta + \zeta_1 \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g} \text{ und umgekehrt:}$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta_1 \frac{l}{d}}}, \text{ übrigens auch } Q = \frac{\pi d^2}{4} v.$$



Der Reibungscoefficient ζ_1 ist $= 0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}$, und läßt sich am bequemsten aus folgender Tabelle entnehmen.

Tabelle I.

Coefficienten der Reibung des Wassers in Röhren.

v	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0
$\zeta_1 = 0{,}0$	679	522	453	383	362	333	313

v	1,5	2,0	3,0	5,0	8,0	12,0 Fuß.
$\zeta_1 = 0{,}0$	282	263	242	220	204	192

Der Coefficient des Eintrittswiderstandes ist wie für kurze Röhren 0,505; läßt sich aber durch Abrundung oder Eintrichtern auf 0,08 herabziehen und bei langen Röhren ganz vernachlässigen. Mit großem Vortheile kann man dann folgende Tabelle gebrauchen.

Tabelle II.

(Siehe Seite 458 und 459.)

Die Wassermengen und Druckhöhen für Röhrenleitungen von 1 bis 12 Zoll Weite bei 0,1 bis 10 Fuß Geschwindigkeit und 1000 Fuß Länge.

Tabelle II.

Geschwindigkeit des Wassers in Fußen	Innere Röhrenweite *d* in Zollen.					
	1	2	3	4	5	6
0,1	0,0327	0,1309	0,2945	0,5236	0,8181	1,1781
	0,1304	0,0657	0,0435	0,0326	0,0261	0,0217
0,2	0,0654	0,2618	0,5890	1.0472	1,6362	2,3562
	0,4011	0,2005	0,1337	0,1003	0,0802	0,0668
0,3	0,0982	0,3927	0,8836	1,5708	2,4544	3,5343
	0,7825	0,3912	0,2608	0,1956	0,1565	0,1304
0,4	0,1309	0,5236	1,1781	2,0944	3,2725	4,7124
	1,2638	0,6319	0,4213	0,3159	0,2527	0,2106
0,6	0,1963	0,7854	1,7671	3,1415	4,9087	7,0686
	2,5045	1,2522	0,8348	0,6261	0,5009	0,4174
0,8	0,2618	1,0472	2,3562	4,1888	6,5450	9,4248
	4,0910	2,0460	1,3670	1,0230	0,8182	0,6812
1,0	0,3272	1,3090	2,9452	5,2360	8,1812	11,781
	6,0115	3,0057	2,0038	1,5029	1,2023	1,0019
1,25	0,4091	1,6360	3,6820	6,5450	10,227	14,726
	8,8560	4,4280	2,9520	2,2140	1,7710	1,4760
1,5	0,4909	1,9635	4,4179	7,8540	12,272	17,671
	10,154	5,0770	3,3847	2,5385	2,0308	1,6923
1,75	0,5727	2,2907	5,1542	9,1630	14,317	20,617
	15,982	7,9910	5,3273	3,9955	3,1964	2,6637
2,0	0,6545	2,6180	5,8905	10,472	16,362	23,562
	20,237	10,113	6,7457	5,0592	4,0474	3,3728
2,5	0,8181	3,2725	7,3631	13,090	20,453	29,452
	30,110	15,055	10,037	7,5275	6,0220	5,0183
3,0	0,9817	3,9270	8,8357	15,708	24,544	35,343
	41,748	20,874	13,916	10,437	8,3496	6,9580
4,0	1,3090	5,2360	11,731	20,944	32,725	47,124
	70,195	35,098	23,398	17,549	14,039	11,699
5,0	1,6362	6,5450	14,726	26,180	40,906	58,905
	105,39	52,697	35,132	26,348	21,079	17,566
6,0	1,9635	7,8540	17,671	31,415	49,087	70,686
	147,226	73,613	49,075	36,806	29,445	24,538
8,9	2,6180	10,472	23,562	41,888	65,450	94,248
	150.33	125,165	83,443	62,582	50,066	41,722
10,0	3,2725	13,090	29,452	52,360	81,812	117,81
	379,02	189,51	126,34	94,750	75,804	63,170

Tabelle II.

Innere Röhrenweite *d* in Zollen.					
7	8	9	10	11	12
1,6035	2,0944	2,6507	3,2725	3,9597	4,7124
0,0186	0,0163	0,0145	0,01304	0,0118	0,0109
3,2070	4,1888	5,3014	6,5450	7,9195	9,4248
0,0573	0,0501	0,0446	0,0401	0,0365	0,03342
4,8106	6,2832	7,9522	9,8175	11,879	14,137
0,1118	0,0978	0,0869	0,0782	0,0711	0,0652
6,4141	8,3776	10,603	13,09	15,839	18,850
0,1805	0,1580	0,1404	0,1264	0,1149	0,1053
9,6211	12,566	15,904	19,635	23,758	28,274
0,3578	0,3131	0,2783	0,25045	0,2277	0,2087
12,828	16,755	21,206	26,180	31,678	37,699
0,5845	0,5114	0,4546	0,4091	0,3719	0,3409
16,035	20,944	26,507	32,725	39,597	47,124
0,8588	0,7514	0,6679	0,6012	0,5465	0,5010
20,044	26,180	33,134	40,906	49,496	58,905
1,2650	1,1070	0,9840	0,8856	0,8051	0,7380
24,053	31,416	39,761	49,087	59,396	70,686
1,4506	1,2692	1,1282	1,0154	0,9231	0,8462
2,8062	36,652	46,387	57,269	69,295	82.467
2,2831	1,9977	1,7758	1,5982	1,4529	1,3318
32,070	41,888	53,014	65,450	79,195	94,248
2,8910	2,5296	2,2485	2,0237	1,8397	1,6864
40,088	52,360	66,268	81,812	98,993	117,81
4,3014	3,7637	3,3457	3,0110	2,7373	2,5092
48,106	62,832	79,521	98,175	118,79	141,37
5,9640	5,2185	4,6387	4,1748	3,7953	3,4790
64,141	83,776	106,03	130,90	158,39	188,50
10,028	8,7740	7,7994	7,0195	6,3814	5,8495
80,176	104,72	132,54	163,62	197,99	235,62
15,056	13,174	11,710	10,5394	9,5813	8,783
96,211	125,66	159,04	196,35	237,58	282,74
21,032	18,403	15,247	14,723	13,384	12,268
128,28	167,55	212,06	261,80	316,78	376,99
35,761	31,291	27,814	25,033	22,757	20,861
160,35	209,44	265,07	327,25	395,97	471,24
54,150	47,380	42,113	37,902	34,46	31,585

Von den je zwei Zahlen, welche einer oben angegebenen Röhrenweite und links ausgedrückten Wassergeschwindigkeit entsprechen, gibt die obere das Ausflußquantum pr. Minute in Cubik-Fußen und der untere das Gefälle der Röhrenleitung auf je 1000 Fuß Länge derselben an.

Zu den angegebenen Gefällen oder Druckhöhen hat man überdies noch diejenige Druckhöhe zu addiren, welche nöthig ist, um das Wasser mit einer der Ausflußgeschwindigkeit gleichen Geschwindigkeit v in die Röhre einzuführen, und welche $= (1+\zeta)\frac{v^2}{2g} = 0{,}016\ (1+\zeta)\ v^2$, also gewöhnlich $= 0{,}016\ .\ 1{,}505\ v^2 = 0{,}024\ v^2$, oder bei genauer Abrundung der Eintrittsmündung $= 0{,}016\ .\ 1{,}08\,v^2 = 0{,}017\,v^2$ zu setzen ist.

Beispiel 1. Welches Wasserquantum gibt eine Röhrenleitung von 2500 Fuß Länge und 3 Zoll Weite bei $3\frac{1}{2}$ Fuß Gefälle? Nach der Formel $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta+\zeta_1\frac{l}{d}}}$ ist, wenn man $h = 3{,}5$, $\zeta = 0{,}505$, $\frac{l}{d} = \frac{2500}{\frac{1}{4}} = 10000$ und vorläufig $\zeta_2 = 0{,}030$ setzt, die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{7{,}906\ \sqrt{3{,}5}}{\sqrt{1{,}505+0{,}03\,.\,10000}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3{,}5}{301{,}5}}$$

$$= \frac{7{,}906}{\sqrt{86{,}2}} = \frac{7{,}906}{9{,}28} = 0{,}85.$$

Der Geschwindigkeit 0,85 entspricht aber genauer $\zeta = 0{,}0328$, daher ist richtiger:

$$v = 7{,}906\sqrt{\frac{3{,}5}{329{,}5}} = \frac{7{,}906}{\sqrt{94{,}1}} = \frac{7{,}906}{9{,}7} = 0{,}815 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge pr. Sec. $Q = \frac{\pi d^2}{4}\ .\ v$ $= 0{,}04909\ .\ 0{,}815 = 0{,}04$ Cubikfuß, also pr. Min. $60\ Q = 2{,}4$ Cubikfuß. Die Tabelle II. gibt für eine dreizöllige

Röhre bei 1,367 Fuß Gefälle auf 1000 Fuß Länge, $v = 0{,}8$ und $60\ Q = 2{,}356$; bei 2,004 Fuß Gefälle aber $v = 1{,}0$ und $60\ Q = 2{,}945$, daher für das gegebene Gefälle $\frac{3{,}5}{2{,}5} = 1{,}4$, durch Interpolation $v = 0{,}8 + \frac{33}{637} \cdot 0{,}2$ $= 0{,}810$ Fuß und $60\ Q = 2{,}356 + \frac{33}{637} \cdot 0{,}589$ $= 2{,}356 + 0{,}031 = 2{,}387$ Cubikfuß. Nimmt man aber noch das zur Erzeugung der Geschwindigkeit 0,81 Fuß nöthige Gefälle $0{,}024 \cdot 0{,}656 = 0{,}016$ Fuß in Betracht, setzt man also das Gefälle $\frac{3{,}5 - 0{,}016}{2{,}5} = 1{,}394$ Fuß, so hat man $v = 0{,}8 + \frac{27}{637} \cdot 0{,}2 = 0{,}809$ Fuß und $60\ Q$ $= 2{,}390$ Cubikfuß. Dieselben Werthe gibt auch die Formel, wenn man für ζ_1 den angemessenen Werth 0,0332 einsetzt.

Beispiel 2. Welches Gefälle wird erfordert, um durch eine 5 Zoll weite und 750 Fuß lange Röhrenleitung pr. Min. 20 Cubikfuß Wasser fortzuleiten. Die Tabelle gibt in der Vertikalcolumne mit der Ueberschrift 5, für $60\ Q$ $= 20{,}453$, $v = 2{,}5$ und $1000\ h = 6{,}022$; für $60\ Q$ $= 16{,}362$ dagegen $v = 2{,}0$ und $1000\ h = 4{,}0474$, und hiernach interpolirt sich für $60\ Q = 20$, $v = 2{,}5 - \frac{453}{4091} \cdot 0{,}5$ $= 2{,}5 - 0{,}055 = 2{,}445$ Fuß und

$$1000\ h = 6{,}022 - \frac{453}{4091} \cdot 1{,}9746 = 6{,}022 - 0{,}219$$

$= 5{,}803$ Fuß, folglich für die gegebene Länge $= {}^3/_4 \cdot 5{,}803$ $= 4{,}352$ Fuß, und hierzu noch das Gefälle zur Erzeugung der Geschwindigkeit, d. i. $0{,}024 \cdot 2{,}5^2 = 0{,}15$ Fuß gerechnet, folgt das ganze Gefälle $h = 4{,}502$ Fuß.

Beispiel 3. Welche Weite muß eine Röhrenleitung von 500 Fuß Länge erhalten, die bei einem Gefälle von $^1/_2$ Fuß pr. Minute 10 Cubikfuß Wasser abführt? Es ist hier $1000\ h = 1$ und $60\ Q = 10$, und nach der Tabelle

jedenfalls eine Weite von 5 bis 6 Zollen anzuwenden. Die 5zöllige Röhre gibt beim Gefälle 1, das Wasserquantum

$$6{,}545 + \frac{1{,}000-0{,}818}{1{,}202-0{,}818} \cdot (8{,}181-6{,}545) = 6{,}545 + \frac{182 . 1{,}636}{384}$$

$= 6{,}545 + 0{,}775 = 7{,}320$ Cubikfuß; die 6zöllige hingegen $= 11{,}781 - \frac{1{,}002-1{,}000}{1{,}002-0{,}6812} \cdot (11{,}781 - 9{,}425)$

$= 11{,}781 - \frac{20 . 2{,}356}{3208} = 11{,}781 - 0{,}015 = 11{,}766$ C.-Fuß;

und hiernach folgt durch eine dritte Interpolation die Weite, bei welcher 10 Cubikfuß Wasser geliefert werden:

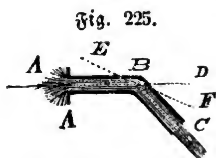
$$d = 5 + \frac{10-7{,}320}{11{,}766-7{,}320} \cdot 1 = 5 + \frac{2{,}68}{4{,}446} = 5{,}6 \text{ Zoll.}$$

§. 35. Knie- und krumme Röhren.

Beim Durchgang des Wassers durch ein Knie *ABC*, Fig. 225, erleidet dasselbe einen Verlust an Druckhöhe, welcher durch die Formel:

$$h = \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} = [0{,}9457\,(sin.\,\delta)^2 + 2{,}047\,(sin.\,\delta)^4]\,\frac{v^2}{2g}$$

Fig. 225.



angegeben wird, wenn δ den Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $ABE = CBF = \frac{1}{2}\,CBD$ bezeichnet. Folgende Tabelle enthält die entsprechenden Widerstandscoefficienten für eine Reihe von Bricolwinkeln.

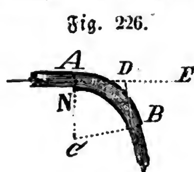
Tabelle I.

Die Coefficienten des Kniewiderstandes.

δ^0	10	20	30	40	45	50	60	70
ζ_2	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861	2.431

Gekrümmte Röhren geben bei gleichen Ablenkungswinkeln kleinere Druckverluste als Knieröhren. Ist β der Ablenkungs- oder Centriwinkel $BDE = ACB$, Fig. 226, eines solchen Rohres, so läßt sich der den Krümmungswiderstand messende Verlust an Druckhöhe

Fig. 226.



$= \zeta_3 \cdot \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \frac{v^2}{2g}$ setzen, und es ist der Coefficient ζ_3 von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite $AN = a$ zum Krümmungshalbmesser $CN = r$ abhängig.

Für Röhren mit kreisförmigem Querschnitte ist:

$\zeta_3 + 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}$ und mit rectangulärem Querschnitte $\zeta_3 = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}$ zu setzen.

Hiernach sind folgende Tabellen berechnet:

Tabelle II.

Die Coefficienten des Krümmungswiderstandes in cylindrischen Röhren.

$\frac{a}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ_3	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440

$\frac{a}{r}$	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_3	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle III.

Die Coefficienten des Krümmungswiderstandes in parallelepipedischen Röhren.

$\frac{a}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_3	0,12	0,14	0,18	0,25	0,40	0,64	1,02	1,55	2,27	3,23

Steigt das ausfließende Wasser in einem Strahle senkrecht auf, so hat es einen Luftwiderstand zu überwinden, weshalb die Sprunghöhe nicht die volle Geschwindigkeitshöhe erlangt. Erfahrungsmäßig ist diese Höhe $s = \left(1 - 0,00314 \cdot \frac{v^2}{2g}\right) \frac{v^2}{2g}$ zu setzen, wenn v die effective Ausflußgeschwindigkeit bezeichnet.

§. 36. Widerstände durch Verengungen.

Geht die Geschwindigkeit v_1 des Wassers plötzlich in eine andere Geschwindigkeit v über, so verliert es an Druck, welcher gemessen wird durch die Höhe: $h = \frac{(v_1 - v)^2}{2g}$.

Entspricht v_1 dem Röhrenquerschnitte F_1 und v dem Querschnitte F, so hat man $F_1 v_1 = F v$, und daher auch $h = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$, wo $\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2$ den entsprechenden Widerstandscoefficienten bezeichnet.

Diese Formel findet bei dem in Fig. 227 abgebildeten Falle seine unmittelbare Anwendung; bei dem in Fig. 228

Fig. 227.



Fig. 228.



abgebildeten Falle ist aber statt F_1, αF_1 einzuführen, weil

hier der durch die Mündung F_1 gehende Strahl eine Contraction erleidet, so daß er mit einem Querschnitte αF_1 in das Rohr vom Querschnitte F eintritt. Statt α sind die oben angegebenen Coefficienten für voll- oder unvollkommene Contraction einzusetzen.

Die Widerstände, welche das Wasser beim Durchgang durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile zu überwinden hat, sind hiernach ebenfalls zu beurtheilen, am bequemsten aber mit Hilfe der in folgenden Tabellen enthaltenen Coefficienten zu berechnen.

Fig. 229.

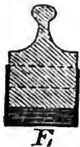


Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten für Schieber, Fig. 229, in parallelepipedischen Röhren.

$\frac{F_1}{F}$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ζ	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Fig. 230.

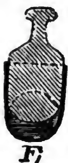


Tabelle II.

Die Widerstandscoefficienten für Schieber, Fig. 230, in cylindrischen Röhren.

Stellhöhe s	$^1/_8$	$^2/_8$	$^3/_8$	$^4/_8$	$^5/_8$	$^6/_8$	$^7/_8$
Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstandscoefficient ζ	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Tabelle III.

Fig. 231.



Die Widerstandscoefficienten für Hähne, Fig. 231, in parallelepipedischen Röhren.

Stellwinkel	10°	20°	30°	40°	50°	55°	$66\frac{3}{4}$°
$\frac{F_1}{F}$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0,110	0
ζ	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	275	∞

Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für einen Hahn im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel	10°	20°	30°	40°	50°	60°	65°	$82\frac{1}{8}$°
$\frac{F_1}{F}$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
ζ	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞

Tabelle V.

Fig. 232.



Die Widerstandscoefficienten für Drosselventile, Fig. 232, im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	90°
$\frac{F_1}{F}$	0,826	0,658	0,500	0,357	0,234	0,134	0,060	0
ζ	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	∞

Tabelle VI.

Die Widerstandscoefficienten für Drosselventile im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	90°
$\frac{F_1}{F}$	0,826	0,658	0,500	0,357	0,234	0,134	0,060	0
ζ	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞

Für den Durchgang des Wassers durch ein Kegelventil, wie Fig. 233, hat man, wenn F den Querschnitt der Röhre und F_1 den der Apertur ausdrückt:

$$\zeta = \left(1{,}645 \frac{F}{F_1} - 1\right)^2, \text{ z. B. für } F_1 = 0{,}4\ F$$

$$\zeta = 3{,}11^2 = 9{,}6.$$

Fig. 233.



Fig. 234.



Der Ausschub des Ventiles muß wenigstens der halben Weite der Apertur gleich sein. Die Ventilklappe, Fig. 234, gibt bei 45° Eröffnung ziemlich denselben Widerstandscoefficienten.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert eine Röhrenleitung von 600 Fuß Länge und ½ Fuß Weite mit 2 rechtwinkeligen Knien und mehreren Krümmungen von ½ Fuß Krümmungshalbmesser, zusammen 400° einnehmend, bei 11 Fuß Druckhöhe, wenn das in ihr sitzende Drosselventil auf 30° gestellt ist. Führen wir $\zeta_1 = 0{,}025$ ein, so erhalten wir für die Reibung in der Röhre:

$$\zeta_1 \frac{l}{d} = 0{,}025 \cdot \frac{600}{\frac{1}{2}} = 30;$$

ferner ist für die beiden Knie $\zeta_2 = 2 \cdot 0{,}984 = 1{,}97$, für die krummen Rohrstücke $\zeta_3 = \frac{400}{180} \cdot 0{,}294 = 0{,}65$, und endlich für den Durchgang durch das Drosselventil der Widerstandscoefficient $\zeta_4 = 3{,}91$; daher

$$1 + \zeta + \zeta_1 \frac{l}{d} + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 1{,}50 + 30 + 6{,}53 = 38{,}03,$$

und $v = 7{,}906 \sqrt{\frac{11}{38{,}03}} = 4{,}25$. Der Geschwindigkeit $v = 4{,}25$ Fuß entspricht aber $\zeta_1 = 0{,}0227$, also $\zeta_1 \frac{l}{d} = 27{,}24$, daher ist schärfer $v = 7{,}906 \sqrt{\frac{11}{35{,}27}} = 4{,}415$. Nimmt man $v = 4{,}42$, so folgt nun das Wasserquantum pr. Min.: $Q = 60 \cdot \frac{\pi d^2}{4} v = 60 \cdot 0{,}19635 \cdot 4{,}42 = 52{,}1$ C.-Fß.

§. 37. Ausfluß unter abnehmendem Drucke.

Bei dem Ausflusse des Wassers aus einem prismatischen Gefäße, welches keinen Zufluß erhält, sinkt der Wasserspiegel gleichförmig verzögert, und es ist die Zeit des ganzen Abflusses oder Leerens:

$$t = \frac{2\,G\,h}{\mu F \sqrt{2\,g\,h}} = \frac{2\,G\,h}{Q},$$

wenn G den horizontalen Querschnitt des Gefäßes, h die anfängliche Druckhöhe, F die Ausflußöffnung und Q das der anfänglichen Ausflußgeschwindigkeit entsprechende Ausflußquantum pr. Sec. bezeichnet.

Die Ausflußzeit t, innerhalb welcher die Druckhöhe h_1 in h_2 übergeht, der Wasserspiegel also um $h_1 - h_2$ sinkt, ist

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2\,g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = 0{,}253 \frac{G}{\mu F} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Umgekehrt ist $h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu \sqrt{2\,g} \cdot F}{2\,G}\, t\right)^2$.

Dieselben Formeln gelten auch beim Füllen eines prismatischen Gefäßes durch Zufluß aus einem sehr großen Reservoir, Fig. 235. Ist das Reservoir nicht sehr weit und sein Querschnitt G_1, so hat man die Zeit, innerhalb welcher sich der Niveauabstand h_1 in h_2 umändert:

$$t = \frac{2\,G\,G_1\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{\mu\,\sqrt{2g}\,.\,F(G+G_1)}.$$

Hiernach bestimmen sich auch die Zeiten zum Füllen und Leeren der Schleusen. Ist G der horizontale Quer-

Fig. 235.

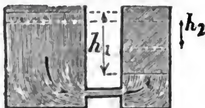
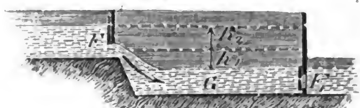


Fig. 236.



schnitt der Schleusenkammer, Fig. 236, F der Inhalt der Schutzöffnung, h_1 die Tiefe des Unterwasserspiegels unter und h_2 die Höhe des Oberwasserspiegels über der Mitte der Schutzöffnung, so hat man die Zeit zum Anfüllen der Schleuse:

$$t = \frac{(h_1 + 2\,h_2)\,G}{\mu\,F\,\sqrt{2\,g\,h_2}},$$

und dagegen die zum Leeren derselben:

$$t = \frac{2\,G\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu\,F\sqrt{2g}}.$$

Um die Ausflußverhältnisse unregelmäßiger Gefäße anzugeben, bedient man sich der Simpson'schen Regel. Sind G_0, G_1 und G_2 drei Querschnitte, je zwei um $\frac{s}{2}$ von einander abstehend, und sind h_0, h_1, h_2 die Höhen dieser Querschnitte über der Mündung F, so hat man hiernach zu setzen:

$$t = \frac{s}{6\,\mu\,F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{G_2}{\sqrt{h_2}}\right), \text{ und}$$

$$Q = \frac{s}{6}\,(G_0 + 4\,G_1 + G_2), \text{ auch}$$

$$= \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{6}\,(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$

Beispiel. In welcher Zeit sinkt ein Teichspiegel um 3 Fuß, wenn sein Inhalt bei der anfänglichen Druckhöhe $h_0 = 20$ Fuß, $G_0 = 600000$ Quadratfuß, bei der mittleren Druckhöhe $h_1 = 18{,}5$ Fuß, $G_1 = 495000$ Q.-Fuß und bei der endlichen Druckhöhe $h_2 = 17$ Fuß, $G_2 = 410000$ Q.-Fuß beträgt, der Querschnitt des Abzuggerinnes = 0,8 Q.-Fuß und der Ausflußcoefficient für diesen 0,5 beträgt? Es ist:

$$t = \frac{3\,.\,0{,}1265}{6\,.\,0{,}5\,.\,0{,}8}\left(\frac{600000}{\sqrt{20}} + \frac{4\,.\,495000}{\sqrt{18{,}5}} + \frac{410000}{\sqrt{17}}\right)$$

$$= \frac{0{,}1265}{0{,}8}\,(134160 + 460340 + 99440) = 0{,}1581\,.\,693940$$

$= 109710'' = 30$ St. $28\frac{1}{2}$ Min.,

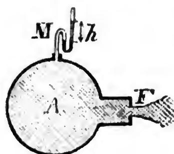
und das entsprechende Abflußquantum:

$Q = \frac{1}{2}\,(600000 + 4\,.\,495000 + 410000) = 1495000$ C.-Fuß.

§. 38. Ausfluß der Luft.

Ist p_1 der Druck der in einem Gefäße A, Fig. 237, eingeschlossenen Luft und p der Druck der äußeren Luft, γ aber die Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft, und γ_1 die Dichtigkeit derselben, unter dem äußeren Drucke gemessen, so hat man die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft unter dem Drucke p ausströmt:

Fig. 237.



$$v = \sqrt{2\,g\frac{p}{\gamma}\ log.\ nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

$$\text{auch} = \sqrt{2\,g\frac{p_1}{\gamma_1}\ log.\ nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

Ist b der äußere Barometerstand, und h der Manome-

terstand, also $b_1 = b + h$ der innere Barometerstand, so hat man auch $v = \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} \; log.\ nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}$, bei mäßigen Spannungen annähernd statt $\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{1{,}2573}$ gesetzt, folgt für die atmosphärische Luft von der Temperatur t:

$$v = 395 \sqrt{(1 + 0{,}00367\,t)\; log.\ nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Meter}$$

$$= 1258 \sqrt{(1 + 0{,}00367\,t)\; log.\ nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Fuß;}$$

für Wasserdämpfe sind statt 395 und 1258 die Coefficienten 500,6 und 1595 einzusetzen.

Bei mäßigen Manometerständen läßt sich auch setzen:

$$v = 1258 \left(1 - \frac{h}{4b}\right) \sqrt{(1 + 0{,}00367\,t)\,\frac{h}{b}},$$

und bei kleinen Spannungen gar:

$$v = 1258 \sqrt{(1 + 0{,}00367\,t)\,\frac{h}{b}} \text{ Fuß.}$$

Ist F der Mündungsquerschnitt und μ der Ausflußquerschnitt, so hat man das Ausströmungsquantum pr. Sec., gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = \mu F v,$$

gemessen unter dem inneren Drucke:

$$Q_1 = \frac{b\,Q}{b+h} = \frac{\mu F v \,.\, b}{b+h},$$

endlich auf Null Grad Wärme und eine Atmosphäre Spannung zurückgeführt:

$$Q_2 = \frac{b}{28} \cdot \frac{Q}{1 + 0{,}00367\,t}$$

$$= 1258 \cdot \frac{b}{28}\,\mu\,F \sqrt{\frac{log.\ nat.\ (b+h) - log.\ nat.\ b}{1 + 0{,}00367\,t}}.$$

Es ist zu setzen: für Mündungen in der dünnen Wand $\mu = 0{,}58$, für kurze cylindrische Ansatzröhren $\mu = 0{,}74$, und für kurze conische $\mu = 0{,}85$.

Setzen wir $t = 0$, so erhalten wir für den Ausfluß der atmosphärischen Luft Folgendes:

$\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b} =$	1,01	1,02	1,03	1,05	1,07	1,10	1,15
v in Fußen =	125,5	177	216	278	327	388	470

$\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b} =$	1,20	1,30	1,50	2,0	3,0	4,0	5,0
v in Fußen =	537	644	801	1047	1319	1481	1596

Bei der Bewegung der Luft durch eine Röhrenleitung findet ein Spannungsverlust Statt, welcher wie bei der Bewegung des Wassers in Röhren zu beurtheilen ist.

Ist d die Weite der Leitungsröhre, l die Länge derselben und d_1 die Weite der Ausmündung, so hat man bei dem Stande h_2 eines Manometers am Ende der Leitungsröhre die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2g\frac{p}{\gamma}\,log.\,nat.\left(\frac{b+h_2}{b}\right)}{1-\left(\frac{b}{b+h_2}\right)^2\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$$ zu setzen;

es ist dagegen bei dem Stande h_1 eines Manometers am Anfang der Leitungsröhre:

$$v = \sqrt{\frac{2g\frac{p}{\gamma}\,log.\,nat.\left(\frac{b+h_1}{b}\right)}{1+\left[0{,}024\frac{l}{d}-\left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2\right]\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}},$$

und endlich bei dem Manometerstande h im Reservoir vor der Röhre:

$$v = \sqrt{\frac{2g\frac{p}{\gamma}\,log.\,nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+0{,}024\frac{l\,d_1{}^4}{d^5}}},$$

oder wenn ζ_1 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungs- und ζ_2 den für das Ausmündungsstück bezeichnet:

$$v = 1258 \sqrt{\frac{(1 + 0{,}00367\ t)\ log.\ nat.\ \left(\frac{b+h}{b}\right)}{1 + \zeta_2 + \left(\zeta_1 + 0{,}024\ \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}\ \text{Fuß.}$$

Beispiel. Welches Windquantum liefert ein Gebläse, wenn der Manometerstand im Regulator = 3,5 Zoll, der Barometerstand 27,5 Zoll, die Temperatur 15°, ferner die Länge der Windleitung 150 Fuß, ihre Weite ½ Fuß, und die Weite der conischen Ausmündung 2½ Zoll beträgt? Es ist

$$(1+0{,}00367\ t)\ log.\ nat.\ \left(\frac{b+h}{b}\right) = 1{,}055\ log. nat. \left(\frac{310}{275}\right)$$

$$= 1{,}055\ .\ 0{,}12 = 0{,}1266,\ \text{ferner}$$

$$1+\zeta_2 + \left(\zeta_1 + 0{,}024\ \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4$$

$$= 1{,}38 + (0{,}83 + 0{,}024 . 150 . 2)\left(\frac{5}{12}\right)^4 = 1{,}38 + \frac{8{,}03 . 25^2}{144^2}$$

$= 1{,}38 + 0{,}24 = 1{,}62$, daher die Ausflußgeschwindigkeit

$v = 1258 \sqrt{\frac{0{,}1266}{1{,}62}} = 351{,}7$ Fuß, und das Ausflußquantum: $Q = \frac{\pi\, d_1^{\,2}}{4}\ v = 0{,}0341\ .\ 351{,}7 = 12$ C.-Fuß.

§. 39. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen.

Ist Q das Wasserquantum, welches durch den Querschnitt F fließt, so hat man die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F}.$$

Die Geschwindigkeit des Wassers innerhalb eines und desselben Querprofiles ist bei einem freifließenden Wasser im **Stromstrich** am größten und nimmt nach den Ufern

und nach dem Boden zu ab. Sind c_1, c_2, c_3 . . . die den einzelnen Theilen F_1, F_2, F_3 . . . des Querprofiles entsprechenden Geschwindigkeiten, so hat man:

$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \ldots, \text{ und}$$

$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}.$$

Annähernd läßt sich setzen, daß die Geschwindigkeit in einem Perpendikel vom Wasserspiegel bis Boden um 17 Procent abnehme, und die mittlere Geschwindigkeit in demselben um $8\frac{1}{2}$ Procent kleiner sei als an der Oberfläche, also 0,915 von dieser betrage. Setzen wir ebenso die mittlere Oberflächengeschwindigkeit = 0,915 mal der Geschwindigkeit c_0 im Stromstriche, so erhalten wir für die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = (0{,}915)^2 \,.\, c_0 = 0{,}84\, c_0 \,.;$$

genauer aber ist zu setzen:

$$c = \left(\frac{7{,}50 + c_0}{9{,}97 + c_0}\right) c_0 \text{ Fuß.}$$

Das vortheilhafteste Querprofil eines Kanales ist dasjenige, dessen mit Wasser benetzter Umfang bei bestimmtem Inhalte ein Minimum ist. Bei gegebenem Böschungswinkel Θ der Ufer ist für das vortheilhafteste Querprofil die Tiefe $a = \sqrt{\frac{F \sin.\Theta}{2 - \cos.\Theta}}$, und hiernach die untere Breite

$$b = \frac{F}{a} - a \cot g.\ \Theta.$$

Ist der Inhalt des Querprofiles = 1, so hat man für die verschiedenen Formen desselben die in folgender Tabelle gegebenen Verhältnisse. Bei einem Profile vom Inhalte F muß man die Werthe in den Columnen 3, 4, 5, 6 und 7 durch $\sqrt{F}$ multipliciren.

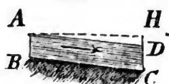
Tabelle I.
Dimensionen verschiedener Querprofile.

Böschungswinkel Θ	Relative Böschung n	Tiefe a	Untere Breite b	Absolute Böschung na	Obere Breite $b+2na$	Umfang p
90°	0	0,707	1,414	0	1,414	2,828
60°	0,577	0,760	0,877	0,439	1,755	2,632
45°	1,000	0,740	0,613	0,740	2,092	2,704
40°	1,192	0,722	0,525	0,860	2,246	2,771
36°,52′	1,333	0,707	0,471	0,943	2,357	2,828
35°	1,402	0,697	0,439	0,995	2,430	2,870
30°	1,732	0,664	0,356	1,150	2,656	3,012
26°,34′	2,000	0,636	0,300	1,272	2,844	3,144
Halbkreis	—	0,798	—	—	1,596	2,507

Hiernach hat man z. B. für ein Querprofil von 16 Quadratfuß bei 30° Uferböschung: die Tiefe $a = 0{,}664\sqrt{16} = 0{,}664 . 4 = 2{,}656$ Fuß, die untere Breite $b = 0{,}356 . 4 = 1{,}424$ Fuß, die absolute Böschung $na = 1{,}150 . 4 = 4{,}60$ Fuß, die obere Breite $b + 2na = 10{,}624$ Fuß, den Umfang des Querprofiles $p = 3{,}012 . 4 = 12{,}086$ Q.-Fuß, und den Quotienten $\frac{p}{F} = \frac{3{,}012}{4} = 0{,}753$.

Für die gleichförmige Bewegung des Wassers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 238, hat man das Gefälle

Fig. 238.



$DH = h = \zeta . \frac{lp}{F} . \frac{c^2}{2g}$, und daher umgekehrt die mittlere Geschwindigkeit in den sich überall gleichbleibenden Querprofilen: $c = \sqrt{\frac{F}{\zeta l p} . 2gh}$.

Bei den mittleren Geschwindigkeiten, welche von 1 Fuß nicht sehr abweichen, hat man $\zeta = 0{,}008$, daher für das Fußmaaß $h = 0{,}000128 \frac{lp}{F} c^2$ und $c = 88{,}4 \sqrt{\frac{Fh}{pl}}$;

nimmt man für $\frac{p}{F}$ den mittleren Werth

$\frac{2,8}{\sqrt{F}}$, so folgt $h = 0,0003584 \frac{1}{\sqrt{F}} c^2$, und

$c = 52,8 \sqrt{\frac{h \sqrt{F}}{l}}$, z. B. für den Abhang $\alpha = \frac{h}{l}$ $= 0,0001$ und für den Querschnitt $F = 16$ Quadratfuß, $c = 52,8 \sqrt{0,0004} = 1,056$ Fuß.

Am sichersten rechnet man mit den in folgender Tabelle aufgeführten Werthen von ζ.

Tabelle II.

Geschwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Widerstandscoefficient $\zeta = 0,0$	1202	1086	1017	0971	0938	0914	0894	0879

Geschwindigkeit c	$1\frac{1}{2}$	2	3	5	10 Fuß.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0,0$	0833	0810	0787	0769	0755

Setzt man die mittlere Breite des fließenden Wassers $= b$ und die mittlere Tiefe $= a = nb$, so hat man annähernd $p = b + 2a = (n+2)a$ und $F = ab = na^2$, daher $\frac{p}{F} = \frac{n+2}{na}$, folglich $Q = na^2 c$ und

$$h = \zeta \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Nimmt man nun $a = 1$ und $l = 1000$, so erhält man $Q = nc$ und $h = 1000\, \zeta \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{c^2}{2g}$. Hiernach ist folgende Tabelle (III.) berechnet, welche in der ersten von je zwei Zeilen die Wassermenge $60\,Q$ pr. Minute und in der zweiten das dem darüberstehenden n und davorstehenden c entsprechende Gefälle ausdrückt. Ist die Wassertiefe a, so muß man den in der Tafel aufgefundenen Werth von $60\,Q$

durch a^2 multipliciren und den von h durch a dividiren. Z. B. für einen Kanal von 5 Fuß mittlere Tiefe und 20 Fuß mittlerer Breite, also für $n = {}^{20}/_5 = 4$, ist bei 2 Fuß mittlerer Geschwindigkeit das Wasserquantum pr. Minute $= 480 \cdot 5^2 = 12000$ Cubikfuß, also pr. Secunde = 200 Cubikfuß, und das Gefälle pr. 1000 Fuß Länge $= \frac{0,7774}{5}$ $= 0,1555$ Fuß, also für 4000 Fuß Kanallänge $= 0,1555 \cdot 4$ $= 0,622$ Fuß $= 7,46$ Zoll. Soll umgekehrt in einem Kanale das Wasserquantum pr. Secunde 30 Cubikfuß, also pr. Min. 1800 Cubikfuß betragen, und das Querschnittsverhältniß $n = 5$ sein, so hat man bei einer Geschwindigkeit von 3 Fuß, $900 \cdot a^2 = 1800$, folglich $a = \sqrt{2} = 1,414$ Fuß, und das Gefälle auf 1000 Fuß Länge:

$$= \frac{1,5863}{a} = \frac{1,5863}{1,414} = 1,122 \text{ Fuß} = 13\tfrac{1}{2} \text{ Zoll, und}$$

$b = 5$ Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll. Soll in dem letzten Falle $h = 9$ Zoll $= 0,75$ Fuß betragen, so hat man die Dimensionen des Querprofiles auf folgende Weise zu ermitteln. Sind Q_1 und h_1 die in der Tabelle aufgeführten und 1 Fuß Tiefe entsprechenden Werthe, Q und h aber dieselben Größen bei a Fuß Tiefe, so hat man $Q = Q_1 a^2$ und $h = \frac{h_1}{a}$, daher

$$a^2 = \frac{Q_1}{Q} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2, \text{ oder } Q_1 h_1^2 = Q h^2.$$

Um nun a zu finden, sucht man in der mit n (5) überschriebenen Verticalcolumne diejenige Stelle auf, wo deren Werthe für Q_1 und h_1 dem Produkte $Q_1 h_1^2 = Qh^2 = 1800 \cdot (3/4)^2 = 1012,5$ entsprechen. Nun geben die Werthe $Q_1 = 750$ und $h_1 = 1,1145$, $Q_1 h_1^2 = 931$, und die Werthe $Q_1 = 900$ und $h_1 = 1,5863$, $Q_1 h_1^2 = 2263$, daher läßt sich interpolirend setzen:

$$Q_1 = 750 + \frac{1012,5 - 931}{2263 - 931}(900 - 750) = 750 + \frac{81,5 \cdot 150}{1332}$$
$$= 750 + 9,2 = 759,2 \text{ Cubikfuß, ferner}$$
$$a = \sqrt{\frac{Q}{Q_1}} = \sqrt{\frac{1800}{759,2}} = 1,54 \text{ Fuß} = 18\tfrac{1}{2} \text{ Zoll}$$

und $b = 5 \cdot 1,54 = 7$ Fuß $8\frac{1}{2}$ Zoll.

Tabelle III.

Die Wassermengen und Gefälle fließender Wasser bei gegebenen Geschwindigkeiten und bekannten Querschnittsverhältnissen.

$n=$	1	2	3	4	5	6
$c=0,1$	6,0000	12,000	18.000	24,000	30,000	36,000
	0,0102	0,0068	0,0057	0,0051	0,0048	0,0045
0,2	12,000	24,000	36,000	48,000	60.000	72,000
	0,0275	0,0183	0,0153	0,0138	0,0128	0,0122
0,3	18,000	36,000	54,000	72,000	90,000	108,00
	0,0519	0,0346	0,0288	0,0260	0,0242	0,0231
0,4	24,000	48,000	72,000	96,000	120,00	144,00
	0,0834	0,0556	0,0463	0,0417	0,0389	0,0371
0,6	36,000	72,000	108,00	144.00	180,00	216,00
	0,1678	0,1118	0,0932	0,0839	0,0783	0,0746
0,8	48,000	96,000	144,00	192,00	240,00	288,00
	0,2806	0,1871	0,1559	0.1403	0,1310	0,1247
1,0	60,000	120,00	180,00	240,00	300,00	360,00
	0,4219	0,2813	0,2344	0,2110	0,1969	0,1875
1,25	75,000	150,00	225,00	300,00	375,00	450,00
	0,6385	0,4257	0.3547	0.3193	0,2980	0,2838
1,50	90,000	180,00	270,00	360,00	450,00	540,00
	0,8995	0,5997	0,4997	0,4498	0,4198	0,3998
1,75	105,00	210,00	315,00	420,00	525,00	630,00
	1,2051	0,8034	0,6695	0,6026	0,5624	0,5356
2	120,00	240,00	360.00	480,00	600,00	720,00
	1,5548	1,0365	0,8638	0,7774	0,7256	0,6910
2,5	150,00	300,00	450,00	600,00	750,00	900,00
	2,3883	1,5922	1,3269	1,1942	1,1145	1,0615
3	180,00	360,00	540,00	720,00	900,00	1080,0
	3,3991	2,2661	1,8884	1,6995	1,5863	1,5107
4	240,00	480.00	720,00	960,00	1200,0	1440,0
	5,9547	3,9698	3,3082	2,9773	2,7789	2,6466
5	300,00	600,00	900,00	1200,0	1500,0	1800,0
	9,2215	6,1477	5,1231	4,6108	4,3034	4,0985
6	360,00	720,00	1080,0	1440,0	1800,0	2160,0
	12,944	8,7998	7,3332	6,5998	6,1599	5,8665
8	480,00	960,00	1440,0	1920,0	2400,0	2880,0
	23,288	15,526	12,938	11,644	10,868	10,353
10	600,00	1200,0	1800,0	2400,0	3000,0	3600,0
	36,221	24,147	20,123	18,110	16,903	16,098

Tabelle III.

Die Wassermengen und Gefälle fließender Wasser bei gegebenen Geschwindigkeiten und bekannten Querschnittsverhältnissen.

$n =$	7	8	9	10	11	12
c=0,1	42,000	48.000	54,000	60,000	66,000	72,000
	0,0043	0.0042	0,0042	0,0041	0,0041	0,0040
0,2	84,000	96,000	108,00	120,00	132,00	144,00
	0,0118	0,0114	0,0112	0,0110	0.0108	0,0107
0,3	126,00	144,00	162,00	180,00	198,00	216,00
	0,0222	0.0216	0,0211	0,0208	0,0204	0,0202
0,4	168,00	192.00	216,00	240,00	264,00	288,00
	0,0358	0,0348	0,0340	0,0334	0,0329	0.0324
0,6	252,00	288,00	324,00	360,00	396.00	432,00
	0,0719	0,0699	0,0684	0,0671	0,0661	0,0653
0,8	336,00	884.00	432,00	480,00	528,00	576,00
	0,1203	0,1169	0,1143	0,1122	9,1105	0,1091
1,0	420 00	480,00	540,00	600,00	660,00	720,00
	0,1808	0,1758	0,1719	0,1688	0,1662	0,1641
1,25	525,00	600.00	675,00	750,00	825,00	900,00
	0,2736	0,2660	0,2601	0,2554	0 2515	0,2483
1,50	630,00	720,00	810,00	900,00	990,00	1080,0
	0 3855	0.3748	0,3665	0,3598	0,3544	0,3498
1,75	735,00	840,00	945,00	1050,0	1155,0	1260,0
	0,5165	0,5021	0,4910	0,4820	0,4748	0,4686
2	840,00	960,00	1080,0	1200.0	1320,0	1440,0
	0,6663	0,6478	0,6334	0,6219	0,6125	0,6046
2,5	1050,0	1200,0	1350,0	1500,0	1650,0	1800,0
	1,0212	0,9951	0,9730	0,9553	0,9409	0,9288
3	1260,0	1440,0	1620,0	1800,0	1980,0	2160,0
	1,4567	1,4163	1,3848	1,3596	1,3390	1,3219
4	1680,0	1920,0	2160,0	2400.0	2640,0	2880,0
	2,5520	2,4811	2,4266	2,3819	2,3458	2,3157
5	2100,0	2400,0	2700,0	3000,0	3300,0	3600,0
	3,9521	3,8423	3,7569	3,6886	3,6327	3,5861
6	2520,0	2880,0	3240,0	3600,0	3960,0	4320,0
	5,6569	5,4999	5,3776	5,2798	5,1998	5,1331
8	3360,0	3840,0	4320,0	4800,0	5280,0	5760,0
	9,9807	9,7259	9,4879	9,3154	9,1743	9,0565
10	4200,0	4800,0	5400,0	6000,0	6600,0	7200,0
	15,523	15,089	14,757	14,489	14,269	14,086

Wenn sich die Tiefe a eines fließenden Wassers um eine kleine Größe $\triangle a$ verändert, so ändert sich die mittlere Geschwindigkeit c um $\triangle c = \frac{1}{2} . \frac{\triangle a}{a} . c$, und das Wasserquantum Q um $\triangle Q = \frac{3}{2} . \frac{\triangle a}{a} Q$.

Fließt das Wasser ungleichförmig, so hat man für eine kurze Strecke $AD = l$, Fig. 239, das Gefälle $DH = h = \zeta . \frac{lp}{F} . \frac{v^2}{2g} + \frac{v_2{}^2 - v_1{}^2}{2g}$, wo p und F den mittleren Umfang und mittleren Inhalt des Querprofiles, v_1 die mittlere Geschwindigkeit im ersten und v_2 die im zweiten oder letzten Profile, v aber das Mittel aus beiden bezeichnet. Ist a die mittlere Wassertiefe und $\triangle a$ die Abnahme der Tiefe vom ersten bis zweiten Querprofile, so hat man auch $h = \left(\zeta . \frac{n+2}{n} . l + \frac{\triangle a}{2}\right) \frac{v^2}{2ga}$, und setzt man endlich den Abhang des Bettes $= \alpha$, also $h = l\alpha + \triangle a$, so hat man:

Fig. 239.



$$\frac{\triangle a}{l} = \frac{\alpha - \zeta . \frac{n+2}{n} . \frac{v^2}{2ga}}{\frac{v^2}{ga} - 1}.$$

§. 40. Hydrometrie.

Das Quantum fließender Wasser wird gemessen:

1) durch Aichen in Gefäßen,

2) durch den Ausfluß, und

3) durch Hydrometer, welche die Geschwindigkeit des Wassers angeben.

Kleinere Wassermengen werden durch Wasserzolle, d. i. mittels des Ausflusses durch kreisrunde Mündungen von 1 Zoll Weite gemessen. Diese Mündungen sind in der dünnen Wand

oder in einem dünnen Bleche auszuschneiden, und der Ausfluß ist durch Eröffnen oder Verstöpseln einiger dieser Mündungen so zu reguliren, daß der Wasserspiegel nur 1 Linie über der höchsten Stelle der Mündung zu stehen kommt. Nach Hagen liefert ein Wasserzoll (preuß. Maaß) täglich 520 Cubikfuß. Mit mehr Sicherheit mißt man aber, wenn man eine größere Druckhöhe anwendet, und am einfachsten ist es, wenn man den Wasserspiegel 1 Zoll über den Mittelpunkt der 1 Zoll weiten Kreismündung stehen läßt. Nach den Messungen der Herren Bornemann und Röting gibt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß. Kleinere Mündungen geben bei derselben Druckhöhe (1 Zoll) verhältnißmäßig noch etwas mehr Wasser, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist.

Tabelle der Wasserzolle.

Durchmesser.	Ausflußmenge in Cubikfuß.		
	pr. Minute.	pr. Stunde.	pr. Tag.
1 Zoll.	0,44642	26,785	642,84
½ »	1,12228	7,336	176,08
¼ »	0,03173	1,904	45,70
⅛ »	0,00878	0,524	12,65

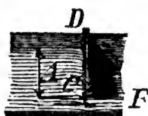
Die Messungen durch den Wasserzoll werden sehr vereinfacht, wenn man der Mündung Nr. 2 die Weite 0,4777 Zoll = 5,73 Linien, der Mündung Nr. 3 die Weite 0,23441 Zoll = 2,713 Linien, und der Mündung Nr. 4 die Weite 0,11138 Zoll = 1,337 Linien gibt, damit sich die Ausflußmengen dieser Mündungen genau wie 64:16:4:1 zu einander verhalten. Mit Hilfe dieser Mündungen läßt sich dann jeder Bruchtheil eines Wasserzolles angeben; um z. B. $4^{45}/_{64}$ Wasserzolle zu erhalten, öffnet man 4 Mün-

dungen von Nr. 1, 2 Mündungen von Nr. 2, 3 von Nr. 3 und 1 von Nr. 4.

Größere Ausflußmengen werden am sichersten mittels des Ausflusses durch rectanguläre Mündungen mit Zuhilfeziehung der oben (§. 31) angegebenen Coefficienten gefunden.

Sehr einfach wird das Wasser in einem Gerinne gemessen, wenn man dasselbe durch ein quer einzusetzendes Brett aufstaut. Läßt man dann das Wasser über der oberen Kante ablaufen, so bekommt man einen Ueberfall, und es ist das Wasserquantum nach den in §. 31 und §. 32 angegebenen Regeln zu berechnen. Läßt man aber das Wasser unter dem Brette ablaufen, wie Fig. 240 vor Augen führt, so hat man nach den Messungen des Verfassers bei nach außen abgeschrägter Kante des Brettes das Ausflußquantum:

Fig. 240.

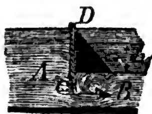


$$Q = 0{,}6 \, . \, a b \sqrt{2 g \left(h - \frac{a}{2}\right)}$$

$= 4{,}744 \; a b \sqrt{h - \frac{a}{2}}$ Cubikfuß zu setzen, wofern die Breite b des Gerinnes und der Mündung, die Höhe a der letzteren und die Höhe h des Wassers in Fußen gegeben sind. Bei einem abgerundeten Brette geht der Coefficient 0,60 in 0,89, also 4,744 in 7,036 über.

Ist $\frac{a}{h}$ nicht klein, so legt sich der Unterwasserspiegel an die Rückwand des Brettes an, und es tritt ein weit unsicherere Resultate gebender Ausfluß unter Wasser, Fig. 241, ein. Ist in diesem Falle h der Niveauabstand beider Wasserspiegel, so hat man bei abgeschrägter Kante

Fig. 241.



$$Q = 0{,}46 \, a b \sqrt{2 g h} = 3{,}66 \, a b \sqrt{h},$$

und bei abgerundeter Kante

$$Q = 0{,}68 \, a b \sqrt{2 g h} = 5{,}39 \, a b \sqrt{h} \text{ C.-F.}$$

Um beim Aufstauen durch ein eingesetztes Brett oder

durch eine Schütze nicht erst den Beharrungszustand abwarten zu müssen, schlage man folgenden Weg ein. Nachdem man durch gänzliches Absperren das Wasser bis zu einer gewissen Höhe aufgestaut hat, öffne man die Mündung und beobachte die Senkung des Wasserspiegels in gleichen Zeitintervallen. Am Ende verschließe man die Mündung wieder ganz und beobachte noch die Zeit, in welcher der Wasserspiegel wieder auf das erste Niveau steigt. Das Quantum, welches dieses fließende Wasser führt, ist nun:

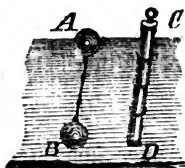
$$Q = \frac{\mu F t \sqrt{2 g h}}{t + t_1},$$

wo F den Inhalt der Mündung, h die mittlere Druckhöhe während des Abflusses, t die Abflußzeit und t_1 die Zeit des Absperrens bezeichnet. Nach der Simpson'schen Regel ist, wenn h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 die gemessenen Druckhöhen bezeichnen, statt $\sqrt{h}$, $\frac{\sqrt{h_0}+4\sqrt{h_1}+2\sqrt{h_2}+4\sqrt{h_3}+\sqrt{h_4}}{12}$ einzusetzen.

Die Hydrometer geben unmittelbar nur die Geschwindigkeiten der fließenden Wasser an; um daher die Wassermengen zu finden, muß man noch in verschiedenen Breiten die Tiefen des Querprofiles mittels einer Sondirstange ausmitteln, hieraus den Inhalt des Querprofiles berechnen und diesen mit der Geschwindigkeit multipliciren.

Der Schwimmer nahe an der Oberfläche gibt natürlich auch nur die Geschwindigkeit in der Nähe der Oberfläche an, um aber gleich die mittlere Geschwindigkeit in einer Vertikalen zu erhalten, muß man, wie Fig. 242 vorstellt, eine Verbindung AB von 2 Schwimmkugeln, oder einen Schwimmstab CD anwenden.

Fig. 242.



Bedient man sich des hydrometrischen Flügelrades zur Ausmittelung der Geschwindigkeit c fließender Wasser, so kann man setzen: $c = c_0 + (c_1 - c_0) u$,

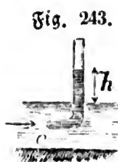
wenn u die Umdrehungszahl des Rades pr. Secunde, c_0 die Geschwindigkeit des Wassers, bei welcher das Rad erst aus der Ruhe gebracht wird, c_1 aber die Geschwindigkeit des Wassers bezeichnet, bei welcher das Rad pr. Secunde eine Umdrehung macht. Man findet die jedem Instrumente eigenthümlichen Constanten aus einer Reihe von Beobachtungen bei bekannten Geschwindigkeiten. Bei großen Geschwindigkeiten ist ein Rad mit kleinem und bei kleinen ein solches mit großem Stoßwinkel in Anwendung zu bringen, damit die Umdrehungszahl weder sehr groß noch sehr klein ausfalle.

Ist z. B. $c_0 = 0{,}10$ und $c_1 - c_0 = 0{,}45$, so hat man $c = 0{,}10 + 0{,}45 \,.\, u$, und hiernach für 140 Umdrehungen pr. Minute, oder $^{140}/_{60} = {}^{7}/_{3}$ pr. Secunde:

$$c = 0{,}10 + 0{,}45 \,.\, {}^{7}/_{3} = 0{,}10 + 1{,}05 = 1{,}15 \text{ Fuß.}$$

Bei Anwendung der Pitot'schen Röhre, Fig. 243, setze man $c = \mu \sqrt{2gh} = \alpha \sqrt{h}$, wo h die abgelesene Höhe der Wassersäule in der Röhre bezeichnet. Der Coefficient α ist ebenfalls auf dem Wege des Experimentirens zu finden. Ist z. B. $\alpha = 6{,}5$, so hat man $c = 6{,}5 \sqrt{h}$, und hiernach bei 0,36 Fuß Hydrometerstand die Geschwindigkeit $c = 6{,}5 \sqrt{0{,}36} = 3{,}9$ Fuß

Fig. 243.

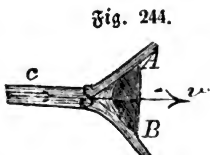


§. 41. Wasserstoß.

Trifft ein isolirter Strahl S, Fig. 244, eine mit der Geschwindigkeit v ausweichende Fläche AB mit der Geschwindigkeit c, und wird er von derselben um den Winkel $ASv = \alpha$ aus seiner ersten Richtung gebracht, so übt er gegen dieselbe den Stoß od. hydraulischen Druck

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma \text{ aus.}$$

Fig. 244.



Die in der Secunde zum Stoße

gelangende Wassermenge ist, wenn F den Querschnitt des Strahles bezeichnet und immer nur dieselbe Fläche gestoßen wird:

$$Q = (c - v)\ F,$$

stellt sich aber eine ununterbrochene Reihe von Flächen dem Strahle entgegen, wie z. B. das Schaufelsystem eines Wasserrades, so hat man:

$$Q = c\,F.$$

Für den Normalstoß gegen eine ebene Fläche ist $\alpha = 90^\circ$, daher $P = \frac{(c-v)}{g}\,Q\gamma$, und für den Stoß gegen eine hohle Fläche, durch welche die Richtung des Strahles in die entgegengesetzte verwandelt wird, ist $\alpha = 180^\circ$, daher

$$P = 2\,\frac{(c-v)}{g}\,Q\gamma.$$

Ist die Fläche in Ruhe, so hat man im ersten Falle

$$P = \frac{c}{g}\,Q\gamma = \frac{c^2}{g}\,F\gamma = 2\,.\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma = 2\,Fh\gamma, \text{ und}$$

im zweiten $P = \frac{2c}{g}\,Q\gamma = 4\,Fh\gamma$. Es ist also im ersten Falle der Stoß doppelt und im zweiten viermal so groß als das Gewicht der Wassersäule, die den Querschnitt des Strahles zur Basis und die Druckhöhe zur Länge hat.

Die Leistung $L = Pv$ des Stoßes ist ein Maximum, wenn $v = \frac{c}{2}$; beim Normalstoße gegen eine ebene Fläche

$$L = \frac{c^2}{4g}\,Q\gamma = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{c^2}{2g}\,Q\gamma = \tfrac{1}{2}\,Qh\gamma, \text{ d. i. halb so}$$

groß als das ganze Arbeitsvermögen des Wassers, dagegen beim Stoße gegen eine hohle Fläche, welche den Strahl in die entgegengesetzte Richtung umbiegt, $L = Qh\gamma$. Beim schiefen Stoß, wie Fig. 245 a. folg. S., ist ebenfalls:

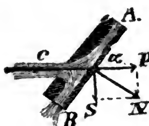
$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c-v)}{g}\,Q\gamma;$$

in dem Falle, wo das Wasser nach zwei entgegengesetzten Seiten, Fig. 246, ausweichen kann, ist der Normalstoß

Fig. 245.



Fig. 246.



$$N = \frac{c-v}{g} \sin. \alpha\, Q\gamma,$$

der Parallelstoß

$$P = \frac{c-v}{g} (\sin. \alpha)^2 \; Q\gamma,$$

und der Seitenstoß

$$S = \frac{c-v}{2g} \sin. 2\alpha \; Q\gamma.$$

Für den schiefen Stoß gegen eine ebene Fläche, auf welcher sich das Wasser nach allen Seiten hin ausbreiten kann, hat man den Parallelstoß

$$P = \frac{2\,(\sin\,\alpha)^2}{1+(\sin.\alpha)^2} \cdot \frac{c-v}{g} Q\gamma.$$

Für den Stoß und Widerstand des unbegrenzten Wassers hat man

$$P = \zeta\,.\,\frac{v^2}{2g}\,F\gamma = (\zeta_1 + \zeta_2)\,\frac{v^2}{2g}\,F\gamma;$$

wo F der Querschnitt der die Wirkung des Wassers aufnehmenden Fläche, v die Geschwindigkeit des Wassers oder die der Fläche bezeichnet, ζ_1 und ζ_2 aber die Wirkungen an der Vorder- und an der Hinterfläche messenden Erfahrungscoefficienten, endlich ζ die Summe $\zeta_1 + \zeta_2$ derselben bezeichnet.

Für ein dünnes Blech, dessen Ebene rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung steht, hat man

beim Stoß des Wassers $\zeta = 1{,}86$, und
beim Widerstand desselben $\zeta = 1{,}25$.

Für einen prismatischen Körper von der Länge l ist ζ_2 veränderlich, und daher:

bei den relativen Längen $\frac{l}{\sqrt{F}}$	=	0,	1,	2,	3;
für den Stoß	ζ =	1,86;	1,47;	1,35;	1,33;
für den Widerstand . .	ζ =	1,25;	1,28;	1,31;	1,33.

Zweiter Abschnitt.

Praktische Mechanik.

Erstes Kapitel.

Statik der Bauwerke.

---

§. 42. Erddruck.

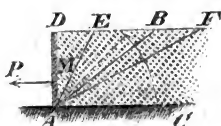
Der Reibungswinkel $CAB = \varrho$, Fig. 247, ist
für trockene Erde . . . $= 39^\circ$,
» angefeuchtete Erde . $= 43^\circ$,
» feinen Sand . . . $= 31^\circ$,
» Roggenkörner . . . $= 30^\circ$,
» Schrotkörner . . . $= 25^\circ$,
» Vogeldunst . . . $= 22\frac{1}{2}^\circ$.

Aus dem Reibungswinkel ϱ, der Dichtigkeit γ der lockeren Masse und der Höhe $AD = h$ der Futtermauer oder

Fig. 247.



Fig. 248.



Bohlenwand u. s. w., Fig. 248, folgt auf jeden laufenden Fuß der letzteren:

der active Erddruck: $P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$

und der passive Erddruck: $P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tg.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$.

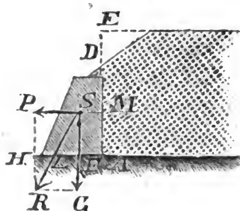
Im ersten Falle hat das Prisma des größten Druckes den Winkel $DAE = \frac{1}{2} DAB = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$, und im zweiten den Winkel $DAF = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$.

Die Höhe des Angriffspunktes M dieser Kräfte über dem Fußpunkte A ist $= \frac{h}{3}$.

Will man noch auf die Cohäsion der Erdmasse Rücksicht nehmen, so muß man die Höhe a, auf die sich die lockere Masse senkrecht abschneiden läßt, ohne nachzurollen, von h subtrahiren.

Ist die Oberfläche der Erde auf jeden laufenden Fuß Breite mit q Pfund belastet, so hat man $\frac{1}{2} h^2 \gamma$ noch um $q h$ größer und den Abstand des Angriffspunktes um $\left(\frac{h\gamma + 3q}{3h\gamma + 6q}\right) h$ über der Sohle anzunehmen. Ragt endlich die Erdmasse um die Höhe $DE = h_1$, Fig. 249, über den Mauerkopf hervor, so muß man statt h^2, $(h + h_1)^2$ substituiren.

Fig. 249.



Die Stabilität der Futtermauer erfordert, daß die Mittelkraft R aus dem Erddrucke P und dem Gewichte G der Mauer die Basis in einem Punkte L durchschneide, welcher der vertikalen Schwerlinie der Mauer mindestens um die Hälfte näher liegt als die äußere Mauerkante H. Man nennt das Verhältniß $\frac{FH}{FL}$ den Stabilitätscoefficienten der

Mauer, bezeichnet ihn durch δ und setzt ihn nach Vauban $=\frac{9}{4}$. Ist b die obere Mauerbreite und n die äußere Böschung der Mauer auf jeden Fuß, also nh auf die ganze Höhe und γ_1 die Dichtigkeit der Mauermasse, so hat man hiernach die untere Breite:

$$b_1=b+nh=\sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_1}\cdot\frac{(h+h_1)^3}{h}\left[tg.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2+\frac{1}{3}n^2h^2}.$$

Für parallelepipedische Mauern ist $n = 0$ und

$$b = b_1 = (h+h_1)\ tg.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_1}\cdot\frac{h+h_1}{h}};$$

und nimmt man $\delta = 9/4$ und $\frac{\gamma}{\gamma_1} = 2/3$, so erhält man

$$b = 0{,}707\,(h+h_1)\sqrt{\frac{h+h_1}{h}}\ tg.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right).$$

Nach Poncelet soll man, solange $h_1 < 2h$ und > 0 ist,

$$b = 0{,}865\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}\ tg.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right).(h+h_1),$$
$$= 0{,}285\,(h+h_1)\ \text{setzen.}$$

Hiernach ist folgende Tabelle zu gebrauchen, welche die gegebenen Werthen von $\frac{h_1}{h}$, $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ und $\varphi = tang.\ \varrho$ entsprechenden Werthe von $\frac{b}{h}$ angibt.

Tabelle.

Die relativen Stärken der Futtermauern.

Werthe von $\frac{h_1}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für $\frac{\gamma_1}{\gamma}=1;\varphi=0,6$ Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma}=1;\varphi=1,4$ Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma}=1,5;\varphi=1.$ Berme:		
	$=0$	$=0,2\,h$	$=0$	$=0,2h$	$=0$	$=0,2\,h$	$=b$
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385
0,8	0,847	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458
∞	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461

Tabelle.

Die relativen Stärken der Futtermauern.

Werthe von $\frac{h_1}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für			
	$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{5}{3}$; $\varphi = 0,6$. Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{5}{3}$; $\varphi = 1,4$. Berme:	
	$= 0$	$= 0,2\,h$	$= 0$	$= 0,2\,h$
0,0	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,707	0,636	0,457	0,384
1,4	0,762	0,672	0,537	0,428
2,0	0,811	0,705	0,622	0,475
3,0	0,852	0,731	0,726	0,531
5,0	0,883	0,751	0,862	0,596
10,0	0,909	0,771	1,013	0,667
20,0	0,922	0,780	1,129	0,712
30,0	0,926	0,783	1,174	0,730
∞	0,934	0,789	1,279	0,769

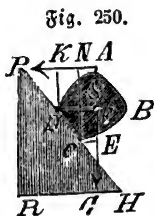
Den Gebrauch dieser Tabelle führt folgendes Beispiel vor Augen.

Beispiel. Welche Stärke ist einer 15 Fuß hohen Futtermauer zu geben, die eine 25 Fuß hohe Erdmasse stützen soll, deren Reibungswinkel $\varrho = 31^0$ und Dichtigkeit $\gamma = {}^3/_5$ von der Dichtigkeit γ_1 der Mauer ist, unter der Voraussetzung, daß die Berme oder die Mauerkappe auf 3 Fuß Breite frei sein soll? Man hat hier $\frac{h_1}{h} = \frac{25-15}{15} = \frac{10}{15} = {}^2/_3$, $\frac{\gamma_1}{\gamma} = {}^5/_3$ und $\varphi = tg.\ \varrho = 0{,}6$, daher nach der zehnten Vertikalcolumne $\frac{b}{h} = 0{,}572$ bis $0\,593$, also im Mittel $0{,}58$ und $b = 0{,}58\ .\ 15 = 8^3/_4$ Fuß.

§. 43. Gewölbe.

Damit ein Körper $A\,C$ vom Gewichte G durch eine Horizontalkraft P auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $DHR = \alpha$, Fig. 250, weder hinab noch hinaufgeschoben werde, ist nöthig, daß $P > G\ tg.\ (\alpha - \varrho)$ und $< G\ tg.\ (\alpha + \varrho)$ sei, und damit er sich weder um die untere Kante C noch um die obere Kante D umschlage, daß

Fig. 250.



$$P > \frac{b}{a}\ G \text{ und } < \frac{d}{c}\ G \text{ sei,}$$

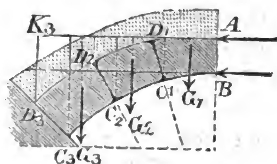
wenn b und d die Abstände CE und DF der Kanten von der vertikalen Schwerlinie des Körpers, a und c die Abstände CN und DK derselben von der Kraftrichtung bezeichnen. Der Reibungswinkel ϱ soll für gut abgerichtete Steine zu 30^0 angenommen werden.

Zur Erhaltung des Gleichgewichts ist daher nöthig, ent-

weder $P = G\, tg.\, (\alpha - \varrho)$, wenn $tg.\, (\alpha - \varrho) > \frac{b}{a}$ und $< \frac{d}{c}$, oder $P = \frac{b}{a}\, G$, wenn $\frac{b}{a} > tg.\, (\alpha - \varrho)$ und $< tg. (\alpha + \varrho)$ ist. Wäre im ersten Falle $tg. (\alpha - \varrho) > \frac{d}{c}$, so würde der Stein aufwärts gekippt werden, und wäre im zweiten Falle $tg.\, (\alpha + \varrho) < \frac{b}{a}$, so würde er aufwärts gleiten.

Diese Theorie findet unmittelbar ihre Anwendung bei der Berechnung der Stabilität eines Gewölbes, die hiernach auf folgende Weise zu führen ist. Man denke sich das Gewölbe AC, Fig. 251, durch, wie die Gewölbfugen liegende Ebenen in viele Theile zerschnitten, und berechne nach den obigen Formeln die Horizontalkraft oder die Kraft im Schlußsteine zur Erhaltung des Gleichgewichtes der Gewölbstücke über diesen Ebenen. Sind also

Fig. 251.



G_1, G_2, G_3 u. s. w. die Gewichte dieser Gewölbstücke sammt ihren Belastungen von oben, so wie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w. die Neigungswinkel der Ebenen $C_1 D_1$, $C_2 D_2 \ldots$, über welchen diese Stücke liegend gedacht werden müssen, so hat man:

1) $G_1\, tg. (\alpha_1 - \varrho), (G_1 + G_2)\, tg. (\alpha_2 - \varrho), (G_1 + G_2 + G_3)\, tg. (\alpha_3 - \varrho)$ u. s. w., so wie

2) $G_1\, tg. (\alpha + \varrho), (G_1 + G_2) tg. (\alpha_2 + \varrho), (G_1 + G_2 + G_3) tg. (\alpha_3 + \varrho)$ auszumitteln, und sind noch b_1, b_2, b_3 u. s. w. die Abstände der unteren Endpunkte der vielen oder eingebildeten Gewölbfugen von den vertikalen Schwerlinien der Stücke G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w., so wie a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Abstände dieser Punkte von der durch den äußeren höchsten Punkt des Gewölbes gehenden Richtung der Kraft

im Schlußsteine; ferner d_1, d_2, d_3 u. s. w., so wie c_1, c_2, c_3 u. s. w. die Abstände der oberen Endpunkte der Gewölbfugen von eben diesen Linien, so hat man

3) $\frac{b_1}{a_1} G_1, \frac{b_2}{a_2}(G_1 + G_2), \frac{b_3}{a_3}(G_1 + G_2 + G_3)$ u. s. w., so wie

4) $\frac{d_1}{c_1} G_1, \frac{d_2}{c_2}(G_1 + G_2), \frac{d_3}{c_3}(G_1 + G_2 + G_3)$ u. s. w. zu

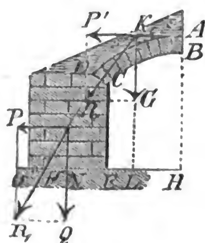
berechnen, und nun den größten der unter (1) und (3) berechneten Werthe als den Druck im Gewölbscheitel anzunehmen. Ueberdies ist aber noch zu untersuchen, ob diese Kraft kleiner sei als der kleinste der unter (2) und (4) zu berechnenden Werthe. Ist dies der Fall, so besitzt das Gewölbe Stabilität, ist aber dieser Druck größer als der kleinste der Werthe unter (2) oder (4), so findet an der entsprechenden Stelle ein Ausgleiten oder Kippen des darüber befindlichen Gewölbstückes nach oben Statt.

Die Gewölbstärke e berechnet man gewöhnlich aus dem größten Erzeugungshalbmesser r nach der Formel:

$$e = 0{,}0694\, r + 1 \text{ Fuß};$$

angemessener ist es aber, dieselbe dem Drucke entsprechend zu berechnen, und hierbei zwanzigfache Sicherheit zu geben. Ist nun P der Druck im Gewölbscheitel auf jeden Fuß Gewölblänge, so soll man $e = \frac{20P}{K} = \frac{P}{225}$ Fuß $= \frac{P}{19}$ Zoll setzen. Da der Druck nach den Widerlagern zu wächst, so soll auch nach dieser Seite hin die Gewölbstärke größer werden.

Fig. 252.



Die Widerlagsmauern eines Gewölbes können, namentlich wenn dieses sehr flach ist und deshalb einen bedeutenden Horizontaldruck P besitzt, durch Gleiten oder Kippen nachgeben und es kann dadurch der Einsturz des Gewölbes herbeigeführt werden. Um dies zu verhindern, ist es nöthig, denselben eine gewisse Dicke OE, Fig. 252, zu geben.

Ist P der Horizontalschub im Scheitel, G das Gewicht der Gewölbhälfte sammt Belastung, G_1 das der Widerlagsmauer, und φ der Reibungscoefficient, so muß zur Verhinderung des Ausgleitens sein: $G + G_1 > \frac{P}{\varphi}$, also, wenn h_1 die mittlere Höhe CE, e_1 die Dicke OE und γ die Dichtigkeit der Widerlagsmauer bezeichnet:

$$e_1 > \frac{P - \varphi G}{\varphi h_1 \gamma}.$$

Zur Verhinderung des Kippens ist nöthig, daß die Stabilität der Widerlagsmauer sammt Gewölbe in Hinsicht auf die äußere Kante O der ersteren größer sei als das Moment des Horizontalschubes P in Hinsicht auf eben diese Kante. Ist nun s der Horizontalabstand EL der inneren Gewölbkante C von der vertikalen Schwerlinie der Gewölbhälfte, und h die Gewölbhöhe, also $h + h_1$ die Höhe AH des Gewölbscheitels über der Basis der Widerlagsmauer, und nimmt man der Sicherheit wegen statt P, $1{,}9\,P$, so hat man hiernach:

$$G\,(s + e_1) + \tfrac{1}{2}\,G_1 e_1 = 1{,}9\,P\,(h + h_1), \text{ oder}$$

$$e_1^{\,2} + \frac{2\,G\,e_1}{h_1\gamma} = \frac{1{,}9\,P\,(h + h_1) - G s}{\tfrac{1}{2}\,h_1\,\gamma},$$ daher die gesuchte Stärke der Widerlagsmauer:

$$e = -\frac{G}{h_1\gamma} + \sqrt{\frac{1{,}9\,P\,(h + h_1) - G s}{\tfrac{1}{2} h_1 \gamma} + \left(\frac{G}{h_1\,\gamma}\right)^2},$$

und für $h_1 = \infty$, den Grenzwerth:

$$e = \sqrt{\frac{3{,}8\,P}{\gamma}} = 1{,}95\,\sqrt{\frac{P}{\gamma}}.$$

§. 44. Holz- und Eisenconstructionen.

Bei einem einfachen Sparrwerk CAC, Fig. 253 a. f. S., ist, wenn G die Belastung eines Sparrens, s den Horizontalabstand CE des Schwerpunktes S der Belastung vom

Sparrenfuße C und h die Höhe $MA = CD$ des Sparrwerkes bezeichnet, der Horizontalschub

$$H = \frac{sG}{h}.$$

Bei gleichförmiger Belastung ist s die Hälfte von der Horizontalprojection $CM = b$ des Sparrens, daher:

$$H = \frac{bG}{2h} = \tfrac{1}{2}\ G\ cotg.\ \delta,$$

wenn δ die Neigung ACM des Sparrens gegen den Horizont angibt

Die Neigung des vollständigen Sparrenschubes R gegen den Horizont ist durch den Winkel $RCH = \delta_1$ mittels der Formel: $tg.\ \delta_1 = \frac{G}{H} = \frac{h}{s} = \frac{2h}{b} = 2\ tang.\ \delta$ gegeben.

Für ein doppeltes Sparrwerk ist, wenn G_1 und G_2 die Belastungen und δ_1 und δ_2 die Neigungswinkel der an einander angestoßenen Sparren bezeichnen, der Horizontalschub:

$$H = \tfrac{1}{2}\ G_1\ cotg.\ \delta_1 = (G_1 + \tfrac{1}{2} G_2)\ cotg.\ \delta_2, \text{ daher}$$

$$tg.\ \delta_2 = \frac{2\,G_1 + G_2}{G_1}\ tg.\ \delta_1.$$

Fig. 253.

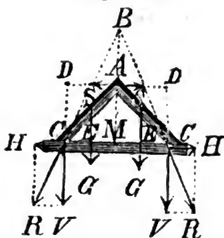
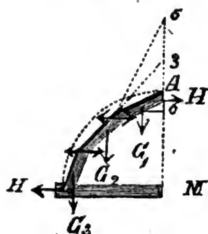


Fig. 254.



Ist das Sparrwerk dreifach, wie Fig. 254, so kommt noch ein dritter Sparren von der Belastung G_3 und der Neigung δ_3 hinzu, weshalb man hat:

$$H = \tfrac{1}{2} G_1\ cotg. \delta_1 = (G_1 + \tfrac{1}{2} G_2) cotg. \delta_2 = (G_1 + G_2 = \tfrac{1}{2} G_3) cotg. \delta_3$$

und $tg.\ \delta_3 = \left(\frac{2\,(G_1 + G_2) + G_3}{G_1}\right)\ tg.\ \delta_1.$

Bei gleicher Sparrenbelastung ist $G_1 = G_2 = G_3$, weshalb folgt $tg.\ \delta_2 = 3\ tg.\ \delta_1$ und $tg.\ \delta_3 = 5\ tg.\ \delta_1$, und $H = \frac{1}{6}\ G\ cotg.\ \delta_1$, wenn G die ganze Last $G_1 + G_2 + G_3$ ausdrückt.

Nimmt man $\delta_1 = 21^0$, so erhält man $\delta_2 = 49^0$ und $\delta_3 = 62\frac{1}{2}^0$, ferner $b = h$ und $H = \frac{2{,}605}{6}\ G = 0{,}434\ G$. Ein einfacher Sparren giebt in diesem Falle $H = 0{,}5\ G$.

Verbindet man die Sparrenenden unter einander durch Bänder D, E . . ., Fig. 255, so gibt man dem Sparrwerk mehr Starrheit und man hat auch nicht nöthig, die Sparren unter den eben angegebenen Winkeln zusammenzustoßen. Der Horizontalschub H geht dann circa bis auf $\frac{b}{4h} G$ herab, und fällt nach den Versuchen Ardants nicht größer aus als bei einem Bogengespärre.

Fig. 255.

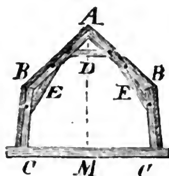
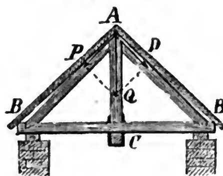


Fig. 256.



Der Sparrenschub wird durch eine feststehende Säule, auf welche sich die Sparrenköpfe stützen, herabgezogen; es ist dann $H = \frac{1}{4}\ G\ sin.\ 2\ \delta$. Durch Anwendung einer Hängesäule $A\ C$, Fig. 256, hingegen, welche einen Theil Q der Belastung des Balkens $B\ B$ aufnimmt und auf die Sparren überträgt, wird der Sparrenschub noch vergrößert. Es ist hier der Horizontalschub in B:

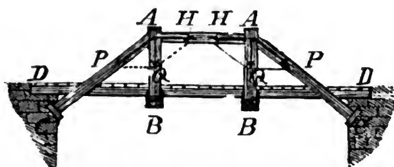
$H = \frac{1}{2}\ (G + Q)\ cotg.\ \delta$ und der Vertikalschub

$$V = G + \frac{Q}{2}.$$

Bei gleichförmiger Belastung des Balkens BB läßt sich Q gleich der halben Last setzen.

Hiernach sind die Spannungen der Hänge- und Sprengwerke zu beurtheilen. Ist Q die Last einer Hängesäule AB, Fig. 257, und δ der Neigungswinkel einer Strebe

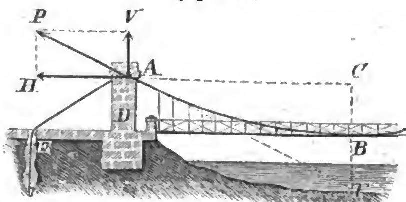
Fig. 257.



AC gegen den Horizont, so hat man die Spannung der Strebe: $P = \frac{Q}{2\,sin.\delta}$, und den Horizontalschub, welchen der Spannriegel AA, so wie die Widerlager CD, CD auszuhalten haben, $H = \frac{1}{2}\,Q\,cotg.\,\delta$; und es ist bei gleichförmiger Belastung der Brücke DD, $Q = \frac{1}{3}$ der ganzen Last zu setzen.

Bei einer **Hängebrücke**, wie AB, Fig. 258, hat man die Belastung auf jeden Quadratfuß Bodenfläche 42

Fig. 258.



Pfund zu setzen. Ist G das Gewicht der ganzen Brückenbahn, und s die Summe der Längen sämmtlicher Hängestangen in Fußen, so hat man die Summe der Querschnitte der letzteren:

$$F = \frac{G}{K - s\gamma} = \frac{G}{2190 - 3{,}3s} \text{ Quadratzoll;}$$

ist endlich a die Bogenhöhe BC, und b die halbe Bogen-

sehne AC der Spannketten, so hat man die Summe der Querschnitte der letzteren:

$$F_1 = \frac{b\,(G+3{,}3\,Fs)}{2a\left[1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]K-b^2\left[1+{}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\gamma}$$

$$= \frac{b\,(G+3{,}3\,Fs)}{35000\,a\left[1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]-3{,}3\,b^2\left[1+{}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}$$

Quadratzoll.

Dagegen für Spannseile:

$$F_1' = \frac{b\,(G+3{,}3\,Fs)}{52600\,a\left[1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]-3{,}3\,b^2\left[1+{}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}$$

Quadratzoll.

Die Stärke der Pfeiler und Widerlagsmauern ist mittels der Spannung:

$$= \frac{G+3{,}3\left(Fs+\left[1+{}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]F_1\,b\right)}{sin.\ \alpha}$$

$$= \left[G+3{,}3\left(Fs+\left[1+{}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]F_1\,b\right)\right]\left[1+2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\left(\frac{b}{2a}\right)$$

Pfund

wie bei den Gewölben zu berechnen.

Zweites Kapitel.

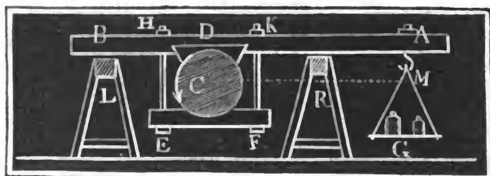
Mechanik der Umtriebsmaschinen.

---

§. 45. Bremsdynamometer.

Das Arbeitsvermögen einer umlaufenden Welle oder eines auf dieser sitzenden Rades, wird durch ein dieselbe umgürtendes Bremsdynamometer, wie Fig. 259, dadurch

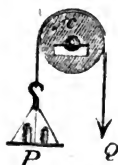
Fig. 259.



gefunden, daß man die Schrauben *H*, *K* so stark anzieht und auf die Waagschale so viel Gewichte auflegt, bis die Welle bei frei schwebendem Arme *AB* eine gegebene Umdrehungszahl *u* annimmt. Ist dann noch *a* der Hebelarm *CM* des Gewichtes in Hinsicht auf die Axe *C* der Welle, und G_1 die Kraft, welche man in *A* anzubringen hat, um das in *D* aufgehängte Dynamometer sammt Waagschale ins Gleichgewicht zu setzen, so hat man das gesuchte Arbeitsvermögen des letzteren:

$$L = \frac{\pi u a}{30} (G + G_1).$$

Fig. 260.



Mittels eines Gurtdynamometers findet man die Leistung einer umlaufenden Welle C, Fig. 260, indem man die Spannungen P und Q ermittelt, bei welchen die Welle, deren Umfang gleich p sein mag, u Umdrehungen pr. Minute annimmt. Es ist dann

$$L = \frac{u\,p}{60}\,(Q - P).$$

Beispiel. Um die Leistung eines Wasserrades bei 6 Umdrehungen pr. Minute zu finden, hat man die Welle desselben mit einem Bremsdynamometer umgürtet, und gefunden: das aufzulegende Gewicht $G = 650$ Pfund, die niederziehende Kraft G_1 des unbelasteten Dynamometers $= 125$ Pfund, den Abstand a der Wellenaxe C von der Richtung der Kraft $G + G_1$, $= 10$ Fuß, und es ist hiernach die Leistung des Rades:

$$L = \frac{6.10.\pi}{30}\,.\,(650 + 125) = 6{,}283\,.\,775 = 4870 \text{ Fußpfund} = 9\tfrac{1}{2} \text{ Pferdekräfte.}$$

§. 46. Thierische Kräfte.

Die Menschen und Thiere liefern bei einer mittleren Kraft K, mittleren Geschwindigkeit c und mittleren Arbeitszeit t das größte tägliche Arbeitsquantum Kct; ist aber die Geschwindigkeit v und die Arbeitszeit $= z$, so hat man die Kraft

$$P = \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) K$$

zu setzen und die tägliche Leistung $L = Pvz$ zu berechnen, welche stets kleiner als Kct ausfällt.

Folgende Tabelle gibt die mittleren Kräfte, Geschwindigkeiten u. s. w. der Menschen und Thiere.

Tabelle.

Die Leistungen der Menschen und Thiere, bei der mittleren Arbeitszeit von 8 Stunden.

Geschöpfe.	Gewichte.	Maschine.	Mittlere Kraft K.	Mittlere Geschwindigk. c.	Leist. pr. Sec. in Fußpfund.	Tägliche Leistung in Fußpfund.
Mensch	150	ohne Masch.	30	2,5	75	2'160000
»	»	am Hebel	10,7	3,5	37,45	1'078560
»	»	a. d. Kurbel	17	2,4	40,8	1'175040
»	»	am Göpel	25,5	1,9	48,45	1'395360
»	»	am Tretrad, bei 24° Ansteigen.	$25^2/_3$	2,25	46,21	1'663000
»	»	am Steigrad	128	0,48	49,15	1'769000
Pferd	600	ohne Masch.	120	4	480	13'824000
»	»	am Göpel	95	2,9	275,5	7'934400
Ochse	600	ohne Masch.	120	2,5	300	8'640000
»	»	am Göpel	139	1,9	264	7'603000
Maulesel	500	ohne Masch.	100	3,5	350	10'080000
»	»	am Göpel	64	2,85	182	5'240000
Esel	360	ohne Masch.	72	2,5	180	5'184000
»	»	am Göpel	30	2,5	75	2'160000

Damit die Geschöpfe mit den hier aufgeführten Kräften und Geschwindigkeiten an Maschinen arbeiten, hat man diesen ein gewisses Hebelarmverhältniß zu geben. Ist P die Kraft, Q die gegebene Last, a der Hebelarm der ersteren und b der der letzteren, so gilt die Regel $Pa = Qb$; und man hat daher $b = \frac{P}{Q}\,a$,

für Haspel ist . . . . a = 16 bis 18 Zoll,
für Hand- oder Menschengöpel a = 8 bis 12 Fuß,
für Pferdegöpel . . . . . . a = 20 bis 30 Fuß,
und bei den Tret- und Laufrädern läßt man die Thiere nur 15 bis 25° steigen, so daß ihre Kraft 26 bis 42 Procent von ihrem Gewichte beträgt.

Bei dem Arbeiten der Thiere muß man unterscheiden, ob dasselbe in einem vertikalen Emporheben oder in einem horizontalen Fortbewegen von Gewichten besteht.

Für das vertikale Emporheben hat man folgende Erfahrungswerthe:

Art der Arbeit.	Gehobene Last.	Geschwindigkeit.	Arbeit pr. Secunde.	Arbeitszeit.	Tägliche Leistung.
Ein Mensch steigt ohne Last eine sanfte Rampe oder Treppe hinauf	140	0,48	67,2	8	1'935000
Ein Arbeiter steigt mit einer Last auf der Schulter eine Treppe oder ein Gerüst hinan und geht leer zurück	140	1,13	18,2	6	393120
Ein Mann fährt eine Last mittels eines Schubkarrens auf einer Rampe von 1/12 Ansteigen hinan . .	128	0,064	8,2	10	295000
Ein Mann hebt ein Gewicht frei mit der Hand empor	42,75	0,54	23	6	496800
Ein Mann wirft mit der Schaufel Erde auf eine mittlere Höhe von 5 Fuß	5,75	1,27	7,3	10	262800
Vier Mann heben einen 120 Pfund schweren Rammklotz täglich 10200mal 4 Fuß hoch	30	1,13	34	10	1'224000

Für das horizontale Fortschaffen sind folgende Erfahrungswerthe bekannt:

Art der Arbeit.	Last.	Geschwindigkeit.	Arbeit pr. Secunde.	Arbeitszeit.	Tägliche Leistung.
Ein Mensch geht unbeladen auf horizontalem Wege . .	140	4,75	665	10	23'940000
Ein Mann trägt eine Last auf dem Rücken ununterbrochen fort	85,5	2,4	205	7	5'166000
Ein Mann trägt wiederholt eine Last auf dem Rücken u. kommt leer zurück . . .	140	1,6	224	6	4'838000
Ein Mann trägt wiederholt Lasten auf einer Trage und geht leer zurück . . .	107	1,05	112	10	4'032000
Ein Arbeiter fährt Materialien auf einem Schubkarren und geht leer zurück . . .	128	1,6	205	10	6'780000
Ein Arbeiter fährt wiederholt Lasten in einem kleinen zweirädrigen Karren, und geht leer zurück .	212	1,6	340	10	12'240000
Ein Bergmann stößt auf der Eisenbahn einen kleinen Hund.	320	1,75	560	8	16'128000
einen großen Hund	850	0,88	748	8	21'540000
Ein Pferd trägt auf dem Rücken und geht im Schritt . . .	256	3,5	896	10	23'256000
im Trabe . . .	171	7	1197	7	30'164400

Art der Arbeit.	Last.	Geschwindigkeit.	Arbeit pr. Secunde.	Arbeitszeit.	Tägliche Leistung.
Ein Pferd zieht an einem Karren im Schritt und fortwährend belastet . .	1500	3,5	5250	10	189'000000
Desgl., aber mit Wiederholung und leer zurück	1500	1,9	2850	10	102'600000
Ein Pferd zieht ein Fuhrwerk, fortwährend belastet, im Trabe	750	7	5250	4,5	85'050000

§. 47. Aufschlagwasser.

Die Arbeit, welche ein fließendes Wasser durch seine lebendige Kraft verrichten kann, ist bei der Geschwindigkeit c und dem Quantum Q pr. Secunde:

$L = \frac{c^2}{2g} Q\gamma = 1{,}056 \; Qc^2$ und hiernach für $Q = 1$ Cubikfuß und für:

$c = 1$	2	3	4	5	6	7 Fuß.
L=1,056	4,224	9,504	16,896	26,400	38,107	51,745 Fußpf.

Die Arbeit, welche das Wasser verrichtet, wenn seine Geschwindigkeit c allmälig in v übergeht, ist

$$L = \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) Q\gamma = 1{,}056 \, (c^2 - v^2) \, Q \text{ Fußpfd.};$$

und die, welche es bei plötzlichem Umsetzen seiner Geschwindigkeit c in v liefert:

$$L = \frac{(c-v)v}{g} Q\gamma = 2{,}112\ (c-v)\ v\, Q \text{ Fußpfund.}$$

Das Arbeitsquantum, welches eine Wassermenge Q bei Benutzung des Gefälles h, d. i. beim Herabsinken von einer senkrechten Höhe h verrichten kann, ist:

$$L = Qh\gamma = 66\,Qh \text{ Fußpfund.}$$

Um das Arbeitsvermögen eines fließenden Wassers zu erhöhen, werden Wehre eingebaut, die zunächst ein Aufstauen des Wasserspiegels hervorbringen. Bei den Ueberfällen oder Ueberfallwehren fließt das Wasser über der festliegenden Wehrkappe, bei den Schleusenwehren hingegen wird es durch Spann- oder Ueberfallschützen aufgestaut. Bei den Ueberfällen ändert sich die Stauung mit dem Wasserquantum, bei den Schleusenwehren hingegen kann man dieselbe durch die Schützenstellung nach Umständen und Bedürfniß steigern oder mäßigen,

Damit das fließende Wasser selbst bei hohem Stande nicht aus seinem Bette trete, ist nöthig, daß die Höhe x des Wehres eine gewisse Höhe nicht überschreite. Ist a die anfängliche oder Unterwassertiefe AB, Fig. 261 und 262,

Fig. 261.



Fig. 262.



h die Stauhöhe BD, b die Wehrbreite und Q das über dem Wehre wegfließende Wasserquantum, so hat man zunächst zu untersuchen, ob Q kleiner oder größer als $4{,}2\, b\, h^{3/2}$ ist; im ersteren Falle hat man es mit einem vollkommenen Ueberfallwehre K, Fig. 261, zu thun, und die Höhe AC desselben ist:

$$x = a + h - 0{,}383 \left(\frac{Q}{b}\right)^{2/3} \text{ Fuß,}$$

im zweiten aber ist ein unvollkommener Ueberfall K, Fig. 262, nöthig und die erforderliche Höhe AC desselben:

$$x = a + \frac{2}{3}h - 0,158 \frac{Q}{b\sqrt{h}} \text{ Fuß zu nehmen.}$$

Diese Formeln setzen voraus, daß die Geschwindigkeit $c = \frac{Q}{b\,(a+h)}$ des zufließenden Wassers nicht über 3 Fuß betrage, und daß die Wehrkappe gut und glatt abgerundet sei.

Schleusenwehren hat man unter übrigens gleichen Verhältnissen kleinere Höhen zu geben als Ueberfallwehren, weil hier die Stauung durch die Schützenstellung noch erhöht werden kann.

Was die Stauung durch lichte Wehre oder Brückenpfeiler anlangt, so hat man die Breite dieser eine Stauung h herbeiführenden Einbaue $y = b - \frac{0,141\ Q}{(a+\frac{2}{3}h)\sqrt{h}}$ Fuß, wenn b die Breite und a die Höhe des unaufgestaueten Wassers bezeichnet.

Die Stauung oberhalb des Wehres hängt von den Verhältnissen zwischen der Tiefe a und Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ des unaufgestauten Wassers ab. Ist die erstere gerade doppelt so groß als die letztere, so bildet die Oberfläche des aufgestauten Wassers nahe eine horizontale Ebene DH,

Fig. 263.

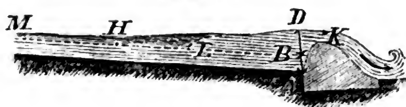


Fig. 263, und es ist die Stauweite: $DH = s = \frac{h}{\alpha}$, wenn α den Abhang des Flußbettes bezeichnet.

Ist aber $a < 2 \,.\, \frac{v^2}{2g}$, so fällt die Stauweite kleiner

aus, es bildet sich (bei L) eine sogenannte Wasserschwelle von der Höhe $z = \frac{v^2}{4g} - a + \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(a + \frac{v^2}{8g}\right)}$ in dem Abstande $DL = s = \frac{h-z}{\alpha}$ vom Wehre K.

Ist endlich, wie meistens, $a > 2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, so erstreckt sich die Stauweite ohne Ende aufwärts fort, und es ist die einer sehr kleinen Stauung y entsprechende Stauweite:

$$DM = s = \frac{h - \frac{1}{3}\left(a - \frac{v^2}{g}\right) Ln.\, y}{\alpha},$$

z. B. für $y = 1$ Zoll $= \frac{1}{12}$ Fuß:

$$s = \frac{h + 0{,}828\left(a - \frac{v^2}{g}\right)}{\alpha},$$

und für $y = \frac{1}{4}$ Zoll $= \frac{1}{48}$ Fuß,

$$s = \frac{h + 1{,}29\left(a - \frac{v^2}{g}\right)}{\alpha}.$$

Um von einer Wasserkraft den möglichst größten Arbeitsgewinn zu ziehen, soll man den Aufschlag- und Abzugkanälen, wodurch das Wasser der Umtriebsmaschine zugeführt und von derselben abgeleitet wird, nur so viel Gefälle geben, als zur Erzeugung einer mäßigen Geschwindigkeit v von $1\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß nöthig ist. Für diese können wir den nöthigen Abhang $\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}008\, \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$, also bei dem Verhältnisse $n = \frac{b}{a}$ der mittleren Breite b zur Tiefe a, $\alpha = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{v^2}{7812a}$ setzen.

§. 48. Vertikale Wasserräder.

Wasserräder werden angewendet bei 2 bis 50 Fuß Gefälle, und zwar:

Oberschlägige	bei 8	bis 50	Fuß	Gefälle,
Rückenschlägige	» 8	» 24	»	»
Mittelschlägige mit Leitschaufeln	» 8	» 16	»	»
» mit Ueberfallschützen	» 5	» 9	»	»
Mittel- und unterschlägige Räder mit Spannschützen . . .	» 2	» 6	»	»

Die Wirkungsgrade sind ungefähr:

bei kleinen oberschlägigen Rädern . . .	0,50 bis 0,60,
» mittleren » » . . .	0,60 » 0,70,
» hohen » » . . .	0,70 » 0,80,
» rückenschlägigen, so wie mittelschlägigen Rädern mit Leitschaufeln oder Ueberfallschützen	0,60 » 0,70,
» Poncelet'schen oder unterschlägigen Druckrädern	0,50 » 0,60,
» mittel- und unterschlägigen Kropfrädern mit Spannschützen	0,40 » 0,50,
» gemeinen unterschlägigen Rädern im Gerinne und im unbegrenzten Wasser .	0,30 » 0,40.

Die Räder, welche vorzüglich durch das Gewicht des Wassers in Umdrehung gesetzt werden, läßt man mit 4 bis 10 Fuß Umfangsgeschwindigkeit umgehen, ersteres bei niedrigen und letzteres bei sehr hohen Rädern; die Räder, welche durch die lebendige Kraft des Wassers bewegt werden, erhalten, eine von dem Gefälle h oder von der Geschwindigkeit c des zuströmenden Wassers abhängige Umfangsgeschwindigkeit.

Für unterschlägige Stoßräder wende man

$$v = 0{,}4 \sqrt{2\,g\,h} = 3{,}16 \sqrt{h} \text{ Fuß an,}$$

für unterschlägige Druckräder hingegen

$$v = 0{,}5 \sqrt{2\,g\,h} = 3{,}95 \sqrt{h} \text{ Fuß.}$$

Die Eintrittsgeschwindigkeit c des Wassers ist bei den ersten Rädern 1- bis 3mal so groß zu nehmen als die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, und das hierzu erforderliche Druck- und Geschwindigkeitsgefälle:

$$h_1 = 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Bei den unterschlägigen Rädern ist $h = h_1$ und

$$c = 0{,}95 \sqrt{2gh} = 7{,}51 \sqrt{h}.$$

Der Radhalbmesser ist:

für ein oberschlägiges Rad $a = \frac{h-h_1}{2}$,

» » rückenschlägiges ungefähr $= \frac{2}{3} h$,

» » mittelschlägiges mit Leitschaufeln $= h$,

» » » » Ueberfallschützen $= \frac{5}{4} h$ bis $\frac{6}{4} h$,

» » mittel- und unterschlägiges Rad mit Spannschützen $= \frac{3}{2} h$ bis $\frac{5}{2} h$.

Unterschlägigen Stoß- und Druckrädern gibt man einen Halbmesser von 6 bis 12 Fuß.

Die Umdrehungszahl u eines Rades pr. Minute bestimmt sich hiernach durch die Formel $u = \frac{30\,v}{\pi\,a} = 9{,}55 \frac{v}{a}$, und fällt bei niedrigen Rädern 8 bis 10, bei hohen aber 4 bis 6 aus.

Die Radtiefe oder Kranzbreite d ist bei den ober- und rückenschlägigen Rädern 10 bis 12 Zoll zu machen, bei den Rädern, welche in einem Kropfe hängen, 12 bis 16 Zoll, bei den unterschlägigen Druck- und Stoßrädern aber 12 bis 20 Zoll. Der Füllungscoefficient $\varepsilon = \frac{Q}{dev}$, oder das Verhältniß des Wasserquantums Q zu dem vom Rade dargebotenen Raume ist bei ober- und rückenschlägigen Rädern $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{3}$, bei mittel- und unterschlägigen Rädern $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ zu machen. Nach ihm bestimmt sich die entsprechende Radweite

$$e = \frac{Q}{\varepsilon d v}.$$

Die Breite e_1 des Wasserstrahles ist um 2 bis 4 Zoll kleiner als die Radweite e zu machen, die Strahldicke d_1 hingegen bestimmt sich durch die Formel:

$$d_1 = \frac{d e v}{e_1 c} = \frac{Q}{\varepsilon e_1 c}.$$

Die Schaufeln bei den ober- und rückenschlägigen Rädern schließen sich an den Radboden oder inneren Radumfang nahe rechtwinkelig, an den äußeren Umfang aber unter einem Winkel von 15 bis 25 Grad, an. Der Centriwinkel, welcher eine solche Schaufel umfaßt, läßt sich setzen:

$$\beta_1{}^0 = 90^0 \cdot \frac{d}{a},$$

der Theilwinkel hingegen, bei der Schaufelstärke s:

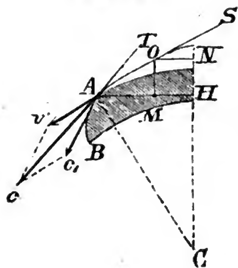
$$\beta^0 = 50^0 \frac{d}{a} \left(1 + \frac{2s}{d}\right);$$

die Schaufelanzahl ist hiernach:

$$n = \frac{360^0}{\beta^0} = \frac{7{,}2\, a}{d} \left(1 - \frac{2s}{d}\right).$$

Die Schaufeln der mittel- und unterschlägigen Räder im Gerinne werden radial oder am äußeren Umfange dem Strahle wenig entgegengestellt; ihre Anzahl läßt sich nach der letzten Formel ebenfalls bestimmen. Die Anzahl der Schaufeln bei Ponceleträdern ist $n = 8a$ bis $10a$. Diese Schaufeln stoßen am inneren Radumfange rechtwinkelig an und krümmen sich nach außen allmälig so, daß sie vom äußeren Radumfange 15 bis 20° abweichen. Damit das Wasser bei den ober-, rückenschlägigen und Ponceleträdern ohne Stoß eintrete und erst im Innern der Zelle seine Arbeit (durch Stoß oder Druck) verrichte, muß dem Wasserstrahle Ac, Fig. 264, eine gewisse Richtung gegeben werden. Ist δ der Winkel $c_1 A v$, um welchen das Schaufelende A von dem äußeren Radumfange abweicht, und φ der

Fig. 264.



Winkel cAc_1, um welchen der Strahl Ac von der Schaufelrichtung abweicht, so hat man:

$$sin.\ \varphi = \frac{v\ sin.\ \delta}{c}.$$

Läßt sich die Schutzmündung unmittelbar an die Eintrittsstelle legen, so hat man die Axe derselben in die durch φ bestimmte Richtung des Strahles zu legen; soll aber diese Mündung weiter zurückstehen, so hat man für irgend eine, den Coordinaten $AM = x$ und $MO = y$ entsprechende Stelle:

$$y = x\ tg.\ \alpha - \frac{g\ x^2}{2c^2 cos.\alpha^2} \text{ und}$$

$$tg.\alpha_1 = tg.\alpha - \frac{g\ x}{c^2\ cos.\ \alpha},$$

wenn α der Neigungswinkel TAH des Strahles gegen den Horizont beim Eintritt in das Rad, α_1 aber den Neigungswinkel SON der Axe der Schutzmündung bezeichnet.

Die Leistung der ober=, rücken= und mittelschlägigen Wasserräder läßt sich theoretisch durch folgende Formel

$$L = Pv = \left(\frac{(c-v)\ v}{g} + h_1 + \mu h_2\right) Q\gamma$$

bestimmen, in welcher c, v, g, Q und γ die bekannten Bedeutungen haben, h_1 aber die Höhe des Wasserbogens vom Eintritte des Wassers in das Rad bis Anfang des Austrittes, h_2 die des Ausgußbogens und μ das Verhältniß $\frac{Q_1}{Q}$ der mittleren Wassermenge in demselben zum ganzen Wasserquantum bezeichnet.

Erfahrungsmäßig ist aber, wenn h_1 die Höhe des ganzen wasserhaltenden Bogens, vom Eintritt bis Radtiefstes bezeichnet, im Mittel:

für ober= und rückenschlägige Räder:

$$L = \left(\frac{(c-v)v}{g} + 0{,}8h\right) Q\gamma = [2{,}112\,(c-v)v + 52{,}8h]\ Q \text{ Fußpf.},$$

für mittelschlägige Räder:

$$L = 0{,}8\left(\frac{(c-v)v}{g} + h\right) Q\gamma = 52{,}8\,[0{,}032\,(c-v)\,v + h]\ Q \text{ Fußpf.},$$

für unterschlägige:

$$L=0{,}6\left(\frac{(c-v)v}{g}+h\right)Q\gamma=39{,}6\,[0{,}032\,(c-v)\,v+h]\,Q \text{ Fußpf.}$$

$$\text{bis}=0{,}75\left(\frac{(c-v)v}{g}+h\right)Q\gamma=49{,}5[0{,}032(c-v)v+h]Q \text{ Fßpf.},$$

für Schiffmühlenräder, wenn F den eingetauchten Theil der Schaufelfläche bezeichnet:

$$L = 0{,}8\,\frac{(c-v)\,c\,v}{g}\,F\gamma = 1{,}69\,(c-v)\,c\,v\,F \text{ Fußpfund},$$

und für Ponceleträder:

$$L = 0{,}7\,.\,\frac{2\,(c-v)\,v}{g}\,Q\gamma = 2{,}96\,(c-v)\,v\,Q \text{ Fußpfund.}$$

Von diesen Leistungen sind noch die Arbeiten der Zapfenreibung in Abzug zu bringen. Ist G das Gewicht des Rades und r der Zapfenhalbmesser, so hat man diese Arbeit $Fv = \varphi\,G\,\frac{r\,v}{a}$, oder wenn man den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$, den Zapfendurchmesser

$2\,r = 0{,}048\,\sqrt{\frac{G}{2}}$ Zoll $= 0{,}00283\,\sqrt{G}$ Fuß und das der Radleistung L Pferdekräfte entsprechende Radgewicht $G = 3000\,\frac{L}{\varepsilon\,u}$ Pfund setzt, $L_1 = Fv = 1{,}85\,\sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3\,u}}$ Fußpfd.

§. 49. Horizontale Wasserräder.

Die horizontalen Wasserräder (Turbinen, Kreiselräder) lassen sich bei allen Gefällen, von 1 bis 500 Fuß, anwenden; sie sind aber besonders bei sehr kleinen und bei sehr hohen Gefällen von Vortheil, weil hier vertikale Wasserräder im ersten Falle nur kleine Wirkungsgrade geben und im zweiten gar nicht anwendbar sind. Die größeren Leistungen geben sie bei kleinen Gefällen; da gerade hier die vertikalen Wasserräder weniger leisten, und da die Turbinen ohne Störung unter Wasser gehen können, während die

vertikalen Wasserräder durch Stauwasser in ihrem Gange gestört werden, so ist die Anwendung von Turbinen bei kleinen Gefällen und veränderlichem Unterwasserstande besonders zu empfehlen. Die Wirkungsgrade sind bei kleinen Gefällen von 2 bis 10 Fuß 0,65 bis 0,75; bei mittleren Gefällen von 10 bis 50 Fuß 0,55 bis 0,65 und bei hohen Gefällen noch kleiner.

Die mit dem größten Arbeitsgewinne arbeitenden Turbinen sind die Reactionsräder mit Leitschaufelapparat. Bei den Turbinen von Fourneyron steht dieser Apparat im Innern des Rades und das Wasser fließt von innen nach außen durch das Rad, bei den Turbinen von Fontaine und Jonval hingegen steht dieser Apparat über dem Rade, und das Wasser strömt von oben nach unten durch das Rad. Bei der Anordnung einer dieser Turbinen kommen vorzüglich drei Winkel α, β und δ in Betracht; es ist α der Winkel cAv_1, Fig. 265, und cAv, Fig. 266, welchen

Fig. 265.

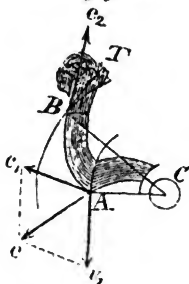
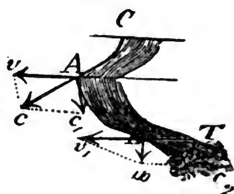


Fig. 266.



die Richtung des aus dem Leitschaufelapparate tretenden Wasserstrahles mit der Tangente Av_1 oder Av des Rades an der Eintrittsstelle A einschließt, ferner β der Winkel c_1Av_1 oder c_1Av, welchen die Richtung des in das Rad eintretenden Strahles Ac_1 mit eben dieser Tangente bildet, und δ der Winkel c_2BT, um welchen die Richtung des aus dem Rade tretenden Strahles Bc_2 von der Tangente BT des Rades an der Austrittsstelle B abweicht.

Man macht nun $\delta = 15^\circ$ bis 20°,
$\beta = 100^\circ$ bis 110°,
und bestimmt α durch die Formel:

$$cotg.\ \alpha = cotg.\ \beta + \frac{1}{\nu\ sin.\ \delta},$$

worin für Fourneyron'sche Turbinen für ν das Verhältniß $\frac{CB}{CA}$ des äußeren Radhalbmessers CB zum inneren CA und zwar $= 1,25$ bis $1,5$, für Fontaine-Jonval'sche Turbinen aber $\nu = 1$ zu setzen ist. Damit das Wasser beim Uebergange aus dem Reservoir in das Rad weder einen Verlust erleide, noch Luft ansauge, muß es nahe den äußeren Druck besitzen, und deshalb $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ sein. Obige Formel gibt aber α kleiner.

Die Umfangsgeschwindigkeit v des Rades soll der relativen Austrittsgeschwindigkeit c_2 nahe gleich sein, und ist aus dem Gefälle h durch die Formel

$$v = c_2 = 0,9 \sqrt{\frac{g h\, sin.(\beta - \alpha)}{sin.\beta\, cos.\alpha}} = 0,9 \sqrt{gh(1 - tg.\alpha\, cotg.\beta)}$$

zu berechnen. Die innere Radgeschwindigkeit bei Fourneyron'schen Turbinen bestimmt sich hiernach $v_1 = \frac{v}{\nu}$.

Ferner ergeben sich die Geschwindigkeiten c und c_1, mit welchen das Wasser aus dem Leitschaufelapparate aus- und in das Rad eintritt, durch die Formeln:

$$c = \frac{v_1\, sin.\beta}{sin.(\beta - \alpha)} \text{ und } c_1 = \frac{c\, sin.\alpha}{sin.\beta} = \frac{v_1\, sin.\alpha}{sin.(\beta - \alpha)},$$

worin für die Fontaine-Jonval'schen Turbinen v statt v_1 zu substituiren ist.

Ist nun Q das Aufschlagquantum pr. Sec., so hat man für die Querschnitte F, F_1 und F_2 des Leitschaufelapparates an der Austrittsstelle A, und der Radkanäle beim Eintritt A und Austritt B:

$$F = \frac{Q}{c},\ F_1 = \frac{Q}{c_1} \text{ und } F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{v}.$$

Bei einer Fourneyron'schen Turbine ist der innere

Radhalbmesser $CA = r_1$, Fig. 267, durch die Formel:

$$r_1 = \sqrt{\frac{Q}{3\pi}} = 0{,}326\sqrt{Q} \text{ Fuß},$$ und der äußere CB

$r_2 = \nu r_1$ bestimmt.

Bei einer Jonval'schen Turbine hat man hingegen den mittleren Halbmesser CA, Fig. 268:

$$r = \sqrt{\frac{F}{2\pi\nu \sin.\alpha}},$$

wenn hier ν das Verhältniß 0,3 bis 0,4 zwischen der Radweite $BD = d$ (radial gemessen) zum mittleren Radhalbmesser bezeichnet.

Fig. 267.

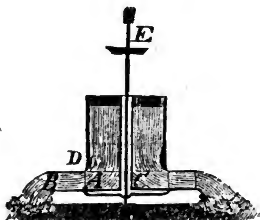
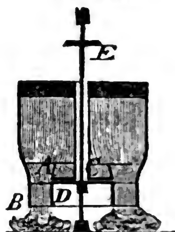


Fig. 268.



Die Radweite AD, Fig. 267, für die Fourneyron'sche Turbine ist $e = \frac{F}{2\pi r_1 \sin.\alpha}$, und dagegen für die Jonval'sche $d = e = \nu r$.

Die Zahl der Rad- und Leitschaufeln soll bei den Fourneyron'schen Turbinen 24 bis 32, bei den Jonval'schen aber nur 16 bis 24 sein.

Bei den Turbinen ohne Leitschaufelapparat ist $\alpha = 90^\circ$ zu setzen, übrigens läßt man sie, wie die Leitschaufelturbine, ungefähr mit einer Umfangsgeschwindigkeit $v = 0{,}7\sqrt{2gh}$ umlaufen, nur ist die hierbei zu erreichende Maximalleistung noch 10 bis 20 Procent kleiner als bei den Leitschaufelturbinen.

Die theoretische Leistung einer Leitschaufelturbine ist durch die Formel:

$$L = Pv = \left(h - \zeta \frac{c^2}{2g} - \varkappa \frac{v^2}{2g} - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma$$
$$= \left(h - \left[\zeta \left(\frac{r_1 \sin.\beta}{r_2 \sin.(\beta - \alpha)}\right)^2 + \varkappa + \left(2 \sin.\frac{\delta}{2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma$$

bestimmt, in welcher ζ den Coefficient 0,10 bis 0,20 des Widerstandes im Leitschaufelapparat, $\varkappa$ den nach §. 34 und §. 35 zu beurtheilenden Coefficient 0,05 bis 0,10 des Krümmungs- und Reibungswiderstandes der Radkanäle, w aber die absolute Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Rade bezeichnet.

Durch die Schützenstellung wird noch ein neues Hinderniß erzeugt, welches die Leistung der Turbine bis auf jeden beliebigen Grad herabzieht. Ueberdies wird aber die Leistung durch die nach §. 14 zu berechnende Zapfenreibung noch um einige Procent vermindert.

§. 50. Wassersäulenmaschinen.

Wassersäulenmaschinen finden vorzüglich bei hohen Gefällen von mindestens 50 Fuß, und bei kleinen oder mäßigen Aufschlagmengen ihre Anwendung; ihr Wirkungsgrad η steigert sich auf 0,75 bis 0,85; ist also viel größer als bei Hochdruckturbinen. Sie lassen sich eben so gut zur Erzeugung von rotirenden als zur Hervorrufung auf- und niedergehender Bewegungen anwenden.

Man läßt den Treibekolben einer Wassersäulenmaschine mit einer mittleren Geschwindigkeit v von 1 Fuß, und das Wasser in der Einfallröhre mit der Geschwindigkeit v_1 von circa 6 Fuß sich bewegen; ist daher Q das Aufschlagquantum der Maschine, so hat man für eine doppeltwirkende oder für eine zweistiefelig einfachwirkende Wassersäulenmaschine die Weite ihres Treibcylinders:

$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = 1{,}13\sqrt{\frac{Q}{v}}, = 1{,}13\sqrt{Q}$ Fuß, und die

der Einfallröhre: $d_1 = 0{,}4\, d = 0{,}45\sqrt{\frac{Q}{v}} = 0{,}45\sqrt{Q}$ Fuß;

für eine einstiefelig einfachwirkende Maschine dagegen:

$$d = 1{,}60\sqrt{\frac{Q}{v}} \text{ und } d_1 = 0{,}64\sqrt{\frac{Q}{v}} \text{ Fuß.}$$

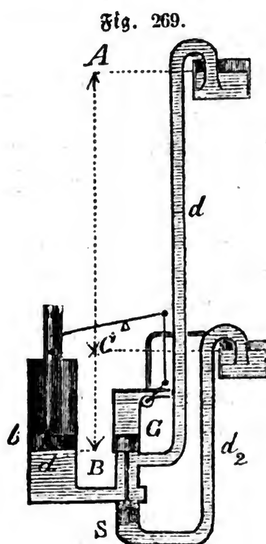
Den Kolbenhub s nimmt man $= \frac{5}{2}\,d$ bis $6\,d$; hiernach hat man die Anzahl der vollständigen Kolbenspiele pr. Min.: $n = \frac{30\,v}{s}$, also für $v = 1$, $n = \frac{30}{s}$.

Theoretisch läßt sich die Leistung einer einfachwirkenden einstiefeligen Wassersäulenmaschine durch folgende Formel berechnen:

$$L = \left(h - \left[4\varphi\frac{b}{d}(h_1 + h_2) + \left(\frac{\varkappa_1}{\nu^2 d_1^{\,4}} + \frac{\varkappa_2}{d_2^{\,4}}\right)\left(\frac{\nu + 1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{8Q}{\pi}\right)^2\right]\right) Q\gamma,$$

und es bedeutet in ihr h_1 das Gefälle AB, Fig. 269, vom Wasserspiegel im Einfallkasten bis mittleren Kolbenstand gemessen, h_2 das Gefälle BC, vom Wasserspiegel im Austragekasten bis eben dahin, ferner $h = h_1 - h_2$ das nutzbare Gefälle AC, vom Oberwasserspiegel bis Unterwasserspiegel gemessen, $\varphi = 0{,}25$, den Coefficienten der Kolbenreibung, $\frac{b}{d} = 0{,}1$ bis $0{,}2$, das Verhältniß der Breite b des Liderungsstulpes zum Durchmesser d des Treibekolbens K, d_1 die Weite der Einfallröhre, d_2 die Weite der Austragröhre, $\varkappa_1 = 20$ bis 40, der Widerstandscoefficient für die erstere, $\varkappa_2 = 5$ bis 10, der für die letztere Röhre; endlich ν das Verhältniß der Aufgangszeit zur Niedergangszeit, am vortheilhaftesten $= \sqrt[3]{\frac{\varkappa_1 d_2^{\,4}}{\varkappa_2 d_2^{\,4}}}$.

Fig. 269.



Die Höhe a_1 des Steuerkolbens S macht man gleich der dreifachen Höhe a des rectangulären Communicationsrohres und den Hub s_1 desselben $= a + a_1 = 4a$. Gewöhnlich gibt man den Einfall-, Austrage- und Communicationsröhren einerlei Querschnitt, macht hiernach $a = \frac{\pi d_1^2}{4d}$ und folglich $s_1 = \frac{\pi d_1^2}{d}$. Ist R das Gewicht des Steuerkolbensystemes, so hat man für den Durchmesser des Steuerkolbens S: $d_3 = 2{,}9 + 0{,}682 \frac{R}{h}$ Zoll und für den des Gegenkolbens G: $d_4 = 4{,}1 + 0{,}281 \frac{R}{h}$ Zoll. Man setzt aber der Sicherheit wegen noch etwas zu, und nimmt die überflüssige Kraft beim Auf- oder Niedergang des Steuerkolbens durch Regulirungshänge weg, regulirt also den Auf- und Niedergang des Steuerkolbens eben so wie den des Treibekolbens.

Das Steuerwasserquantum ist pr. Spiel $= \frac{\pi d_4^2}{4} s_1$, und daher pr. Secunde: $Q_1 = \frac{n}{60} \cdot \frac{\pi d_4^2}{4} s_1$.

§. 51. Windräder.

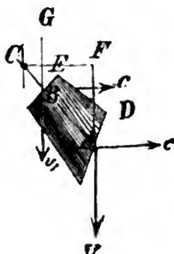
Die günstigste Windgeschwindigkeit für Windmühlen ist 20 bis 25 Fuß. Für gewöhnliche Windräder mit einer beinahe horizontal liegenden und dem Windstrome entgegengerichteten Axe kann man bei der Windgeschwindigkeit c, Umfangsgeschwindigkeit $v = \frac{5}{2} c$, Flügelanzahl n und Flügelfläche $= F$, die Leistung setzen:

$$L = 0{,}0005\ n\, F\, c^3 \text{ Fußpfund.}$$

Es wächst also dieselbe mit der Summe der Flügelflächen und mit dem Cubus der Windgeschwindigkeit. Die

Länge $CA = l$, Fig. 270, einer Windruthe, von Wellmittel bis äußerste Spitze gemessen, ist 20 bis 35 Fuß; die Länge $AB = l_1$, der Flügelfläche $\frac{1}{6} l$ bis $\frac{1}{7} l$ kleiner; die mittlere Breite b derselben aber $\frac{1}{3}\, l$ bis $\frac{1}{5}\, l$, also 4 bis 10 Fuß, die Anzahl der Flügel ist in der Regel 4, seltener 5 bis 6; die Neigung der Flügelwelle gegen den Horizont 5 bis 15 Grad. Für ein Rad mit 4 Flügeln von der mittleren Länge $l_1 = 25$ Fuß und Breite $b = 6$ Fuß ist hiernach $nF = 4 \,.\, 25 \,.\, 6 = 600$ Quadratfuß und die Leistung $L = 0{,}3 \,.\, c^3$, also bei 20 Fuß Windgeschwindigkeit $= 2400$ Fußpfund $= 4{,}7$ Pferdekräfte.

Fig. 270.



Die Flügelfläche erhält, wenn sie eben ist, eine Neigung DAF oder EBG von 12° bis 18° gegen ihre Umdrehungsebene, so daß der Wind unter einem Winkel DAc oder EBc von 78 bis 72 Grad stößt. Die Leistung fällt circa noch 15 Procent größer aus, wenn man die Flügelfläche windschief macht, ihre äußerste Sprosse ungefähr nur 6°, ihre mittlere 10° und ihre innerste 23° von der Umdrehungsebene abweichen läßt.

Theoretisch ist die Kraft, mit welcher der Wind bei der Geschwindigkeit c und Dichtigkeit γ (0,0825 Pfund) ein mit der Geschwindigkeit v ausweichendes und unter dem Stoßwinkel α ihm entgegengestelltes Flügelelement normal stößt:

$$N = \frac{3(c\, sin.\, \alpha - v\, cos.\, \alpha)^2}{2g} F\gamma,$$

und es sind die rechtwinkeligen Componenten desselben:

die Axenkraft $R = N\, sin.\, \alpha$ und

die Umdrehungskraft $P = N\, cos.\, \alpha$.

Das entsprechende Arbeitsquantum ist:

$$L = Pv = 3 \,.\, \frac{(c\, sin.\, \alpha - v\, cos.\, \alpha)^2}{2g}\, v\, cos.\, \alpha\, F\gamma$$

$$= 0{,}00396\, Fv (c\, sin.\, \alpha - v\, cos.\, \alpha)^2 cos.\, \alpha \text{ Fußpfd.},$$

und fällt am größten aus bei dem Stoßwinkel α, welcher durch die Gleichung

$$tg.\,\alpha = \frac{3v}{2c} + \sqrt{\left(\frac{3v}{2c}\right)^2 + 2}$$

bestimmt ist.

Da v, und nach Befinden auch α, für verschiedene Flügelelemente verschieden ist, so hat man sich bei Bestimmung der ganzen Flügelleistung der Simpson'schen Regel zu bedienen.

Die Reibung an dem 9 bis 18 Zoll starken Wellenhalse vermindert diese Leistung noch um 15 bis 30 Procent. Ist G das Gewicht des ganzen Rades und r der Halshalbmesser, so hat man diesen Arbeitsverlust:

$$L_1 = \varphi G \frac{r}{l} v.$$

Drittes Kapitel.

Von der Wärme und von den Dampfmaschinen.

---

§. 52. Thermometerscalen.

Die Temperatur wird durch die Thermometer von Fahrenheit, Celsius und Réaumur angegeben. Der Fundamentalabstand, d. i. der Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkte des Wassers wird bei dem ersten in 180, beim zweiten nach der sogenannten Centesimaleintheilung, in 100, und bei der dritten in 80 gleiche Theile oder Grade eingetheilt. Der Nullpunkt ist bei der Fahrenheit'schen Scala 32 unter dem Frostpunkte, und fällt bei der Centesimal- und bei der Réaumur'schen Eintheilung mit diesem zusammen. Es finden hiernach folgende Beziehungen Statt:

F.	*C.*	*R.*
t	$\frac{5}{9}(t-32^\circ)$	$\frac{4}{9}(t-32^\circ)$
$\frac{9}{5}t+32^\circ$	t	$\frac{4}{5}t$
$\frac{9}{4}t+32^\circ$	$\frac{5}{4}t$	t

F bedeutet Fahrenheit'sche, *C* Centesimal- und *R* Réaumur'sche Grade.

In folgender Tabelle ist die Centesimalscala durch Grade der beiden andern Scalen ausgedrückt.

C.	R.	F.	C.	R.	F.
150	120,0	302,0	130	104,0	266,0
149	119,2	300,2	129	103,2	264,2
148	118,4	298,4	128	102,4	262,4
147	117,6	296,6	127	101,6	260,6
146	116,8	294,8	126	100,8	258,8
145	116,0	293,0	125	100,0	257,0
144	115,2	291,2	124	99,2	255,2
143	114,4	289,4	123	98,4	253,4
142	113,6	287,6	122	97,6	251,6
141	112,8	285,8	121	96,8	249,8
140	112,0	284,0	120	96,0	248,0
139	111,2	282,2	119	95,2	246,2
138	110,4	280,4	118	94,4	244,4
137	109,6	278,6	117	93,6	242,6
136	108,8	276,8	116	92,8	240,8
135	108,0	275,0	115	92,0	239,0
134	107,2	273,2	114	91,2	237,2
133	106,4	271,4	113	90,4	235,4
132	105,6	269,6	112	89,6	233,6
131	104,8	267,8	111	88,8	231,8

C.	R.	F.	C.	R.	F.
110	88,0	230,0	70	56,0	158,0
109	87,2	228,2	69	55,2	156,2
108	86,4	226,4	68	54,4	154,4
107	85,6	224,6	67	53,6	152,6
106	84,8	222,8	66	52,8	150,8
105	84,0	221,0	65	52,0	149,0
104	83,2	219,2	64	51,2	147,2
103	82,4	217,4	63	50.4	145.4
102	81,6	215,6	62	49,6	143,6
101	80,8	213,8	61	48,8	141,8
100	80,0	212,0	60	48,0	140,0
99	79,2	210,2	59	47,2	138,2
98	78,4	208,4	58	46,4	136,4
97	77,6	206,6	57	45,6	134,6
96	76,8	204,8	56	44.8	132,8
95	76,0	203,0	55	44,0	131,0
94	75,2	201,2	54	43.2	129,2
93	74,4	199,4	53	42,4	127,4
92	73,6	197,6	52	41,6	125,6
91	72,8	195,8	51	40,8	123,8
90	72,0	194,0	50	40,0	122.0
89	71,2	192,2	49	39,2	120,2
88	70,4	190,4	48	38,4	118,4
87	69,6	188,6	47	37,6	116,6
86	68,8	186,8	46	36,8	114,8
85	68.0	185,0	45	36,0	113,0
84	67,2	183,2	44	35,2	111,2
83	66,4	181,4	43	34,4	109,4
82	65,6	179,6	42	33,6	107,6
81	64,8	177,8	41	32,8	105,8
80	64,0	176,0	40	32,0	104,0
79	63,2	174,2	39	31,2	102,2
78	62,4	172,4	38	30,4	100,4
77	61,6	170,6	37	29,6	98,6
76	60,8	168,8	36	28,8	96,8
75	60,0	167,0	35	28,0	95,0
74	59,2	165,2	34	27,2	93,2
73	58,4	163,4	33	26,4	91,4
72	57,6	161,6	32	25,6	89,6
71	56,8	159,8	31	24,8	87,8

C.	R.	F.	C.	R.	F.
30	24,0	86,0	0	0,0	32,0
29	23,2	84,2	— 1	— 0,8	30,2
28	22,4	82,4	— 2	— 1,6	28,4
27	21,6	80,6	— 3	— 2,4	26,6
26	20,8	78,8	— 4	— 3,2	24,8
25	20,0	77,0	— 5	— 4,0	23,0
24	19,2	75,2	— 6	— 4,8	21,2
23	18,4	73,4	— 7	— 5,6	19,4
22	17,6	71,6	— 8	— 6,4	17,6
21	16,8	69,8	— 9	— 7,2	15,6
20	16,0	68,0	—10	— 8,0	14,0
19	15,2	66,2	—11	— 8,8	12,2
18	14,4	64,4	—12	— 9,6	10,4
17	13,6	62,6	—13	—10,4	8,6
16	12,8	60,8	—14	—11,2	6,8
15	12,0	59,0	—15	—12,0	5,0
14	11,2	57,2	—16	—12,8	3,2
13	10,4	55,4	—17	—13,6	1,4
12	9,6	53,6	—18	—14,4	— 0,4
11	8,8	51,8	—19	—15,2	— 2,2
10	8,0	50,0	—20	—16,0	— 4,0
9	7,2	48,2	—21	—16,8	— 5,8
8	6,4	46,4	—22	—17,6	— 7,6
7	5,6	44,6	—23	—18,4	— 9,4
6	4,8	42,8	—24	—19,2	—11,2
5	4,0	41,0	—25	—20,0	—13,0
4	3,2	39,2	—26	—20,8	—14,8
3	2,4	37,4	—27	—21,6	—16,6
2	1,6	35,6	—28	—22,4	—18,4
1	0,8	33,8	—29	—23,2	—20,2

In der Folge kommen nur Centesimalgrade vor.

§. 53. Ausdehnung durch die Wärme.

Ist δ der Coefficient der Längenausdehnung eines Körpers, d. i. nimmt eine Einheit seiner Länge bei jedem Grade seiner Temperaturerhöhung um δ zu, und ist l die Länge des Körpers bei der Temperatur 0, so hat man dieselbe bei der Temperatur t_1 und t_2:

$$l_1 = (1 + \delta t_1)\, l,$$

$$l_2 = (1 + \delta t_2)\, l, \text{ daher auch}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2}.$$

Hiernach läßt sich die Länge l_1 eines Körpers von einer Temperatur t_1 auf eine andere Temperatur t_2 reduciren. Es ist nämlich:

$$l_2 = \left(\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1}\right) l_1, \text{ annähernd}$$

$$= [1 + \delta\,(t_2 - t_1)]\; l_1.$$

Der Coefficient der Flächenausdehnung ist doppelt und der der Volumenausdehnung dreimal so groß als der der Längenausdehnung; man hat also für die Inhalte F_1 und F_2 der Querschnitte eines und desselben Körpers bei den Temperaturen t_1 und t_2:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1 + 2\,\delta t_1}{1 + 2\,\delta t_2},$$

und für die Volumen V_1 und V_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + 3\,\delta t_1}{1 + 3\,\delta t_2}.$$

Tabelle
der Ausdehnungen der Körper bei der Wärmezunahme von 0 bis 100 Grad C.

Körper.	Volumenausdehnung (300 δ).	Flächenausdehnung (200 δ).	Längenausdehnung (100 δ).	Reciproke der letzteren.
Glas	0,002584	0,001723	0,000861	1161
Platin	0,002652	0,001768	0,000884	1131
Stahl:				
ungehärtet	0,003236	0,002158	0,001079	927
gehärtet . .	0,003719	0,002479	0,001240	807
Gußeisen . . .	0,003357	0,002238	0,001119	901
Stabeisen . .	0,003546	0,002364	0,001182	846
Gold	0,004398	0,002932	0,001466	682
Kupfer	0,005155	0,003436	0,001718	582
Messing . . .	0,005603	0,003735	0,001868	535
Zinn	0,006699	0,004466	0,002233	438
Silber	0,005729	0,003819	0,001910	524
Blei	0,008545	0,005697	0,002848	351
Zink	0,008825	0,005883	0,002942	340
Quecksilber . .	0,018018	0,012012	0,006006	55,5 : 3
Wasser	0,042102	0,028068	0,014034	23,8 : 3
Luft	0,3665	0,2443	0,1222	2,727 : 3

Die Ausdehnungskraft der Wärme ist $P = \delta t \, . \, FE$, wenn F den Querschnitt, E den Elasticitätsmodul des Körpers, t aber die Temperaturerhöhung bezeichnet. Ist hiernach K der Festigkeitsmodul eines Körpers bei t Grad Wärme, so hat man denselben bei t_1 Grad:

$$K_1 = K - \delta \, (t_1 - t) \, E.$$

Die scheinbare oder relative Ausdehnung ist die Differenz der Ausdehnungen zweier Körper. Z. B. die scheinbare Raumausdehnung des Quecksilbers in einer Glasröhre bei der Temperaturerhöhung von 0 auf 100°:

$$= 0{,}018018 - 0{,}002584 = 0{,}015434;$$

ebenso die absolute Längenausdehnung eines Rostpendels, welches aus Stangen von den Längen l_1 und l_2 mit den Ausdehnungscoefficienten δ_1 und δ_2 zusammengesetzt ist:

$$\lambda = (\delta_1 l_1 - \delta_2 l_2)\, t, \text{ also} = \text{Null, für}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1},$$ z. B. wenn dasselbe aus Eisen- und Messingstäben besteht:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1868}{1182} = 1{,}58.$$

Die Ausdehnung des Wassers ist bei verschiedenen Temperaturen sehr verschieden; bei 3,9 Grad ist die Dichtigkeit des Wassers ein Maximum. Folgende Tabelle gibt die Dichtigkeitszustände desselben bei anderen Temperaturen an.

Tabelle

über die Dichtigkeit des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

Temperatur.	Dichtigkeit.	Volumen.
0°	1,00000	1,00000
4	1,00011	0,99989
10	0,99986	1,00014
20	0,99841	1,00159
30	0,99580	1,00422
40	0,99256	1,00750
50	0,98856	1,01157
60	0,98387	1,01640
70	0,97855	1,02192
80	0,97270	1,02807
90	0,96638	1,03479
100°	0,95968	1,04202

§. 54. Schmelz- und Siedepunkte.

Bei einer durch den sogenannten Schmelz- oder Gefrierpunkt angegebenen Temperatur gehen feste Körper in flüssige, oder umgekehrt flüssige in feste über. Hierbei treten in der Regel auch ansehnliche Dichtigkeitsveränderungen ein; so z. B. nimmt das Wasser beim Gefrieren um $\frac{1}{14}$ seines Volumens zu, so daß Eis vom specifischen Gewichte 0,92 entsteht. Auch Eisen, Wismuth u. s. w. dehnen sich beim Festwerden etwas aus, Quecksilber, Silber, Blei, Zink u. s. w. ziehen sich hingegen zusammen. Für die Technik ist besonders das Schwinden der Metalle nach dem Gusse von Wichtigkeit. Dieses ist bedingt durch das Ausdehnen oder Zusammenziehen beim Erstarren und durch das Zusammenziehen beim Erkalten. Folgendes sind die vorzüglichen

Schwindmaaße

für Gußeisen, = $\frac{1}{96}$ = 0,0104.
» Messing, = $\frac{1}{65}$ = 0,0154.
» Glockenmetall (100 Kupfer + 18 Zinn), = $\frac{1}{63}$ = 0,0159.
» Kanonenmetall (100 Kpfr. + 12½ Zinn), = $\frac{1}{134}$ = 0,0075.
» Zink, = $\frac{1}{62}$ = 0,0161.
» Blei, = $\frac{1}{92}$ = 0,0109.
» Zinn, = $\frac{1}{147}$ = 0,0068.
» Wismuth, = $\frac{1}{265}$ = 0,0038.

Das Schwinden des frischen Holzes beim Austrocknen und das Anschwellen des letzteren beim Anschwängern mit Wasser ist für die Technik nicht minder beachtenswerth. Die Länge in der Richtung der Holzfasern bleibt hierbei fast unverändert. Es ist anzunehmen, daß im Mittel das Laubholz in der Richtung des Spiegels um 3 und in der der Jahresringe um 6 Procent, also im Ganzen um 9, das Nadelholz aber in der ersten Richtung um 2 und in der

zweiten um 4, also im Ganzen um 6 Procent schwindet oder anschwillt.

Tabelle,

die Schmelzpunkte verschiedener Substanzen angebend.

Substanz.	Schmelzgrad.
Platin	2500° C.
Schmiedeeisen	1500 bis 1600
Stahl	1300 bis 1400
Gußeisen, graues	1200
» weißes	1050
Gold	1100 bis 1250
Silber.	1000
Bronze	900
Antimon	450
Zink	360
Blei	330
Wismuth	260
Zinn	230
Legirung: 1 Thl. Zinn + 3 Thle. Blei	289
1 » » + 1 » »	241
3 » » + 1 » Wismuth	200
3 » » + 1 » Blei .	186
2 » » + 1 » Wismuth	167,7
3 » » + 1 » Blei .	167,7
1 » » + 1 » Wismuth	141,2
4 Thl. Zinn + 1 Blei + 5 Wism.	118,9
3 » » + 2 » + 5 »	100
3 » » + 5 » + 8 »	100
1 » » + 1 » + 4 »	94
Schwefel	109
Gelbes Wachs	61
Phosphor	43
Seife	33
Eis	0,0
Terpentinöl	—10
Quecksilber	—39

Das Wedgwood'sche Pyrometer, womit man noch oft die Schmelzgrade angibt, fängt bei $1077\frac{1}{2} F$ mit Null an, und jeder der 240 Grade von W wird $= 130^\circ F$ gesetzt. Hiernach ist z. B. $24^\circ W = 1077\frac{1}{2} + 24 . 130 = 1077\frac{1}{2} + 3120 = 4197\frac{1}{2} F$ und $1000^\circ C = 1832 F = \frac{1832 - 1077,5}{130} W = 5^\circ,8 W$. Nach Guyton-Morveau ist der Nullpunkt von W bei $510 F$, und ein Grad $W = 61,2^\circ F$; daher $1000^\circ C = \frac{1832-510}{61,2} = 21^\circ,6 W$.

Das Sieden oder der Uebergang einer Flüssigkeit in Dampf hängt von der Temperatur und dem Drucke zugleich ab. Ist dieser gleich dem Drucke einer Atmosphäre, so hat man folgende Siedepunkte:

für	Quecksilber	$= 360^\circ C.$,
»	Leinöl	$= 316^\circ$,
»	Schwefelsäure	$= 310^\circ$,
»	Schwefel	$= 299^\circ$,
»	Wasser	$= 100^\circ$,
»	Alkohol (vom spec. Gewicht 0,813)	$= 78^\circ,6$,
»	salpetrige Säure	$= 28^\circ$,
»	schweflige Säure	$= -10^\circ$.

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft = 1 gesetzt, hat man die des Quecksilberdampfes = 6,976,
des Alkoholdampfes . = 1,613,
des Wasserdampfes . = $\frac{5}{8}$ = 0,625.

§. 55. Specifische Wärme.

Wärmeeinheit (calorie) wird derjenige Wärmeaufwand genannt, durch welchen 1 Pfund Wasser 1 Grad Temperaturerhöhung erleidet. Um Q Pfund Wasser um t Grad wärmer zu machen, ist das Wärmequantum $Q t$ cal. nöthig, und Q Pfund einer anderen Substanz erfordern zu ihrer Temperaturerhöhung von $t^\circ = \omega Q t$, wenn der Coefficient ω die specifische Wärme dieser Substanz ausdrückt.

Tabelle.
Die specifischen Wärmen einiger Substanzen.

Körper.	Specifische Wärme.	Körper.	Specifische Wärme.
Eisen . .	0,1138	Gold . .	0,0324
Zink . . .	0,0956	Schwefel .	0,2026
Kupfer . .	0,0952	Kohle . .	0,2411
Messing .	0,0939	Marmor .	0,2098
Silber . .	0,0570	Ungel. Kalk	0,2169
Blei . . .	0,0314	Alkohol .	0,700
Wismuth .	0,0308	Eichenholz .	0,570
Antimon .	0,0508	Glas . .	0,1977
Zinn . . .	0,0562	Quecksilber	0,0333
Platin . .	0,0324	Wasser . .	1,000

Für Gase und Dämpfe hat man Folgendes:

Gase.	Specifische Wärme		
	bei gleichem Volumen.	bei gleichem Druck	
		für Luft = 1	für Wasser = 1
Atmosphärische Luft	1,000	1,000	0,276
Sauerstoff . . .	0,976	0,885	0,236
Wasserstoff . .	0,903	12,340	3,294
Stickstoff . . .	1,000	1,032	0,275
Kohlensäure . .	1,258	0,828	0,221
Wasserdampf . .	1,960	3,136	0,847

§. 56. Die Wasserdämpfe.

Die Expansivkraft p des gesättigten Wasserdampfes hängt von der Temperatur desselben ab, und läßt sich durch verschiedene empirische Formeln aus dieser berechnen. Für Spannungen von 1 bis 4 Atmosphären hat man einfach:

$$p = \left(\frac{75+t}{175}\right)^6 \text{ Atmosphären}$$

$$= \left(\frac{75+t}{111,35}\right)^6 \text{ Pfund auf den Quadratzoll;}$$

umgekehrt, im ersten Falle:

$$t = 175\sqrt[6]{p} - 75^\circ, \text{ im zweiten:}$$

$$t = 111,35\sqrt[6]{p} - 75^\circ.$$

Für Spannungen über 4 Atmosphären gilt die Formel:

$$p = \left(\frac{39,8+t}{139,8}\right)^5 \text{ Atmosphären}$$

$$= \left(\frac{39,8+t}{81,28}\right)^5 \text{ Pfund auf den Quadratzoll;}$$

umgekehrt, im ersten Falle:

$$t = 139,8\sqrt[5]{p} - 39^\circ,8, \text{ im zweiten:}$$

$$t = 81,28\sqrt[5]{p} - 39^\circ,8.$$

Folgende Tabelle enthält die Expansivkräfte für Temperaturen von 0 bis 219° in Atmosphären ausgedrückt. Die erste Vertikalcolumne enthält die Zehner und die oberste Horizontalreihe die Einer der Temperatur; die entsprechende Expansivkraft steht mit der Zehnerzahl in einer Horizontal- und mit der Einerzahl in derselben Vertikalreihe. Z. B. $t = 123^\circ$ gibt $p = 2,127$ Atmosphären, und 2 Atmosphären entspricht ziemlich genau 121° Temperatur.

Tabelle
für die Expansivkräfte der Dämpfe im Maximo der Spannung, ausgedrückt in Atmosphären.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,011	0,012
1	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,023
2	0,024	0,026	0,027	0,029	0,031	0,033	0,034	0,036	0,039	0,041
3	0,043	0,046	0,048	0,051	0,054	0,057	0,060	0,063	0,067	0,071
4	0,074	0,078	0,084	0,087	0,091	0,096	0,101	0,106	0,112	0,117
5	0,123	0,129	0,136	0,142	0,149	0,157	0,164	0,172	0,180	0,189
6	0,198	0,207	0,216	0,226	0,237	0,248	0,259	0,270	0,282	0,295
7	0,308	0,321	0,335	0,350	0,365	0,381	0,397	0,413	0,431	0,449
8	0,467	0,486	0,506	0,527	0,548	0,570	0,593	0,616	0,640	0,665
9	0,691	0,718	0,746	0,774	0,803	0,834	0,865	0,897	0,930	0,964
10	1,000	1,035	1,071	1,108	1,148	1,187	1,230	1,273	1,315	1,359
11	1,406	1,453	1,501	1,551	1,601	1,655	1,708	1,763	1,820	1,878
12	1,938	1,998	2,062	2,127	2,193	2,261	2,330	2,401	2,475	2,550
13	2,627	2,705	2,786	2,868	2,943	3,040	3,128	3,219	3,312	3,407
14	3,507	3,609	3,704	3,811	3,921	4,037	4,134	4,252	4,373	4,481
15	4,607	4,735	4,854	4,988	5,121	5,262	5,405	5,534	5,677	5,818
16	5,972	6,128	6,274	6,438	6,605	6,776	6,932	7,110	7,272	7,457
17	6,635	7,838	8,013	8,212	8,415	8,601	8,812	9,027	9,224	9,446
18	9,673	9,879	10,115	10,33	10,57	10,83	11,08	11,31	11,57	11,81
19	12,08	12,35	12,60	12,89	13,18	13,44	13,75	14,05	14,31	14,63
20	14,96	15,25	15,58	15,89	16,23	16,57	16,89	17,25	17,61	17,95
21	18,32	18,66	19,05	19,44	19,80	20,20	20,58	20,99	21,32	21,80

Die Dichtigkeit des Wasserdampfes ist bei gleicher Spannung = $\frac{5}{8}$ von der der atmosphärischen Luft. Aus dem Dampfdrucke p pr. Quadratcentimeter oder Quadratzoll und der Temperatur t folgt die Dichtigkeit:

für französisches Maaß $\gamma = \frac{0{,}7857\,p}{1+0{,}00367\,t}$ Kilogramm,

für preußisches Maaß $\gamma = \frac{0{,}003567\,p}{1+0{,}00367\,t}$ Pfund.

Annähernd läßt sich das specifische Dampfvolumen, d. i. das Verhältniß des Dampfvolumens V zu dem Volumen V_1 eines gleichen Gewichtes Wasser, bei gesättigtem Dampfe setzen:

$$\mu = \frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta + p},$$ und zwar:

Für	Wenn p den Druck angibt		
	in Atmosphären.	in Kilogramm auf das Quadratmeter.	in Pfunden auf den Quadratzoll.
Tiefdruck	$\frac{20000000}{1200+p}$	$\frac{1935}{0{,}1161+p}$	$\frac{29121}{1{,}747+p}$
Hochdruck	$\frac{21232000}{3020+p}$	$\frac{2054}{0{,}2922+p}$	$\frac{30915}{4{,}397+p}$

Beim gewöhnlichen Gebrauche ist folgende Tabelle in Anwendung zu bringen. Die erste Vertikalcolumne gibt die Ganzen und die oberste Horizontalreihe die Decimalen der Expansivkraft in Atmosphären an; das entsprechende specifische Dampfvolumen wird durch den neben der ersten und unter der zweiten Zahl stehenden Zifferncomplex angegeben. Z. B. für $p = 3{,}5$ Atmosphären ist das specifische Dampfvolumen $\mu = 535$; umgekehrt $\mu = 689$ entspricht die Spannung $p = 2{,}7$ Atmosphären.

Tabelle
über die specifischen Dampfvolumen.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	16666	8954	6121	4650	3749	3141	2702	2371	2112	1904
1	1734	1591	1470	1366	1276	1197	1127	1065	1010	960
2	914	873	835	801	769	740	713	689	664	642
3	621	602	584	566	550	535	528	515	503	490
4	479	467	457	447	438	429	420	412	403	396
5	388	381	374	367	361	355	349	343	337	332
6	326	321	316	312	307	302	298	294	290	286
7	282	278	274	271	267	264	260	257	254	251
8	248	245	242	239	236	234	231	228	226	223
9	221	219	216	214	212	210	208	206	204	202
10	200	198	196	194	192	190	188	187	185	184
11	182	180	178	177	175	174	172	171	169	168
12	167	166	164	163	162	161	159	158	157	156
13	154	153	152	151	150	149	148	147	146	145
14	144	142	142	141	140	139	138	137	136	135
15	134	133	133	132	131	130	129	128	128	127

§. 57. Brennstoffe.

Die Wärmemengen, welche verschiedene Brennstoffe bei ihrer Verbrennung liefern, nebst den hierzu nöthigen Luft- und den sich hieraus bildenden Gasmengen sind in folgender Tabelle aufgezeichnet. Von den hier angeführten Wärmemengen können aber mittels eines Brennheerdes nur 55 bis 65 Procent zu Gute gemacht werden, worauf bei Berechnung einer Anlage stets Rücksicht zu nehmen ist.

Tabelle
über die Erwärmungskraft u. s. w. verschiedener Brennstoffe.

Brennstoffe.	Wärmemengen von 1 Pfd. Brennstoff.	Kalte Luft zum Verbrennen, von 1 Pfd. Brennstoff.	Aus der Verbrennung hervorgehende Gasmenge, reducirt	
			auf 0°.	auf 300°.
Stark gedörrtes Holz	3600 Cal.	102 Cbff.	111 Cbff.	233 Cbff.
Lufttrockenes Holz mit 20 Proc. Wasser	2800 »	82 »	93 »	194 »
Holzkohle	7000 »	248 »	248 »	519 »
Stark gedörrter Torf	4800 »	171 »	178 »	371 »
Torf mit 20 Proc. Wasser	3600 »	137 »	146 »	305 »
Torfkohle	5800 »	200 »	200 »	418 »
Mittlere Steinkohle	7500 »	274 »	279 »	584 »
Koks mit 15 Proc. Asche	6000 »	227 »	227 »	475 »
Reine Koks	7050 »	250 »	250 »	520 »

Kennt man die Brennstoffmenge K Pfund, welche auf einem Brennherde verbraunt wird, so erhält man durch Multiplication derselben mit einem Werthe in der ersten Columne die erzeugte Wärmemenge $W = wK$, durch Multiplication mit dem entsprechenden Werthe der zweiten Columne die nöthige kalte Luft, und durch Multiplication mit dem angehörigen Werthe aus der letzten Columne, die durch den Schornstein abzuführende Gasmenge.

Um das Dampfquantum Q zu finden, welches durch Verbrennung einer gewissen Quantität Brennstoff erzeugt wird, hat man die latente Wärme des Wassers zu wissen nöthig. Nach Watt bindet Dampf von t Grad Temperatur bei seiner Entstehung $640° - t$ Wärmeeinheiten, nach Southern hingegen ist die latente Wärme des Wasserdampfes von jeder Temperatur $= 540°$. Deshalb hat man

die Wärmemenge, welche zur Verwandlung eines Wasserquantums $Q\gamma$ von der Temperatur t_1 in Dampf von der Temperatur t nöthig ist:

$W = (640 - t_1)\, Q\gamma$ nach Watt, Pambour u. s. w.,

$W = (540 + t - t_1)\, Q\gamma$ nach Southern, Poncelet u. s. w.

Nimmt man $t_1 = 10^0$, so erhält man die zur Erzeugung von 1 Pfund Dampf nöthige Wärmemenge $W = 630$ Einheiten, und nimmt man die durch Verbrennung von 1 Pfund Kohlenstoff erzeugte Wärmemenge $= \frac{2}{3} \,.\, 7050 = 4700$ Wärmeeinheiten, so erhält man die entsprechende Dampfmenge $Q\gamma = \frac{4700}{630} = 7\frac{1}{2}$ Pfund. Umgekehrt erfordert also 1 Pfund Dampf $\frac{2}{15} = 0{,}133$ Pfund Kohle. Erfahrungsmäßig gibt:

	1	Pfund	Steinkohle	5	bis 7	Pfund	Dampf,
	1	»	Koks	$4\frac{2}{3}$	» 5,8	»	»
	1	»	Holzkohle	6	» —	»	»
und	1	»	Holz	2,5	» 2,7	»	»

§. 58. Dampfkessel.

Die Größe der Dampfkessel wird vorzüglich durch die Größe der Heiz- oder Erwärmungsfläche S bedingt. Man kann sicher auf jeden Quadratfuß Heizfläche stündlich 4 Pfund Dampf oder $104\frac{3}{4}$ Cub.-Zoll Speisewasser rechnen. Ist also $Q\gamma$ das Dampfquantum, welches ein Kessel stündlich liefern soll, so hat man die erforderliche Heizfläche

$$S = \tfrac{1}{4}\, Q\gamma \text{ Quadratfuß.}$$

Die Heizfläche ist dem Feuer theils direct, theils, und zwar in den Kanälen um den Kessel herum, indirect ausgesetzt. Der erste Theil nimmt viel mehr Wärme auf, als der zweite Theil, weshalb man denselben immer möglichst groß zu machen suchen muß. Kessel, bei welchen das Feuer mehr dierect wirkt, bedürfen auch einer kleinern Heizfläche, z. B. Kessel auf Dampfschiffen oder Locomotivenkessel; jene

geben auf 1 Quadratfuß Heizfläche $6\frac{1}{2}$ bis $7\frac{1}{2}$ Pfund Dampf, diese aber gar 21 bis 26 Pfund.

Gewöhnlich rechnet man auch bei Kesseln:

für Hochdruckdampfmaschinen ohne Condens.	10	Quadr.=Fuß.,	
für solche mit Condensation	13	»	»
und für Tiefdruckmaschinen	14	»	»

Heizfläche pr. Pferdekraft.

Den Dampfraum macht man im Mittel 0,4 und den Wasserraum 0,6 des ganzen Kesselraumes, übrigens sorgt man dafür, daß das Wasser im Kessel noch 4 Zoll über der Heizfläche außerhalb des Kessels stehe.

Sind b, h und l die mittlere Breite, Höhe und Länge eines Kofferkessels, so hat man für die Heizfläche desselben: $S = bl + 1{,}2\,(b+l)\,h$; nimmt man nun, wie gewöhnlich, $b = \frac{3}{4}h$ und $l = \frac{5}{2}h$ (bis $3h$), so erhält man:

$$h = 0{,}416\,\sqrt{S},$$

$$b = 0{,}314\,\sqrt{S} \text{ und}$$

$$l = 1{,}040\,\sqrt{S}.$$

Für einen Walzenkessel vom Halbmesser r, der Länge l seines cylindrischen Theiles und der Höhe h von jedem seiner Endsegmente ist

$$S = 3{,}953\,rl + 1{,}2\,\pi r^2 \left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \text{ zu setzen;}$$

nimmt man für l den Mittelwerth $10\,r$, so erhält man einfach:

$$r = 0{,}152\left[1 - 0{,}05\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]\sqrt{S}, \text{ und}$$

$$l = 1{,}52\left[1 - 0{,}05\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]\sqrt{S}.$$

Für Walzenkessel mit n Siederöhren hat man, wenn r, r_1, l und l_1 die Halbmesser und Längen des Kessels und der Siederöhren bezeichnen:

$$S = \pi rl + 2n\pi r_1 l_1,$$

daher, wenn man wie gewöhnlich $l = l_1 = 10r$, $r_1 = 0,4r$ und $n = 2$ nimmt:

$$r = 0,1106\sqrt{S},\ r_1 = 0,04424\sqrt{S} \text{ und}$$

$$l = l_1 = 1,106\sqrt{S}.$$

Bei Kesseln mit innerer Heizung ist die ganze innere Fläche als Heizfläche anzunehmen.

Die Kesselblechstärke e ist nach der Formel

$$e = 0,0015\,pd + 0,1 \text{ Zoll}$$

zu berechnen. Die Kesselweite $d = 2r$ ist in Zollen und für p ist der Ueberdruck von innen nach außen in Atmosphären einzuführen. Sieteröhren sind 1,6 mal so dick zu machen als die Formel angibt; das dem Feuer unmittelbar ausgesetzte Blech ist 1,5 mal und das um 5 bis 15 Fuß vom Roste entfernte Blech 1,2 mal so dick zu machen. Nach dieser Formel ist folgende Tabelle berechnet worden.

Tabelle der Kesselstärken.

Innere Weite der Kessel in Zollen.	Wandstärke in Zollen bei folgenden Ueberdrücken in Atmosphären.					
	½	1	2	3	4	5
3	0,102	0,105	0,109	0,114	0,118	0,123
6	0,105	0,109	0,118	0,127	0,137	0,146
9	0,107	0,114	0,127	0,141	0,155	0,168
12	0,109	0,118	0,136	0,154	0,173	0,191
18	0,114	0,127	0,154	0,181	0,210	0,237
24	0,118	0,136	0,172	0,208	0,246	0,282
30	0,123	0,145	0,190	0,235	0,283	0,328
36	0,127	0,154	0,208	0,262	0,320	0,374
42	0,132	0,163	0,226	0,289	0,356	0,419
48	0,136	0,172	0,244	0,316	0,393	0,465
54	0,140	0,181	0,262	0,343	0,429	0,510
60	0,145	0,190	0,280	0,370	0,466	0,556

Die Dicke gußeiserner Sieberöhren ist nach der Formel $e = 0{,}005\,pd + \frac{1}{3}$ Zoll zu berechnen.

Die dem äußeren Drucke ausgesetzten Röhren müssen stärker gemacht werden als die inneren Druck aushaltenden Röhren; nach preußischen Vorschriften sollen Rauchröhren von Eisenblech die Stärke:

$e = 0{,}0067\,d \sqrt[3]{p} + 0{,}05$ Zoll, und solche von Messingblech $e = 0{,}01\,d \sqrt[3]{p} + 0{,}05$ Zoll erhalten. Ihre Weite d soll nie 4 Zoll überschreiten.

Die Stärke der Niethbolzen nimmt man $2e$, die Stärke der Niethköpfe $3e$ und $4e$, und den Abstand der Niethaxen vom Blechrande $3e$ und von einander $5e$.

Der Inhalt S_1 der von den Sicherheitsventilen verschlossenen Mündungen muß nach preußischen Vorschriften mindestens $\frac{1}{2000}$ der Heizfläche S betragen. In Frankreich nimmt man $\frac{S_1}{S} = \frac{0{,}000531}{p - 0{,}412}$; theoretisch ist aber bei 10facher Sicherheit:

$$\frac{S_1}{S} = 0{,}000013 \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t}{log.nat.p}}.$$

Vorschriftsmäßig sind mindestens zwei Sicherheitsventile anzubringen.

Die Breite der ringförmigen Berührungsfläche des platt aufzulegenden Ventiles soll nur $\frac{1}{2}$ bis 1 Linie betragen.

Ist p der innere Dampf- und a der äußere Atmosphärendruck, r aber der Halbmesser der Ventilfläche bis Mitte der Berührungsfläche gemessen, so hat man die directe Belastung des Ventiles mit Einschluß des Ventilgewichtes:

$$P = \pi r^2 (p - a).$$

Wirkt das Ventil an einem Hebelarme d, das Laufgewicht G an einem Arme b und ist das statische Moment des leeren Ventiles $= Qs$, so hat man:

$$G = \frac{Pd - Qs}{b}.$$

§. 59. Die Kesselfeuerung.

Der Rost, auf welchem das Brennmaterial verbrannt wird, ist bei Schiffskesseln $\frac{S}{8}$ bis $\frac{S}{6}$, bei Kesseln stehender Maschinen aber $\frac{S}{14}$ bis $\frac{S}{12}$, bei Locomotivenkesseln endlich, wo ein künstlicher Luftzug statt hat, $\frac{S}{60}$ bis $\frac{S}{50}$. Uebrigens rechnet man auch auf 14 Pfund Steinkohle oder 73 Pfund Holz einen Quadratfuß Rostfläche. Die Zwischenräume nehmen $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{4}$ der ganzen Rostfläche ein. Bei Steinkohlenfeuerung legt man diese Fläche 13 bis 18 Zoll, bei Holzfeuerung aber 18 bis 24 Zoll unter den Kesselboden. Der Aschenfall soll mindestens $2\frac{1}{2}$ Fuß tief sein.

Die Feuerbrücke führt man bis zu einem Abstande von 4 bis 6 Zoll von der unteren Kesselfläche. Die Züge oder Kanäle, welche die warme Luft um den Kessel herumführen, erhalten den Querschnitt $S_2 = \frac{S}{50}$ bis $\frac{S}{90}$ und eine Länge von höchstens 90 Fuß.

Was die Dampfwagenkessel anlangt, so bestehen diese aus einem 7 Fuß langen und $3\frac{1}{4}$ Fuß weiten, 40 bis 60 Cubikfuß Speisewasser enthaltenden Raum, durch den sich der Länge nach 120 oder mehr Feuerröhren von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll Weite hindurchziehen. Die ganze Heizfläche beträgt 400 bis 800 Quadratfuß.

Die mittlere Geschwindigkeit des Rauches in der Esse ist durch die Formel

$$v = 0{,}47 \sqrt{\frac{(t_1 - t)\,hd}{13\,d + 0{,}05\,l}}$$

bestimmt, in welcher t_1 die Temperatur, ungefähr 300°, des abziehenden Rauches, t die Temperatur (im Mittel 10°) der äußeren Luft, h die Höhe, d die mittlere Weite der Esse und l die Länge des ganzen Weges des Rauches oder

der abziehenden Luft bezeichnet. Das abziehende Rauchquantum ist nun bei dem Essenquerschnitte S_3: $Q_1 = S_3 v$.

Nimmt man $t_1 - t = 290$, rechnet man der Sicherheit wegen, auf jedes Pfund Kohlenstoff 600 Cub.-Fuß abzuführenden Rauch, und setzt man für l den mittleren Werth $100\,d$, so erhält man bei K Pfund stündlichen Kohlenstoffverbrauch die nöthige Essenhöhe

$$h = 0{,}0078 \,.\, \left(\frac{K}{S_3}\right)^2 \text{ Fuß.}$$

Nimmt man $S_3 = \frac{S}{50}$ und $K = 2S$, so erhält man hiernach die Essenhöhe $h = 78$ Fuß.

Meist nimmt man die Essenweite $d = 1/_{25}$ der Essenhöhe, weshalb sich hiernach $h = 7{,}9\ K^{2/5}$ Fuß herausstellt.

Die gewöhnliche Essenhöhe ist 60 bis 120 Fuß.

Man gibt der Essenmauer in der Regel eine innere Böschung von 0,015 bis 0,018 und eine äußere eine solche von 0,024 bis 0,030.

Versteht man unter d die obere lichte Weite der Esse, so hat man die untere lichte Weite $d_1 = d + 0{,}015\,h$; ist ferner e die Mauerstärke am Essenkopf (gewöhnlich 6 Zoll), so hat man dieselbe am Essenfuße $e_1 = e + 0{,}02\,h$.

§. 60. Dampfmaschinen.

Ist p_0 die Spannung des Dampfes im Dampfkessel, q_0 die im Condensator, oder, wenn ein solcher nicht vorhanden ist, die der freien Luft, ferner ε das Expansionsverhältniß und η der Wirkungsgrad, so hat man die einem Dampfquantum Q (Cub.-Fuß) entsprechende Leistung annähernd:

$$L = \eta \,.\, 144\ Q p_0 \left(1 + Ln.\ \varepsilon - \frac{\varepsilon\, q_0}{p_0}\right) \text{ Fußpfd.}$$

Bei Maschinen ohne Expansion ist $\varepsilon = 1$, also $Ln.\,\varepsilon = 0$, bei eincylindrigen Expansionsmaschinen ist $\varepsilon = \frac{s_1}{s}$, das

Verhältniß zwischen dem ganzen Kolbenhube s_1 und dem Hube s vor der Expansion; bei den zweicylindrigen oder Woolf'schen Expansionsmaschinen aber $\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s}$, das Verhältniß zwischen dem von der Kolbenfläche F_1 im großen Cylinder durchlaufenen Raume $F_1 s_1$ und dem von der Kolbenfläche F im kleinen Cylinder durchlaufenen Raume $F s$.

Der Wirkungsgrad η ist bei verschiedenen Maschinensystemen verschieden und wächst zumal mit der Stärke der Maschinen. Vorzüglich hängt er von der Kolbenreibung, Abkühlung und von dem Druckverluste ab, welchen der Dampf beim Uebergang aus dem Kessel in den Cylinder erleidet, und macht, daß die Spannung p im Cylinder kleiner ist als die Spannung p_0 im Kessel. Wenn die Geschwindigkeit der Maschine eine mittlere, wenn ferner die Dampfklappe vollkommen geöffnet ist und wenn die Querschnitte der Dampfwege u. s. w. die vorschriftsmäßigen sind, so kann man bei einer Leistung von L Pferdekräften folgende Wirkungsgrade erwarten.

Für Watt'sche oder Tiefdruckmaschinen:

$$\eta = 0{,}40 + 0{,}0010\,(L - 4),$$

für Woolf'sche oder zweicylindrige Expansionsmaschinen mit Condensation:

$$\eta = 0{,}30 + 0{,}0028\,(L - 4),$$

für eincylindrige Hochdruckmaschinen mit Condensation:

$$\eta = 0{,}34 + 0{,}0013\,(L - 4),$$

und für solche ohne Condensation:

$$\eta = 0{,}35 + 0{,}0028\,(L - 4).$$

Hiernach ist folgende Tabelle I. der Wirkungsgrade berechnet.

Tabelle I.

Leistung in Pferdekräften.	Die Wirkungsgrade für			
	Watt'sche Maschinen.	Woolf'sche Maschinen.	Hochdruckmaschinen mit Condensation.	Hochdruckmaschinen ohne Condensation.
4	0,40	0,30	0,34	0,35
10	0,41	0,32	0,35	0,37
20	0,42	0,34	0,36	0,39
30	0,43	0,37	0,37	0,42
40	0,44	0,40	0,39	0,45
50	0,45	0,43	0,40	0,48
60	0,46	0,46	0,41	0,51
70	0,47	0,48	0,43	0,53
80	0,48	0,51	0,44	0,56
90	0,49	0,54	0,45	0,59
100	0,50	0,57	0,46	0,62

Folgende zwei Tabellen geben die verschiedenen Dampfspannungen und verschiedenen Expansionsverhältnissen entsprechenden Leistungen von 1 Cubikfuß Dampf an. Will man die einem gegebenen Dampfquantum Q entsprechende effective Leistung haben, so muß man den aus der Tabelle II. oder III. genommenen Werth noch durch ηQ multipliciren, und soll umgekehrt das einer Leistung entsprechende Dampfquantum Q bestimmt werden, so hat man L durch η und durch den Werth aus der Tabelle II. oder III. zu dividiren. Z. B. wenn eine Watt'sche Maschine bei $1\frac{1}{4}$ Atmosphären Dampfspannung und bei der Expansion $\varepsilon = \frac{3}{1} = \frac{6}{2}$, pr. Secunde 5 Cubikfuß Dampf verbraucht, so ist nach Tabelle II. die entsprechende theoretische Leistung $= 5 \,.\, 9,87 = 49,35$ Pferdekräfte, und, wenn man $\eta = 0,45$ nimmt, die effective $L = 0,45 \,.\, 49,35 = 22,2$, oder genauer, wenn man nach Tab. I. $\eta = 0,40 + 0,001 \,.\, (22 - 4) = 0,42$ setzt, $L = 0,42 \,.\, 49,35 = 20,7$ Pferdekräfte.

Umgekehrt ergibt sich für eine Hochdruckmaschine ohne Condensation die einer Leistung von 40 Pferdekräften entsprechende Dampfmenge bei der Spannung $p = 4\frac{1}{2}$ Atmosphäre und bei dem Expansionsverhältniß $\varepsilon = \frac{2}{1}$ mittels der Tabellen I. und III.:

$$Q = \frac{40}{0,45 \,.\, 23,88} = 3,72 \text{ Cub.-Fuß.}$$

Dividirt man diesen Werth von Q mit dem aus Tafel III., §. 56., zu nehmenden specifischen Dampfvolumen, so erhält man das entsprechende Speisewasserquantum $M = \frac{Q}{\mu}$ Cub.-Fuß, und multiplicirt man diesen Werth durch 66, so erhält man auch das Gewicht $W = \frac{66\,Q}{\mu}$ desselben. Da endlich ein Pfund gute Steinkohlen 7 bis 8 Pfund Dampf liefert, so erhält man endlich das Steinkohlenquantum

$$K = \frac{W}{7,5} = \frac{44\,Q}{5\mu} \text{ Pfund.}$$

Für das im letzten Beispiel gefundene Dampfquantum $Q = 3,72$ Cub.-Fuß ist, da man $\mu = 429$ zu nehmen hat, das Speisewasserquantum $M = \frac{3,72}{429} = 0,00867$ Cub.-Fuß $= 0,572$ Pfund, und hiernach der Steinkohlenaufwand pr. Secunde, $K = \frac{0,572}{7,5} = 0,0763$ Pfund, also stündlich $= 3600 \,.\, 0,0763 = 275$ Pfund.

Gewöhnlich rechnet man bei Watt'schen Maschinen stündlich pr. Pferdekraft = 10 bis 13 Pfund gute Steinkohle, bei Expansionsmaschinen mit Hochdruck und Condensation = 5 bis 7 Pfd., ohne Condensation = 7 bis 11 Pfd., endlich bei Hochdruckmaschinen ohne Expansion und Condensation = 15 bis 20 Pfund.

Nimmt man 7 Pfund Steinkohle pr. Pferdekraft, so hat man für 40 Pferdekräfte 280 Pfund Steinkohle, was mit obiger Berechnung gut stimmt.

Tabelle II.

Die Leistungen von 1 Cubikfuß Dampf bei Condensationsmaschinen, den Gegendruck $q_0 = \frac{1}{10}$ Atmosphären = 1,505 Pfund gesetzt.

Dampfspannung in Atmosphären.	Leistungen in Pferdekräften bei folgenden Expansionsverhältnissen.					
	6/6	6/5	6/4	6/3	6/2	6/1
1¼	4,89	5,77	6,83	8,14	9,87	12,28
1½	5,95	7,03	8,32	9,94	12,12	15,25
1¾	7,01	8,28	9,81	11,74	14,33	18,21
2	8,07	9,54	11,31	13,54	16,56	21,18
2½	10,20	12,05	14,29	17,14	21,01	27,11
3	12,32	14,56	17,28	20,73	25,48	33,04
3½	14,45	17,07	20,26	24,33	29,94	38,97
4	16,57	19,59	23,25	27,93	34,40	44,91
5	20,82	24,61	29,23	35,12	43,31	56,77
6	25,07	29,63	34,20	42,32	52,23	68,63

Tabelle III.

Die Leistungen von 1 Cubikfuß Dampf bei Maschinen ohne Condensation, den Gegendruck $q_0 = 1$ Atmosphäre = 15,05 Pfund gesetzt.

Dampfspannung in Atmosphären.	Leistungen in Pferdekräften bei folgenden Expansionsverhältnissen.					
	6/6	6/5	6/4	6/3	6/2	6/1
2	4,25	4,95	5,57	5,89	5,09	—
2½	6,37	7,46	8,56	9,49	9,55	4,16
3	8,47	9,97	11,54	13,09	14,00	10,09
3½	10,62	12,49	14,53	16,68	18,46	16,02
4	12,75	15,00	17,52	20,30	22,92	21,91
4½	14,87	17,51	20,50	23,88	27,38	27,89
5	17,00	20,02	23,49	27,48	31,84	33,82
6	21,24	25,04	29,46	34,67	40,76	45,68

Aus dem Dampfquantum Q lassen sich nun auch mit Hilfe folgender Tabellen die Hauptdimensionen der Maschinen berechnen. Tabelle IV. gibt zunächst in der zweiten Columne die jeder Maschinenstärke entsprechende Kolbengeschwindigkeit, und in den übrigen die einem Cubikfuße Dampf entsprechende Kolbenfläche, welche daher noch mit Q zu multipliciren ist, um den in Frage stehenden Werth derselben zu erhalten. Mit Hilfe der Kreistabelle (S. 210 u. s. w.) kann man nun auch noch den Kolbendurchmesser finden. Nachdem man aus Tabelle V. die Anzahl der Kolbenspiele genommen hat, so findet man endlich mittels Tabelle VI. den entsprechenden Kolbenhub s_1, woraus sich noch der Hub vor der Expansion $s = \frac{s_1}{\varepsilon}$ berechnen läßt. Bei den Woolf'schen Maschinen hat man $s = \frac{s_1}{\nu}$, und $F_1 = \frac{\varepsilon}{\nu} F$ zu setzen, und nimmt das Verhältniß ν der Kolbenhübe in beiden Cylindern gewöhnlich $\frac{4}{3}$. Für eine Hochdruckmaschine von 40 Pferdekräfte, welche bei der Expansion $\frac{2}{1}$ nach der obigen Berechnung 3,72 Cubikfuß Dampf pr. Secunde verbraucht, ist nach Tabelle IV. die Kolbengeschwindigkeit 42 Zoll und die Kolbenfläche $F = 82{,}2 \,.\, 3{,}72 = 305{,}7$ Quadratzoll, und daher der Kolbendurchmesser oder die Cylinderweite $d = 19{,}7$ Zoll. Ferner ist nach Tabelle V. die Anzahl der Kolbenspiele pr. Minute $28\frac{1}{2}$ und daher nach Tabelle VI. der erforderliche Kolbenhub $s_1 = 45 - \frac{45{,}0-39{,}4}{8} = 45-0{,}7 = 44{,}3$ Zoll; endlich der Hub vor der Expansion:

$$s = \frac{s_1}{\varepsilon} = \frac{44{,}3}{2} = 22{,}15 \text{ Zoll}.$$

Tabelle IV.

Die Kolbengeschwindigkeiten und die Inhalte der Kolbenflächen für 1 Cubikfuß Dampfverbrauch pr. Secunde:

Stärke der Maschinen in Pferdekräften.	Kolbengeschwindigkeiten in Zollen.	Kolbenflächen in Quadratzoll bei folgenden Expansionsverhältnissen					
		6/6	6/5	6/4	6/3	6/2	6/1
4	34	50,8	61,0	76,2	101,6	152,5	304,9
10	36	48,0	57,6	72,0	96,0	144,0	288,0
20	38	45,5	54,6	68,2	90,9	136,4	272,8
30	40	43,2	51,8	64,8	86,4	129,6	259,2
40	42	41,1	49,4	61,7	82,2	123,4	246,9
50	44	39,3	47,1	58,9	78,5	117,8	235,6
60	46	37,6	45,1	56,3	75,1	112,7	225,4
70	48	36,0	43,2	54,0	72,0	108,0	216,0
80	50	34,6	41,5	51,8	69,1	103,7	207,4
90	52	33,2	39,9	49,8	66,4	99,7	199,4
100	54	32,0	38,4	48,0	64,0	96,0	192,0

Tabelle V.

Die Anzahl der Kolbenspiele pr. Minute.

Maschinenstärke in Pferdekräften.	Kolbenspiele bei folgenden Maschinensystemen.				
	Watt'sche Maschinen.	Woolf'sche Maschinen.	Hochdruckmaschinen		
			mit Condensation		ohne Condensation.
			ohne Balancier.	m. Balanc. od. oscillir. Cylinder.	
4	29	34	40	30	40
10	26	30	35	25	35
20	22½	27	32	22	32
30	20	25	30	20	30
40	18½	23	28½	18½	28½
50	17½	21½	27	17½	27
60	17	20½	26	17	26
70	16½	19½	25½	16½	25½
80	16½	19	25	16½	25
90	16	18½	24½	16	24½
100	16	18	24	16	24

Tabelle VI.

Die Kolbenhübe für verschiedene Geschwindigkeiten und Kolbenspiele.

Kolbengeschwindigkeiten in Zoll.	Kolbenhübe bei folgender Anzahl von Kolbenspielen.						
	16	20	24	28	32	36	40
34	63,7	51,0	42,5	36,4	31,9	28,3	25,5
36	67,5	54,0	45,0	38,6	33,8	30,0	27,0
38	71,2	57,0	47,5	40,7	35,6	31,7	28,5
40	75,0	60,0	50,0	42,9	37,5	33,3	30,0
42	78,7	63,0	52,5	45,0	39,4	35,0	31,5
44	82,5	66,0	55,0	47,1	41,2	36,7	33,0
46	86,2	69,0	57,5	49,3	43,1	38,3	34,5
48	90,0	72,0	60,0	51,4	45,0	40,0	36,0
50	93,7	75,0	62,5	53,6	46,9	41,7	37,5
52	97,5	78,0	65,0	55.7	48,7	43,3	39,0
54	101,5	81,0	67,5	57,9	50,6	45,0	40,5

Aus dem Dampfquantum Q berechnen sich auch noch die Dimensionen der Speisepumpe, Kalt- und Warmwasserpumpe u. s. w.

Der Spielraum oder das Product aus Hub s_2 und Querschnitt F_2 des Kolbens der Speisepumpe ist:

$$V_2 = \frac{2}{\mu} F s;$$

der Sicherheit wegen, und um in kurzer Zeit den Kessel füllen zu können, nimmt man aber:

$$F_2 s_2 = V_2 = \frac{12}{\mu} F s; \quad \text{also}$$

für 1¼	2	3	4	5	6 Atmosphären.
= 0,008	0,013	0,020	0,025	0,030	0,037 Fs.

Für die berechnete 40pferdige Maschine ist hiernach der Spielraum der Speisepumpe = 0,0275 . 305,7 . 22,15 = 186 Cubikzoll. Nimmt man den Kolbenhub $s_2 = \frac{1}{4} s_1$ = 11 Zoll, so erhält man hiernach die Fläche $F_2 = \frac{186}{11}$ = 17 Quadratzoll und daher den Durchmesser $d_2 = 4\frac{2}{3}$ Zoll.

Das Kaltwasserquantum bei Condensationsmaschinen läßt sich aus dem Speisewasserquantum $M = \frac{Q}{\mu}$, und aus der Temperatur t_0 des kalten Wassers, aus der t des Dampfes und der t_2 im Condensator, nach Watt durch die Formel:

$$M_1 = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) M,$$

oder nach Southern durch die Formel:

$$M_1 = \left(\frac{540 + t - t_2}{t_2 - t_0}\right) M \text{ berechnen.}$$

Nehmen wir $t_0 = 12$ und $t_2 = 35^0$, und setzen wir der Sicherheit wegen statt 640^0 oder $540^0 + t$, die Zahl 680^0, so bekommen wir:

$$M_1 = \frac{645}{23} M = 28 M;$$

es ist also das Kaltwasserquantum ungefähr 28mal so groß als das Speisewasserquantum.

Der Spiel= oder Fassungsraum der Kaltwasserpumpe bestimmt sich durch den Ausdruck:

$$F_3 \, s_3 = V_3 = 28 \, . \, \frac{2}{\mu} F s, \text{ also}$$

für $1\frac{1}{4}$	2	3	4	5	6 Atmosphären.
0,040	0,061	0,088	0,117	0,145	0,172 $F s$.

Das Volumen oder der Spielraum der Luft= und Warmwasserpumpe ist:

$$F_4 s_4 = V_4 = \frac{288}{\mu} F s, \text{ also}$$

für 1¼	2	3	4	5	6 Atmosphären.
V_4 = 0,20	0,31	0,46	0,60	0,75	0,89 Fs.

Meist hat man den Hub s_4 dieser Pumpe $= \frac{1}{2} s_1$, und daher die Kolbenfläche derselben:

$$F_4 = \frac{576\, Fs}{\mu s_1}.$$

Das Volumen des Condensators macht man dem der Luftpumpe gleich.

Aus dem Dampfquantum Q ergibt sich endlich noch die Größe der Heizfläche:

$$S = \frac{66}{4} \cdot \frac{3600\, Q}{\mu} = \frac{59400\, Q}{\mu} \text{ Quadratfuß, also}$$

für 1¼	2	3	4	5	6 Atmosphären.
S = 42	65	96	124	153	182 Q Q.-Fuß.

Für die oben berechnete 40pferdige Maschine wäre hiernach die Heizfläche $S = 3{,}72 \cdot \frac{124 + 153}{2} = 515$ Q.-Fuß, woraus sich nun nach §. 58 die Dimensionen des Dampfkessels berechnen lassen.

Anlangend die Querschnitte der Dampfröhren und Dampfwege, so macht man diese $= 0{,}04\ F$.

Viertes Kapitel.

Die Zwischen-Maschinen.

§. 61. Seile, Ketten und Stangen.

Hanfseile kann man auf jeden Quadratzoll mit 2000 Pfund belasten; deshalb ist denn die Tragkraft derselben $P = 1571 \cdot d^2$, und umgekehrt $d = 0{,}0252 \sqrt{P}$ Zoll $= 0{,}39 \sqrt{P}$ Linien.

Das Gewicht von 100 Fuß Hanfseil ist $G = 36\ d^2$ Pfund.

Hiernach hat man folgende Tafel zu gebrauchen.

Seilstärke in Zollen.	Tragkraft in Pfund.	Gewicht von 100 Fuß laufenden Seiles.
1/8	25	0,56
1/4	98	2,25
1/2	393	9
3/4	884	20
1	1571	36
1 1/2	3535	81
2	6284	144
2 1/2	9819	225
3	13139	324

Bei gleicher Tragkraft ist die Stärke eines Drahtseiles 0,4 und das Gewicht 0,45 von dem eines Hanfseiles. Kettenglieder, zumal wenn diese mit Steegen ausgerüstet sind, erhalten eine Dicke 0,3 von der eines Hanfseiles

bei gleicher Belastung, und eine ganz eiserne Kette wiegt 2,5 mal so viel als ein gleich langes und gleich haltbares Hanfseil.

Eine geradlinige Bewegung läßt sich mittels einer Stange ziehend oder schiebend fortpflanzen. Letzteres ist jedoch nur bei mäßigen Stangenlängen möglich. Wirkt eine Stange bloß ziehend, so hat man bei der Kraft P Pfund den nöthigen Querschnitt der Stange

$F = \frac{P}{1200}$ Quadratzoll, wenn dieselbe aus Holz,

$F = \frac{P}{10000}$ » » » » Schmiedeeisen,

$P = \frac{P}{3000}$ » » » » Gußeisen besteht.

Die Stärke d_1 cylindrischer Kolbenstangen aus Schmiedeeisen berechnet sich aus dem Durchmesser d des Kolbens und aus der Differenz p der Drücke auf beiden Kolbenflächen in Atmosphären, durch die Formel:

$d_1 = 0{,}026\ d\ (1{,}0 + \sqrt{p})$, für bloße Zugkraft,

$d_1 = 0{,}053\ d\ (1{,}4 + \sqrt{p})$, für Zug- und Druckkraft.

Z. B. für die Kolbenstange einer Watt'schen Dampfmaschine, wo $p = \frac{1}{4}$ Atmosphäre ist:

$$d_1 = 0{,}053\ (1{,}4 + 0{,}5)\ d = 0{,}1\ d.$$

§. 62. Zapfen und Wellen.

Ist R Pfund der Druck eines Zapfens gegen sein Lager, so hat man für die Stärke desselben:

1) $d = 0{,}048 \sqrt{R}$, oder nach Buchanan u. Armengaud

2) $d = 0{,}27 \sqrt[3]{R}$ Zoll, sofern derselbe aus Gußeisen besteht; ist er aber aus Schmiedeeisen, so mache man ihn nur $\frac{3}{4}$ mal so stark.

Die Länge des Zapfens ist $1{,}25\,d$ zu nehmen. Gewöhnlich ist für P das halbe Gewicht der Welle sammt Belastung (Räder u. s. w.) einzusetzen.

Hiernach ist folgende

Tabelle I.
der Zapfenstärken berechnet.

Zapfendrücke in Centnern zu 100 Pfund:								
	2	5	10	20	50	100	150	200
Entsprechende Zapfenhalbmesser in Zollen:								
nach 1)	0,68	1,07	1,52	2,15	3,39	4,80	5,88	6,69
nach 2)	1,6	2,13	2,70	3,40	4,62	5,81	6,66	7,33

Die Stärken der Wellen, welche vorzüglich eine Torsionskraft auszuhalten haben, sind nach dem Kraftmomente Pa Fußpfund oder nach der Leistung $\frac{L}{u}$ Pferdekräfte bei u Umdrehungen pr. Minute zu berechnen.

Für runde gußeiserne Wellen hat man die Stärke:

$$d = 0{,}35 \sqrt[3]{Pa}$$

$$= 6 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll.}$$

Hiernach hat man folgende Wellenstärken:

1	2	3	5	7	9	12 Zoll.
bei den statischen Momenten Pa in Fußpfund:						
23	187	630	1490	8000	17000	40000
und bei den Leistungen $\frac{L}{u}$ Pferdekräfte:						
0,005	0,037	0,097	0,578	1,59	3,38	8,00

Lange Transmissionswellen können, damit sie keine übermäßige Torsion erleiden, folgende Stärken erhalten:

$$d = 4 \sqrt[4]{\frac{Ll}{u}} \text{ Zoll,}$$

wo l die Länge der Welle in Fußen ausdrückt.

Die Stärken der Stifte stehender Wellen und Turbinen sind aus dem Gewichte oder Axendruck G Pfund und der Umdrehungszahl u pr. Min. durch die Formel:

$$d = 0{,}017 \sqrt{(1 + 0{,}1\,u)\ G}$$ Zoll zu berechnen.

Wenn Wellen bedeutende Lasten, z. B. ein Wasserrad tragen, so muß man bei der Bestimmung ihrer Stärken auf Torsion und Biegung zugleich Rücksicht nehmen. Ist Pa das Torsionsmoment in Fußpfund, R der Druck in einem der Zapfen und e der Abstand dieses Zapfens von dem Lastpunkte, so hat man für eine gußeiserne Welle:

$$d^6 - 0{,}02\ Red^3 = (0{,}35)^6\ P^2a^2,$$

und hiernach:

$$d = 0{,}35\ .\ \psi \sqrt[3]{Pa},$$

wenn ψ den Ausdruck $(0{,}233\,n + \sqrt{1 + 0{,}0544\,n^2})^{1/2}$ und n das Verhältniß $\frac{Re}{Pa}$ ausdrückt.

Für $n = \frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
ist $\psi = 1{,}04$	1,09	1,16	1,24	1,32	1,39	1,46

Hölzerne Wellen sind reichlich doppelt so stark und schmiedeeiserne Wellen um einige Procent schwächer zu machen. Ebenso sind die Seiten vierkantiger Wellen etwas kleiner zu machen als die Stärken runder Wellen.

Um das Einbiegen langer Wellen zu mäßigen, was besonders bei aufsitzenden Rädern nachtheilig sein würde, bestimmt man deren Stärken auch nach der Formel:

$$d = 0{,}27 \sqrt[4]{Pl^3},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Last P in der Mitte der Welle wirkt, daß die letztere aus Gußeisen besteht und eine Länge von l Fußen hat.

Sind Wellen zu kuppeln, so macht man den Kuppelkopf um $\frac{1}{4}$ stärker als die Getriebwelle, die Kuppelhülse

aber doppelt so lang und ⅓ so dick als die Stärke dieser Welle.

§. 63. Räderwerke.

Liegen die Axen zweier Räder, wovon das eine das andere mittels Riemen oder Zähne in Bewegung setzt, in einerlei Ebene, so haben sie eine gemeinschaftliche Umfangsgeschwindigkeit c. Sind nun r_1 und r_2 die Halbmesser und u_1 und u_2 die Umdrehungszahlen dieser Räder, so gilt auch die Regel:

$$c = \frac{\pi\, u_1\, r_1}{30} = \frac{\pi\, u_2\, r_2}{30}.$$

Das Umsetzungsverhältniß $\psi = \frac{u_2}{u_1}$ ist hiernach auch $= \frac{r_1}{r_2}$. Die Theilung oder die Entfernung s je zweier Zähne von einander, ist bei zwei in einander greifenden Rädern dieselbe; ist n_1 die Anzahl der Zähne des einen und n_2 die des anderen Rades, so hat man

$s = \frac{2\pi r_1}{n_1} = \frac{2\pi r_2}{n_2}$, daher umgekehrt $n_1 = \frac{2\pi r_1}{s}$,

$n_2 = \frac{2\pi r_2}{s}$ und $\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{u_2}{u_1} = \psi$.

Gewöhnlich ist ψ und u_1 gegeben, und hiernach zunächst

$$1)\quad u_2 = \psi u_1$$

zu berechnen. Der eine der beiden Halbmesser r_1 oder r_2 ist der Stärke d der Welle, auf welche das entsprechende Rad sitzt, angemessen auszuwählen, und der andere läßt sich nun durch eine der Formeln:

$$2)\quad r_2 = \frac{r_1}{\psi} \text{ oder } r_1 = \psi r_2 \text{ berechnen.}$$

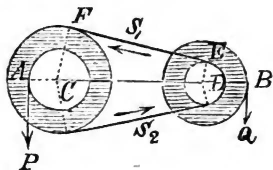
Ist bei Zahnrädern e die Entfernung oder der Abstand ihrer beiden Axen, so hat man auch $r_1 + r_2 = e$, und daher

$$3)\quad r_1 = \frac{\psi\, e}{1+\psi} \text{ und } r_2 = \frac{e}{1+\psi}.$$

Die Wellen zweier in einander greifenden oder durch

Riemen verbundenen Räder haben nahe ein gleiches Arbeitsvermögen L; und es ist die Kraft an den Umfängen dieser Räder $K = \frac{L}{c} = \frac{30}{\pi u_1 r_1} L = \frac{30}{\pi u_2 r_2} L = \frac{a}{r_1} P = \frac{b}{r_2} Q$, wenn die Triebwelle C, Fig. 271, durch eine am Hebelarme $CA = a$ angreifende Kraft umgetrieben wird, und die Getriebwelle D mit einer an dem Hebelarme $DB = b$ wirkenden Last Q widersteht.

Fig. 271.



Es ist auch das Kraftverhältniß:

$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{b}{a} = \psi \frac{b}{a}$, so wie umgekehrt

$\frac{v}{w} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{\psi} \cdot \frac{a}{b}$ das Verhältniß der Geschwindigkeiten v und w von P und Q.

Bei Riemen- oder Schnurrädern ist, wenn S_1 und S_2 die Riemenspannungen bezeichnen, $K = S_1 - S_2$; und wenn α der mit dem Riemen bedeckte Bogen für den Radius 1, also $= \frac{\alpha^0}{180^0} \pi = 0{,}01745\, \alpha^0$, φ aber den Coefficienten der Reibung zwischen dem Riemen und dem Umfange des Rades bezeichnet:

$$S_1 = e^{\varphi\alpha} S_2 = (2{,}718)^{\varphi\alpha} S_2.$$

Hiernach ist nun:

1) $S_2 = \frac{K}{e^{\varphi\alpha} - 1}$ und 2) $S_1 = \frac{e^{\varphi\alpha} K}{e^{\varphi\alpha} - 1}$, und

folglich die mittlere, dem Riemen vor der Bewegung zu ertheilende Spannung:

$$3)\quad S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{e^{\varphi\alpha} + 1}{e^{\varphi\alpha} - 1} \cdot \frac{K}{2}.$$

Der Reibungscoefficient ist:

φ = 0,47 für gewöhnl. fette Riemen auf hölzernen Trommeln,
φ = 0,50 für neue Riemen auf hölzernen Trommeln,
φ = 0,28 für gewöhnliche fette Riemen auf abgedrehten gußeisernen Trommeln,
φ = 0,38 für feuchte Riemen auf abgedrehten gußeisernen Trommeln,
φ = 0,50 für Hanfseile auf hölzernen Trommeln.

Hiernach hat man folgende

Tabelle I.

zur Berechnung der Riemenspannungen zu gebrauchen.

Verhältnisse $\frac{\alpha}{2\pi}$	Werthe von $e^{\varphi\alpha}$					
	Neue Riemen auf hölz. Tromm.	Gewöhnliche Riemen auf Holz.	Gewöhnliche Riemen auf Eisen.	Feuchte Riemen auf Eisen.	Schnüre auf Rollen von Holz. rauh.	Schnüre auf Rollen von Holz. polirt.
0,2	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,3	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,4	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,5	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,6	6,59	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,7	9,00	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,8	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,9	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,0	23,14	19,16	5,81	10,89	23,90	7,95

Die Laufriemen werden gewöhnlich aus gutem lohgarem Rindsleder geschnitten, in der neuesten Zeit verwendet man hierzu auch mit großem Vortheil Gutta percha. Die gewöhnliche Breite der Riemen ist 2 bis 8 Zoll. Man kann dieselbe durch die Formel $b = 25 \frac{L}{c}$ Zoll bestimmen, wobei vorausgesetzt wird, daß der Riemen den halben Umfang einer Trommel bedeckt. Die in der Mitte etwas zu wölbende Spur macht man mindestens $\frac{5}{4}\,b$ weit.

Sehr oft spannt man auch die Riemen durch eine Stemmrolle an. Die nöthige Spannkraft derselben ist nach §. 10, S. 393, zu bestimmen.

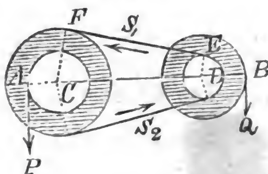
In dem gewöhnlichen Fall, wo der Laufriemen nicht gekreuzt ist, hat man für den mit Riemen bedeckten Bogen α

$\cos. \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{r_1 - r_2}{e}$, und die Länge des Laufriemens selbst

$l = 2e \sin. \frac{\alpha}{2} + \alpha r_2 + (2\pi - \alpha) r_1$; wenn e die Entfernung CD der beiden Wellenaxen bezeichnet.

Beispiel. Die Welle C, Figur 272, wird durch ein aufsitzendes unterschlägiges Wasserrad pr. Minute 21mal umgedreht und nimmt von diesem eine Leistung von 2 Pferdekräften auf. Welche Anordnung ist nun zu treffen, um hierdurch eine andere Welle D mit 180 Umdrehungen pr. Minute in Bewegung zu setzen? Das

Fig. 272.



Umsetzungsverhältniß ist $\psi = \frac{60}{7} = 8^1/_7$. Die Stärke der Getriebwelle ist $d = 6 \sqrt[3]{\frac{2}{180}} = 1,34$ Zoll, und nimmt man hiernach den Halbmesser des Getriebes $r_2 = 3d = 4$ Zoll, so erhält man den des Treibrades $r_1 = \frac{60}{7} \cdot 4 = 34,3$ Zoll. Die Umfangsgeschwindigkeit der Räder oder die Geschwindigkeit des Laufriemens ist $c = \frac{\pi \cdot u_1 r_1}{30} = \frac{3,1416 \cdot 21 \cdot 34,3}{30 \cdot 12} = 6,29$ Fuß, daher die nöthige Riemenbreite $b = \frac{25 \cdot 2}{6,29} = 8$ Zoll, und die Spurweite der Räder $= 10$ Zoll. Rückt man ferner die Wellen 10 Fuß auseinander, so hat man für den mit Rie-

men bedeckten Bogen $cos. \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{30,3}{12.10} = \pm 0,25$;

daher $\frac{\alpha^0}{2} = 75^0,30'$ und $104^0,30'$, also für die kleine Trommel $\alpha^0 = 151^0$ und für die große 209^0, endlich ist die Länge des Riemens:

$$l = 20 \; sin. \; 75^0,30' + \frac{2,635 \; . \; 4}{12} + \frac{3,648 \; . \; 34,3}{12}$$

$$= 19,36 + 0,88 + 10,43 = 30,67 \text{ Fuß.}$$

Da von der kleineren Trommel der Theil $\frac{75,5}{180} = 0,42$ des ganzen Umfanges von dem Riemen bedeckt wird, so ist, wenn man $\varphi = 0,47$ annimmt, $e^{\varphi\alpha} = 3,26 + 0,22 = 3,48$ und da die Umdrehungskraft $K = \frac{510.L}{c} = \frac{510.2}{6,29} = 162$ Pfund beträgt: $S_2 = \frac{162}{3,48-1} = \frac{162}{2,48} = 65,3$ Pf., $S_1 = 3,48 \; . \; 65,3 = 227,2$ Pfund, und die Spannung im Ruhestande: $S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{292,5}{2} = 146,25$ Pfund, wofür der Sicherheit wegen $\frac{1}{10}$ mehr, also 161 Pfund, zu setzen ist.

Bei Zahnrädern hängt die Anordnung vorzüglich von der Stärke der Zähne ab. Gußeisernen Zähnen soll man bei dem Drucke K Pfund, oder der Leistung L Pferdekräfte die Stärke:

$$b = 0,03 \sqrt{K} = 0,677 \sqrt{\frac{L}{c}} = 2,09 \sqrt{\frac{L}{ur}} \text{ Zoll}$$

geben, hölzernen aber die Stärke:

$$b = 0,045 \sqrt{K} = 1,016 \sqrt{\frac{L}{c}} = 3,14 \sqrt{\frac{L}{ur}};$$

oft macht man letztere auch noch dicker, z. B.:

$$= 0,05 \sqrt{K}.$$

Die Zahnlücke macht man um 0,1 weiter, und daher ist die Theilung $S = 2,1 \, b$, wenn die Zähne beider Räder aus einerlei Material bestehen. Sind aber die Zähne des einen

Rades aus Holz und die des anderen aus Eisen, so hat man $s = 1{,}1\,b_1 + b_2$ zu nehmen, wo b_1 die Dicke eines eisernen und b_2 die eines hölzernen Zahnes bezeichnet.

Die Höhe eines Zahnes ist $h = 1{,}5\,b$, und die Länge desselben:

bei langsam umlaufenden Rädern $l = 4\,b$ bis $5\,b$,
bei sehr schnell umgehenden aber $l = 6\,b$ bis $7\,b$.

Folgende Tabelle gibt die am gewöhnlichsten vorkommenden Verhältnisse zwischen Zahnstärke b, Leistung L und Umdrehungsgeschwindigkeit c an.

Tabelle II.

Theilungstabelle für Räder mit eisernen Zähnen.

Zahnstärken in Zollen.	Leistungen in Pferdekräften bei folg. Geschwindigkeiten:					
	1	2	4	6	8	10 Fuß.
1/2	0,5	1,1	2,2	3,1	4,4	5,5
3/4	1,2	2,4	4,9	7,4	9,8	12,3
1	2,2	4,4	8,7	12,5	17,4	21,8
1 1/4	3,4	6,8	13,6	14,4	27,2	34,1
1 1/2	4,9	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0
1 3/4	6,7	13,4	26,7	40,1	53,4	66,8
2	8,7	17,4	34,9	52,3	69,8	87,2
2 1/4	11,0	22,1	44,1	66,2	88,3	110,4

Diese Tabelle läßt sich auch für hölzerne Zähne gebrauchen, wenn man nur die Werthe in der ersten Vertikalcolumne um die Hälfte größer nimmt. Hat man hiernach die Zahnstärke b und daraus die Theilung s gefunden, so kann man mit Hilfe der folgenden Tafel III. die entsprechende Anzahl n der Zähne finden. Es ist nämlich $s = 2\,r\,sin.\left(\frac{180}{n}\right)$, daher umgekehrt $n = \frac{180^0}{angul.\left(sin. = \frac{s}{2\,r}\right)}$. Folgende Tabelle gibt für die Theilung 1 die allen Zähnezahlen von 10 bis 299 entsprechenden Radhalbmesser r an.

Um die der gegebenen Theilung s entsprechenden Zähnezahlen zu finden, muß man diese in den gegebenen Radhalbmesser r dividiren, und den gefundenen Quotienten in der Tafel aufsuchen. Geht man von der gefundenen Stelle

Tabelle III.

Die Halbmesser der Theilungskreise für die Theilung 1 und für die Zähnezahlen 10 bis 299.

	0	1	2	3	4
10	1,618	1,774	1,932	2,089	2,247
20	3,196	3,355	3,513	3,672	3,830
30	4,783	4,942	5,101	5,260	5,419
40	6,373	6,532	6,691	6,850	7,009
50	7,963	8,122	8,281	8,440	8,599
60	9,553	9,712	9,872	10,031	10,190
70	11,144	11,303	11,403	11,622	11,781
80	12,735	12,895	13,054	13,213	13,371
90	14,327	14,486	14,645	14,804	14,963
100	15,918	16,077	16,236	16,395	16,554
110	17,509	17,608	17,827	17,987	18,146
120	19,101	19,260	19,419	19,548	19,737
130	20,692	20,851	21,010	21,169	21,328
140	22,283	22,442	22,602	22,761	22,920
150	23,875	24,034	24,193	24,352	24,511
160	25,466	25,625	25,784	25,944	26,403
170	27,058	27,217	27,376	27,535	27,694
180	28,649	28,808	28,976	29,126	29,286
190	30,241	30,400	30,569	30,718	30,977
200	31,832	31,991	32,150	32,310	32,469
210	33,424	33,583	33,742	33,901	34,060
220	35,015	35,174	35,333	35,492	35,652
230	36,607	36,766	36,925	37,084	37,243
240	38,198	38,357	38,516	38,675	38,835
250	39,790	39,949	40,108	40,267	40,426
260	41,381	41,540	41,699	41,858	42,018
270	42,973	43,132	43,291	43,450	43,609
280	44,564	44,723	44,882	45,042	45,201
290	46,156	46,315	46,474	46,633	46,792

links herüber und vertikal aufwärts, so findet man am Ende die Zehner und Einer der gesuchten Zähnezahl *n*. Um ganze und runde Werthe für *n* zu erhalten, ist es nachher noch nöthig, *r* etwas abzuändern.

Tabelle III.

Die Halbmesser der Theilungskreise für die Theilung 1 und für die Zähnezahlen 10 bis 299.

	5	6	7	8	9
10	2,405	2,563	2,721	2,879	3,038
20	3,989	4,148	4,307	4,465	4,624
30	5,578	5,737	5,896	6,055	6,214
40	7,168	7,327	7,486	7,645	7,804
50	8,758	8,917	9,076	9,235	9,394
60	10,349	10,508	10,667	10,826	10,985
70	11,940	12,099	12,288	12,417	12,576
80	13,531	13,690	13,849	14,008	14,168
90	15,122	15,281	15,440	15,600	15,759
100	16,713	16,973	17,032	17,191	17,350
110	18,305	18,464	18,623	18,782	18,941
120	19,896	20,055	20,214	20,374	20,533
130	21,488	21,047	21,806	21,905	22,124
140	23,079	23,238	23,397	23,556	23,716
150	24,670	24,830	24,989	25,148	25,307
160	26,262	26,421	26,580	26,739	26,899
170	27,853	28,013	28,172	28,331	28,490
180	29,445	29,604	29,763	29,922	30,081
190	31,036	31,196	31,355	31,514	31,673
200	32,628	32,787	32,996	33,405	33,264
210	34,219	34,378	34,537	34,697	34,856
220	35,811	35,970	36,129	36,288	36,447
230	37,402	37,561	37,720	37,880	38,039
240	38,994	39,153	39,312	39,471	39,630
250	40,585	40,744	40,904	41,036	41,222
260	42,177	42,336	42,495	42,654	42,813
270	43,768	43,927	44,087	44,246	44,405
280	45,360	45,519	45,678	45,837	45,996
290	46,951	47,111	47,270	47,429	47,588

Die Kränze der Zahnräder macht man so breit als die Zähne dick, und so dick als diese lang sind. Den Armen gibt man eine Breite $l_1 = \frac{1}{5}$ der Dicke b_1, jedoch versieht man dieselben noch zu beiden Seiten mit zwei Nerven. Die Dicke b_1 aber ist nach der Formel:

$$b_1 = 10{,}4 \sqrt[3]{\frac{L}{n_1 u}} = \frac{1{,}7\, d}{\sqrt[3]{n_1}},$$

wo n_1 die Anzahl der Arme und d die Dicke der Welle bezeichnet, zu berechnen. Man gibt Rädern

von unter	4	Fuß	Höhe,	4	Arme,
»	4 bis 8	»	»	6	»
»	8 » 16	»	»	8	»
»	16 » 24	»	»	10	» ;

und hat für 4, 6, 10, 12 Arme:

$$\frac{b_1}{d} = 1{,}08,\ 0{,}94,\ 0{,}85,\ 0{,}79.$$

Bei hölzernen Armen, wie sie namentlich in Wasserrädern vorkommen, macht man $l_1 = \frac{5}{7}\, b_1$ und

$b_1 = 13{,}6 \sqrt[3]{\frac{L}{n_1 u}}$. Die Hülse, womit das Rad auf der Welle festsitzt, bekommt eine Länge $l_2 = l + 0{,}06\, r$, eine lichte Weite $d_1 = \frac{3}{4}\, d$ und eine Dicke $\delta = \frac{1}{8}\, d$.

Beispiel. Wenn eine Welle durch ein Wasserrad, das pr. Min. 5 Umdrehungen macht und ein Arbeitsvermögen von 20 Pferdekräften besitzt, und dessen Welle überall 6 Fuß von dieser Welle absteht, in 20 Umdrehungen pr. Min. versetzt werden soll, welche Anordnungen werden bei dem nöthigen Räderwerk zu machen sein? Es ist hier $\psi = \frac{20}{5} = 4$ und $e = 6$, daher sind die Theilungshalbmesser:

$$r_1 = \frac{4\ .\ 6}{1+4} = \frac{24}{5}\ \text{Fuß} = 57\tfrac{3}{5}\ \text{Zoll und}$$

$$r_2 = \frac{6}{1+6} = \frac{6}{5}\ \text{Fuß} = 14\tfrac{2}{5}\ \text{Zoll.}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit c folgt nun $= \frac{\pi \,.\, 24 \,.\, 5}{5 \,.\, 30}$ $= 2{,}513$ Fuß, daher nach Tabelle II. die Stärke der gußeisernen Zähne beider Räder $b = 1{,}9$ Zoll, und folglich die Theilung $s = 2{,}1 \,.\, 1{,}9 = 4$ Zoll. Dividirt man die Halbmesser r_1 und r_2 durch die Theilung, so erhält man die Werthe $\frac{57^3/_5}{4} = 14{,}4$ und $\frac{14^2/_5}{4} = 3{,}6$, und sucht man diese Zahlen in Tabelle III. auf, so findet man die entsprechenden Zähnezahlen nahe $n_1 = 92$ und $n_2 = 23$.

Die Zähne sind eigentlich nach der Epicycloide oder nach der Kreisevolvente zu formen, gewöhnlich ersetzt man aber diese krummen Linien durch Kreisbögen. Sehr einfach und praktisch vortheilhaft ist die Willis'sche Construction mittels zweier Kreisbögen, welche wesentlich auf folgende Weise zu Stande gebracht wird.

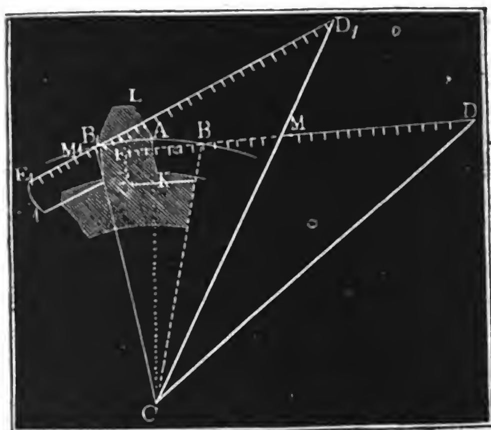
Es sei CA, Fig. 273, der Theilungshalbmesser r eines Rades, dessen Zahnform man eben finden will, und

Fig. 273.

$AB = AB_1$ die Hälfte der Theilung s. Man lege nun sowohl an CB als an CB_1 einen Winkel $CBE = CB_1E_1$

von 75 Graden, und trage von B aus rechts das Stück $BM = x = \frac{3,1056\,r}{n-12} = \frac{0,4943\,n\,s}{n-12}$, so wie von B_1 aus links das Stück $B_1M_1 = x_1 = \frac{3,1056\,r}{n+12} = \frac{0,4943\,ns}{n+12}$ auf. Aus den erhaltenen Endpunkten M und M_1 lassen sich nun

Fig. 274.



die eine vollständige Zahncurve LAK bildenden Kreisbögen KA und AL beschreiben.

Folgende Tabellen geben die gegebenen Theilungen und Zähnezahlen entsprechenden Werthe von x und x_1 verzwanzigfacht an, setzen aber, wie auch die letzten Formeln selbst, voraus, daß mit dem Rade kein Getriebe zum Eingriff komme, was unter 12 Zähne habe.

Tabelle IV.

Die Abscissen (x) der Mittelpunkte für die Abrundungen der Zähne innerhalb des Theilkreises.

Anzahl der Zähne.	Theilung in Zollen.							
	1	1¼	1½	1¾	2	2¼	2½	3
13	129	160	193	225	257	289	321	386
14	69	87	104	121	139	156	173	208
15	49	62	74	86	99	111	123	148
16	40	50	59	69	79	89	99	191
17	34	42	50	59	67	75	84	101
18	30	37	45	52	59	67	74	89
20	25	31	37	43	49	56	62	74
22	22	27	33	39	43	49	54	65
24	20	25	30	35	40	45	49	59
26	18	23	27	32	37	41	46	55
30	17	21	25	29	33	37	41	49
40	15	18	21	25	28	32	35	42
60	13	15	19	22	25	28	31	37
80	12	15	17	20	23	26	29	35
100	11	14	17	20	22	25	28	34
150	11	13	16	19	21	24	27	32
∞	10	12	15	17	20	22	25	30

Tabelle V.

Die Abscissen (x_1) der Mittelpunkte für die Abrundungen der Zähne außerhalb des Theilkreises.

Anzahl der Zähne.	Theilung in Zollen.							
	1	1¼	1½	1¾	2	2¼	2½	3
12	5	6	7	9	10	11	12	15
15	5	7	8	10	11	12	14	17
20	6	8	9	11	12	14	15	18
30	7	9	10	12	14	16	18	21
40	8	9	11	13	15	17	19	23
60	8	10	12	14	16	18	20	25
80	9	11	13	15	17	19	21	26
100	9	11	13	15	18	20	22	26
150	9	11	14	16	19	21	23	27
∞	10	12	15	17	20	22	25	30

Hiernach hat man z. B. für ein Rad von 40 Zähnen mit der Theilung $s = 2\frac{1}{2}$ Zoll die Abscissen $x = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$ Zoll und $x_1 = \frac{19}{20}$ Zoll, und wenn dieses Rad in ein Getriebe von 25 Zähnen eingreift, für dieses $x = \frac{55}{40}$ Zoll und $x_1 = \frac{53}{40}$ Zoll.

Zum Auftragen dieser Maaße bedient man sich eines in der Figur abgebildeten Instrumentes, welches ein Odontograph genannt wird.

Durch Anwendung von Räderwerken erwächst ein Arbeitsverlust, welcher in den Reibungen an den Axen und in der Reibung zwischen den Zähnen besteht. Die Axenreibungen lassen sich nach §. 14 berechnen, wenn man noch darauf Rücksicht nimmt, daß außer den Gewichten und den Kräften P oder Q auch die Riemenspannungen S_1 und S_2 oder die Drücke K und $-K$ zwischen den Zähnen auf die Zapfen der Räder wirken. Die Zahnreibung eines Stirnräderwerkes wird bestimmt durch die Formel $F = \varphi \pi \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}\right) K$, wenn φ den Reibungscoefficienten, n_1 und n_2 aber die Zähnezahlen ausdrücken. Hiernach ist die Kraft

$$P = \left[1 + \varphi \pi \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right] . \frac{n_1}{n_2} . \frac{b}{a} Q \text{ zu setzen.}$$

Greift ein Rad in eine gezahnte Stange, so hat man $n_2 = \infty$, folglich $P = \left(1 + \frac{\varphi \pi}{n_1}\right) . \frac{b}{a} Q$.

Für ein conisches Räderwerk, dessen Axen um den Winkel α von einander abweichen, ist

$$F = \varphi \pi \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_2}\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{n_2}\right) \cos. \alpha},$$

und folglich für ein Zahnräderwerk mit innerem Eingriffe, wo $\alpha = 180$ ist,

$$F = \varphi \pi \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) K;$$

und für ein conisches Räderwerk, dessen Axen rechtwinkelig auf einander stehen:

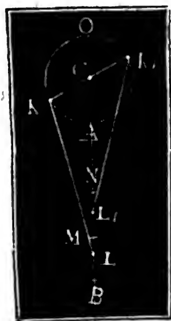
$$F = \varphi\pi \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_2}\right)^2}\, K.$$

Die Zahnreibung wird um so kleiner, je größer die Anzahl der Zähne ist. Der Reibungscoefficient φ ist im Mittel 0,11, daher $\varphi\pi = 0{,}345$ oder ⅛ zu setzen.

§. 64. Krummzapfen.

Dreht sich ein Krummzapfen, Fig. 275, von dem todten Punkte A aus um einen Winkel φ^0, so legt bei der Armlänge $CA = CO = CK = r$ die Warze desselben einen Weg $AK = r\varphi$ zurück, und es rückt das mittels einer Kurbelstange KL angeschlossene Gestänge um einen Weg $BL = s$ fort, der sich mittels der Länge l von KL durch folgende Formel genau genug bestimmen läßt:

Fig. 275.



$$s = r\,(1 - cos.\,\varphi) \pm \frac{r^2}{2l}\, sin.\,\varphi^2$$

$$= r(1 - cos.\,\varphi)\left[1 \pm \frac{r}{l}\left(cos.\,\frac{\varphi}{2}\right)^2\right].$$

Es gibt das obere Zeichen, wenn die Warze vom todten Punkte A ausgeht, das untere aber, wenn sie ihren Weg im todten Punkte O beginnt.

Ist v die Geschwindigkeit der Warze und w die der Stange, so hat man ferner:

$$\frac{w}{v} = \left(1 + \frac{r}{l}\, cos.\,\varphi\right) sin.\,\varphi.$$

Einer Gestänglast Q entspricht hiernach die veränderliche Kraft:

$$P = Q\, sin.\,\varphi\, \left(1 + \frac{r}{l}\, cos.\,\varphi\right),$$

deren mittlerer Werth für eine halbe Umdrehung:

$$P = \frac{2}{\pi}\, Q = 0{,}6366\, Q \text{ zu setzen ist.}$$

Umgekehrt entspricht einer Warzenlast P die Gestängkraft

$$Q = \frac{P}{sin.\,\varphi}\left(1 - \frac{r}{l}\,cos.\,\varphi\right),$$ deren Mittel

$$Q = \frac{\pi}{2}\,P = 1{,}5708\;P$$ ausfällt.

Dieses Kräfteverhältniß wird noch durch die Reibungen etwas abgeändert. Die Zapfenreibung ist wie bei einem Rade zu berechnen. Die Warzenreibung, auf den Warzenkreis reducirt, ist, wenn r_1 den Warzenhalbmesser bezeichnet:

$$F_1 = \frac{r_1}{r}\,\varphi\,Q.$$

Sie fällt beim Kreisexcentrik, wo $r_1 > r$ ist, besonders groß aus.

Die Reibung in der Führung, ebenfalls auf den Warzenkreis reducirt, ist:

$$F_2 = \frac{r}{2\,l}\,\varphi\,Q.$$

Ist der Stangenkopf mit Friktionsrädern ausgerüstet, so hat man diesen Werth noch durch das Verhältniß des Axenhalbmessers zum Radhalbmesser zu multipliciren.

Bezeichnet man die ganze rotirende Masse der Maschine, auf den Warzenkreis reducirt, durch M, und die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit der Warze mit c, so hat man bei einer sehr langen Kurbelstange für den einfachen doppeltwirkenden Krummzapfen die Maximalgeschwindigkeit der Warze:

$$v_1 = c\left(1 + \frac{0{,}2105\;Q\,r}{M\;c^2}\right),$$

und die Minimalgeschwindigkeit:

$$v_2 = c\left(1 - \frac{0{,}2105\;Q\,r}{M\;c^2}\right),$$

daher den Grad der Ungleichförmigkeit:

$$n = \frac{v_1 - v_2}{c} = \frac{0{,}421\;Q\,r}{M\,c^2}.$$

Für einen doppelten doppeltwirkenden Krummzapfen, wo

die Warzen in den Rechtwinkel gegen einander gestellt sind, ist:

$$n = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{0{,}0422\ .\ 2\ Q\ r}{M\ c^2}.$$

Wegen des Einflusses der endlichen Länge l der Kurbelstange sind die Werthe rechts noch durch $\left(1 + \frac{r}{l}\right)$ zu multipliciren. Bei Krummzapfen an Expansionsdampfmaschinen sind diese Werthe auch noch durch die von dem Expansionsverhältnisse ε abhängige Zahl:

$$0{,}77 + 0{,}23\ \varepsilon - 0{,}017\ \varepsilon^2,$$

z. B. bei einer dreifachen Expansion durch 1,31, zu multipliciren.

Die Zapfen- und Warzenstärken sind wie bei jeder Welle zu berechnen, und die Armstärken wie die der Radarme. Die Dicke der Hülse für die Warze und für den Zapfen macht man gleich dem Halbmesser der einen oder des anderen, die Länge aber doppelt so groß.

§. 65. Schwungräder.

Durch die Schwungräder soll die Ungleichförmigkeit einer Bewegung bis auf einen gewissen Grad n herabgezogen werden. Diese Ungleichförmigkeit hat ihren Grund in der veränderlichen oder absetzenden Wirkung der Kraft oder Last, oder in der Veränderlichkeit des Verhältnisses der gleichzeitigen Wege der Kraft und Last, wie z. B. beim Krummzapfen. Es ist eine praktische Regel, das Schwungrad demjenigen Theil der Maschine so nahe wie möglich zu bringen, von welchem die Ungleichförmigkeit ausgeht. Also z. B. bei einem Hammerwerke mit Vorgelege, dasselbe nicht auf die Wasserrad-, sondern auf die Daumenwelle zu setzen.

Der Grad der Ungleichförmigkeit ist:

n = $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ bei Maschinen, wie Pumpen, Mühlen u. s. w., welche keine große Gleichförmigkeit in der Bewegung erfordern;

$n = {}^1/_{30}$ bis ${}^1/_{40}$ bei Maschinen von ziemlich gleichförmigem Gange; und

$n = {}^1/_{40}$ bis ${}^1/_{60}$ bei Maschinen, wie z. B. Spinnereien, Maschinenwebereien, welche den möglichst gleichförmigen Gang beanspruchen.

Für Dampfmaschinen nimmt man sehr gewöhnlich $n = {}^1/_{32}$.

Ist nun G das Gewicht des Schwungringes und G_1 das seiner Arme, c aber die mittlere Umfangsgeschwindigkeit, u die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute und L die Leistung der Maschine in Pferdekräften, so hat man für Pumpen, Dampfmaschinen ohne Expansionen u. s. w. mit einfachen Krummzapfen:

$$(G + {}^1/_3\, G_1)\, c^2 = \frac{0{,}421\ .\ g\, Q\, r}{n} = 100000\, \frac{L}{n\, a},$$

oder, wenn man ${}^1/_3\, G_1$ vernachlässigt:

$$G = \frac{100000\ L}{n\, u\, c^2} \text{ Pfund;}$$

dagegen für Maschinen mit doppelten Krummzapfen im Rechtwinkel:

$$G = \frac{10000\ L}{n\, u\, c^2} \text{ Pfund.}$$

Bei Expansionsmaschinen, welche mit dem Expansionsverhältniß ε arbeiten, ist dieses Gewicht

$(0{,}77 + 0{,}23\, \varepsilon - 0{,}017\, \varepsilon^2)$ mal so groß zu nehmen.

Aus dem Gewichte G lassen sich nun auch die Dimensionen des Schwungrades berechnen.

Den mittleren Halbmesser desselben nimmt man $a = {}^3/_2\, s$ bis $2\, s$, wo s den Stangenschub bezeichnet.

Die Umfangsgeschwindigkeit c ist höchstens 100 Fuß zu nehmen; übrigens bestimmt sie sich aus der Formel:

$$c = \frac{n\, u\, a}{30} = 0{,}1047\ u\, a.$$

Die Breite des Schwungringes, radial gemessen, ist $d = 0{,}31 \sqrt{\frac{G}{a}}$ Zoll, und die Dicke desselben, in aronaler Richtung, $e = {}^1/_2\, d = 0{,}155 \sqrt{\frac{G}{a}}$ Zoll.

Die Anzahl der Radarme ist $= 3\left(1 + \frac{a}{b}\right)$, und der Querschnitt eines Armes reichlich ein Viertel von dem des Ringes zu nehmen.

Beispiel. Für eine 40pferdige Dampfmaschine, welche pr. Minute 26 Spiele macht und den Dampf um das Dreifache seines anfänglichen Volumens ausdehnen läßt, hat man die Umfangsgeschwindigkeit des 18 Fuß hohen Schwungrades:

$$c = 0{,}1047 \;.\; 26 \;.\; 9 = 24{,}5 \text{ Fuß},$$

daher das Gewicht des Schwungringes:

$$G = 1{,}31 \;.\; \frac{100000 \;.\; 40}{\frac{1}{32} \;.\; 26 \;.\; (24{,}5)^2} = 10700 \text{ Pfund},$$

und die entsprechenden Dimensionen des Querschnittes:

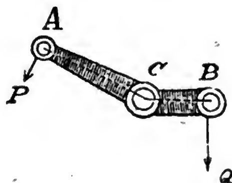
$$d = 0{,}31 \sqrt{\frac{10700}{9}} = 10{,}7 \text{ Zoll, und}$$

$$e = 5{,}35 \text{ Zoll.}$$

§. 66. Hebel und Balancier.

Ist die Kraft an einem Hebel ACB, Fig. 276, $= P$ und das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = \frac{a}{b} = n$, so hat man die Last $Q = nP$; ferner die Durchmesser der Bolzen A und B, wenn diese aus Schmiedeeisen bestehen:

Fig. 276.



$d_1 = 0{,}036 \sqrt{P}$ und

$d_2 = d_1 \sqrt{n}$, und die Stärke des Zapfens, wenn α den Winkel ACB zwischen den Hebelarmen bezeichnet:

$$d = d_1 \sqrt[4]{1 + n^2 - 2n \cos \alpha}.$$

Gehen die Bolzen und Zapfen durch den Hebel hindurch, wirken also die Kräfte an beiden Enden derselben,

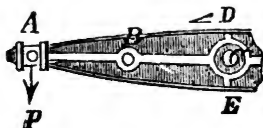
so hat man die Stärken d_1, d_2 und d, 0,7 mal so groß zu nehmen.

Für die Höhe h und Dicke e der Arme hat man, wenn m das Verhältniß $\frac{h}{e}$ (gewöhnlich 2 bis 4) derselben ist:

$$h = 0{,}9\ d_1 \sqrt[3]{m\frac{a}{d_1}} \text{ und } e = \frac{h}{m}.$$

Bei dem Balancier oder geradlinigen Hebel AC, Fig. 277, aus Gußeisen, wie er zumal bei Dampfmaschinen vorkommt, bringt man folgende Verhältnisse in Anwendung.

Fig. 277.



Die Stärke des Bolzens A ist $d_1 = 0{,}034\sqrt{P}$ Zoll $= 0{,}7$ von der der Kurbelwarze; die Stärke des Zapfens C aber $d = 0{,}07\sqrt{P}$. Ist s der Stangenhub, so hat man ferner die halbe Balancierlänge $AC = l = {}^3/_2\, s$; die Höhe DE des Balanciers in der Mitte: $h = {}^1/_2\, s$, und an dem Ende A: $h_1 = {}^1/_6\, s$; die Dicke $e = 9\, s \left(\frac{d_1}{s}\right)^2$. Der Quernerv AC erhält die Breite $b_1 = 2e$ und die Höhe oder Dicke $e_1 = e$. Die Hülsenlänge des Balanciers ist 0,3 s und die Arenlänge 0,7 s.

Die Stangen, welche mit den Hebeln und Kurbeln verbunden sind, erhalten, wenn sie nicht bloß durch Zug, sondern auch durch Schub wirken, in der Mitte ein Viertel mehr Querschnitt als an den Enden. Uebrigens wird das Mittelstück einer solchen Stange durch vier Rippen gebildet, deren Querschnitt an den Enden doppelt so groß ist als der Querschnitt des Bolzens, woran diese Stange hängt.

§. 67. Geradführung.

Für eine Geradführung durch Gegenlenker, wie Fig. 278, hat man Folgendes. Es ist gegeben:

Fig. 278.

die Balancierarmlänge
$CA = CE = l$,
der Hub
$AA_1 = BB_1 = DD_1 = s$,
die Länge
$AB = A_1B_1 = EH = a$
eines Hängeeisens, und das Verhältniß
$\frac{AB}{AD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} = n$,
welches den Aufhängepunkt D oder D_1 der Kolbenstange am Hängeeisen bestimmt. Hieraus berechnet sich die Bogenhöhe EF des Balanciers:

$$1)\quad h = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}},$$

die Länge $OB = OB_1 = OH = l_1$ des Gegenlenkers:

$$2)\quad l_1 = \frac{s^2 + 4(n-1)^2 h^2}{8(n-1)h} = \frac{l + n(\frac{1}{2}n - 1)h}{n-1};$$

ferner der Horizontalabstand CM der Drehaxen C und M:

$$3)\quad x = l + l_1 - \frac{nh}{2},$$

und der Vertikalabstand MO:

$$4)\quad y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{nh}{2}\right)^2}.$$

Gewöhnlich nimmt man $n = 2$, hängt also die Kolbenstange in der Mitte des Hängeeisens auf. Es ist dann $l_1 = l$ und die größte Seitenabweichung:

$$\delta = \pm\, 0{,}00138\, \frac{s^5}{a\, l^3}.$$

Folgende Verhältnisse gelten für die Geradführung durch ein Parallelogramm in Fig. 279. Es sei gegeben: Die Balancierarmlänge $CA = CA_1 = CE = l$, die Balancierarmlänge $CK = CK_1 = {}^1\!/\!_n\, l$, also die Länge des Parallelogrammes $AK = BD = (1 - {}^1\!/\!_n)\, l$; ferner der Stangenhub $AA_1 = DD_1 = s$ und die Länge eines Hängeeisens $AD = KB = a$.

Fig. 279.

Hieraus berechnet sich die Bogenhöhe EF des Balanciers:

$$1)\quad h = l + \sqrt{l^2 - \frac{s^2}{4}},$$

die Länge $OB = OB_1 = OH$ des Lenkers:

$$2)\quad l_1 = \frac{s^2 + 4(n-1)^2 h^2}{8n(n-1)h} = \frac{l + n(\frac{1}{2}n - 1)h}{n(n-1)}.$$

Ferner der Horizontalabstand CM der Drehaxen ist:

$$3)\quad x = \frac{l}{n} + l_1 - \frac{h}{2},$$ und der Vertikalabstand MO:

$$4)\quad y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Gewöhnlich nimmt man $n = 2$, gibt also dem Parallelogramme halb so viel Länge als dem Balancierarm, weshalb dann $l_1 = {}^1\!/\!_2\, l$ sich herausstellt. Die größte Seitenabweichung, welche hierbei eintritt, ist:

$$\delta = \pm\, 0{,}00138\, \frac{s^5}{a\, l^3}.$$

Punkte, wie L und L_1, in welchen eine Gerade CD die Hängeeisen BK und B_1K_1 schneidet, bewegen sich parallel mit D, können daher ebenfalls als Aufhängepunkte für Kolbenstangen dienen.

Für die Geradführung mit Lenker und Träger, wie Fig. 280, gilt Folgendes:

Fig. 280.

Die Hublinie DD_1 halbirt, wie oben, die Bogenhöhe EF. Die Länge $OB = OB_1 = l_1$ des Lenkers ist willkürlich, die Länge des Gelenkes $DK = 2DB$ ist $= 2OB = 2l_1$.

Die Sehne KK_1 des vom Träger MK beschriebenen Bogens ist $s_1 = 2l_1 - \sqrt{4l_1^2 - \frac{1}{4}s^2}$, wenn s, wie oben, den Kolbenhub bezeichnet. Setzt man ferner die Trägerlänge $MK = MK_1 = r$, so hat man die Höhe des Bogens KK_1:

$h_1 = r - \sqrt{r^2 - \frac{s_1^2}{4}}$, und die entsprechende größte Seitenabweichung:

$$\delta = h_1 \sqrt{\frac{s_1}{2l_1}} = 0{,}0000863\, \frac{s^5}{rl_1^3}.$$

Bei einem unendlich langen Träger ist $r = \infty$ und daher $\delta =$ Null.

§. 68. Die Schraube.

Ist P die Umdrehungskraft einer Schraube, Q die in der Axenrichtung ziehende Last, ist ferner a der Hebelarm, woran die Kraft wirkt, r der mittlere Schraubenhalbmesser, α der Steigwinkel der Schraube und h die Schraubenganghöhe, so hat man:

$tang.\,\alpha = \frac{h}{2\pi r}$ und ohne Rücksicht auf Reibung,

$$P = Q\,\frac{r}{a}\; tang.\,\alpha = \frac{Qh}{2\pi a}.$$

Mit Rücksicht der Reibung in den Schraubengängen

hat man, wenn φ den Reibungscoefficienten und ϱ den Reibungswinkel bezeichnet, für eine flachgängige oder Metallschraube:

$$P = Q\,\frac{r}{a}\,tang.\,(\alpha \pm \varrho) = Q\,\frac{r}{a}\,.\,\frac{h \pm 2\,\varphi\,\pi\,r}{2\,\pi\,r \mp \varphi\,h},$$

und es sind die obern Zeichen zu nehmen, wenn es darauf ankommt, die Kraft zu bestimmen, wodurch Bewegung erzeugt wird, und die untern, wenn die Kraft ermittelt werden soll, wodurch Bewegung verhindert wird.

Für eine scharfgängige oder Holzschraube ist annähernd, wenn β den Winkel bezeichnet, unter dem die Erzeugungslinie der Schraubenfläche die Axe der Schraube schneidet:

$$P = Q\,\frac{r}{a}\,.\,\frac{h\,sin.\beta \pm 2\,\varphi\,\pi\,r}{2\,\pi\,r\,cos.\beta \mp \varphi\,h}.$$

Damit ein Zurückgehen der Schraube nicht eintrete, also ein Umdrehen derselben in Folge der Axenkraft durch die Reibung allein verhindert werde, muß

$$\frac{h}{2\,\pi\,r} < \frac{\varphi}{sin.\beta},\ \text{d. i.}\ tang.\alpha < \frac{tang.\varrho}{sin.\beta},$$

also für eine flachgängige Schraube $\alpha < \varrho$ sein.

Bei Schrauben, welche zur Befestigung dienen, bestimmt man die Stärke d der Spindel aus der Axenkraft Q Pfund mittels der Formel:

$$d = 0{,}25\,\sqrt{Q}\ \text{Linien}.$$

Die Breite des Schraubenganges ist $= 0{,}1\,d$, folglich der äußere Durchmesser der Schraube $^6/_5\,d$. Die Stärke des Schraubenkopfes und der Schraubenmutter ist $^8/_5\,d$ zu machen; die Höhe des Schraubenkopfes aber $^3/_5\,d$ und die der Mutter $= {}^6/_5\,d$.

Um durch Umdrehung der Schraube eine sanfte Axenbewegung hervorzubringen, ist ein kleines Aufsteigen α nöthig, denn es ist der Axenweg bei einer Umdrehung $s = h = 2\,\pi\,r\,tang.\,\alpha$. Die Stärke des Schraubenganges ist höchstens $= \frac{h}{2}$; es nimmt daher die Haltbarkeit der

Schraube mit dem Ansteigen ihrer Gänge zugleich ab, und es hat deshalb die Verminderung des Steigwinkels α ihre Grenze.

Durch Anwendung einer Differenzialschraube hingegen läßt sich der Axenweg

$$s = h - h_1 = 2\pi\,(r\,tang.\,\alpha - r_1\ tang.\,\alpha_1)$$

bis auf jede beliebige Kleinheit herabziehen, ohne die Haltbarkeit der Schraubengänge zu beeinträchtigen.

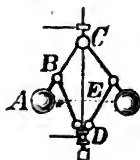
Für die Schraube ohne Ende ist, wenn die Kraft P am Hebelarme a und die Last Q am Hebelarme b wirkt, und wenn das Rad, in welches die Schraube eingreift, n Zähne hat:

$$P = \frac{1 + n\varphi}{n + \varphi} \cdot \frac{b}{a}\,Q.$$

§. 69. Schwungkugelregulator.

Aus der Höhe $CE = h$ eines conischen Pendels, Fig. 281, ergibt sich die Schwingungs- oder Rotationszeit desselben, $t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, und umgekehrt aus t die Höhe $h = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 g$, oder, wenn α den Winkel ACE bezeichnet, welchen die Kugelstiele mit der Axe des Pendels einschließen, die Länge eines Stieles:

Fig. 281.



$$l = \frac{h}{cos.\,\alpha} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 \frac{g}{cos.\,\alpha} = 0{,}7916\ \frac{t^2}{cos.\,\alpha}.$$

Ist u der Grad der Ungleichförmigkeit der Maschine, welche durch diesen Apparat regulirt werden soll, β der Winkel BDC, welchen die Hängestäbe mit der Drehungsaxe einschließen, und P die Kraft, welche nöthig ist, um die Hülse auf- oder niederzuziehen, so hat man bei dem Abstande $CD = a$ der Hülse D von der Aufhängeaxe C

das entsprechende Gewicht von jeder der beiden Schwungkugeln:

$$K = \frac{P a \, tang. \beta}{2 n l \, sin. \alpha} = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^2 . \frac{a}{g} . \frac{P \, tang. \beta}{2 n \, tang. \alpha}$$

$$= \frac{0{,}631 \, P a \, tang. \beta}{n \, t^2 \, tang. \alpha}.$$

Für $\alpha = \beta$ ist einfach:

$$K = 0{,}631 \, . \, \frac{P a}{n \, t^2}.$$

Gewöhnlich ist $K = 20$ bis 30 Pfund.

Bei den Regulatoren, welche zur Stellung der Dampfklappen dienen, nimmt man gewöhnlich l gleich dem Durchmesser d des Dampfcylinders, und den Durchmesser einer Schwungkugel $= 0{,}3\,d$.

Fünftes Kapitel.

Von den Arbeitsmaschinen.

---

§. 70. Flaschenzüge.

Ist bei einem Kloben- oder Flaschenzug, Fig. 282 auf folg. Seite, Q die Last, P die Kraft und n die Anzahl der gespannten Seile zwischen beiden Flaschen oder Kloben, so hat man ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse:

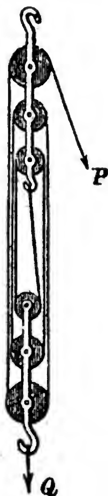
$$P = \frac{Q}{n},$$

mit Hinsicht auf dieselben aber:

$$P = \frac{Q}{n} \pm \frac{n+1}{2} \text{ mal Nebenhindernisse von } \frac{Q}{n},$$

und es gilt das obere Zeichen, wenn es darauf ankommt, Q zu heben, und das untere, wenn Q niedergelassen werden soll.

Fig. 282.



Die Nebenhindernisse von $\frac{Q}{n}$ bestehen in der Axenreibung und der Kraft zum Umbiegen des Seiles. Ist φ der Reibungscoefficient und $\frac{r}{a}$ das Verhältniß des Bolzenhalbmessers r zum Rollenhalbmesser a, so hat man die Zapfen- oder Bolzenreibung

$$= 2\varphi \frac{r}{a}\frac{Q}{n} = 2 \,.\, 0{,}15 \frac{r}{a}\frac{Q}{n}$$

$$= 0{,}3 \;\frac{r}{a}\;\frac{Q}{n},$$

und ist d die Seilstärke, so hat man den Steifigkeitswiderstand

$$= \frac{d^{1,4}}{a}\left(6{,}83 + 0{,}141 \frac{Q}{n}\right) \text{ Pfund},$$

wobei am besten von einer der Tafeln S. 312 Gebrauch zu machen ist.

Beispiel. Um eine Last von 2400 Pfund mittels eines Klobenzuges mit 6 gespannten Seilen zu heben, hat man bei der Seilstärke $d = \frac{1}{2}$ Zoll, dem Zapfenhalbmesser $r = \frac{3}{8}$ Zoll und den mittleren Rollenhalbmesser $a = 4$ Zoll, $\frac{Q}{n} = \frac{2400}{6} = 400$, die entsprechende Reibung $= 0{,}3 \,.\, \frac{3}{32} \,.\, 400 = 11{,}25$ Pfund, und den Steifigkeitswiderstand $= \frac{63}{4} = 15{,}75$ Pfund, daher die nöthige Kraft

$$P = 400 + \frac{6+1}{2} \,.\, 27 = 494{,}5 \text{ Pfund}.$$

Ist v die Geschwindigkeit von P und w die von Q, so hat man:

$$\frac{w}{v} = \frac{P}{Q} = \frac{1}{n}, \text{ im obigen Beispiele also } = \frac{1}{6}.$$

§. 71. Haspel- und Göpelförderung.

Der gewöhnliche zweimännische Haspel hat einen Rundbaum von 8 Zoll Stärke, eine Kurbelhöhe von 16 Zoll, und eine mittlere reine Last von 130 Pfund, und es leistet dabei der Mensch täglich 1'175000 Fußpfund Arbeit. Hiervon gehen am Haspel selbst ungefähr 5 Procent verloren, daher ist die Nutzleistung des Haspels

$= 2 \,.\, 0{,}95 \,.\, 1'175000 = 2{,}232500$ Fußpfund,

und der tägliche Förderungsweg $= 17173$ Fuß, z. B. bei der einfachen Weglänge von 130 Fuß, die Anzahl der zu hebenden Lasten zu je 130 Pfund:

$$n = \frac{17173}{130} = 132.$$

Beim Ziehen aus einem flachen Schachte mit dem Fallwinkel α ist die Leistung nur $\left(\frac{1}{1 + 0{,}5\, colg.\, \alpha}\right)$ mal so groß, z. B. für $\alpha = 45^{0}$, n nur $= \frac{132}{1{,}5} = 88$.

Der gewöhnliche zweipferdige Göpel hat einen Korbhalbmesser von 6 bis 7 Fuß, eine Schwengellänge von 24 bis 28 Fuß; es ist die mittlere reine Last desselben 900 Pfund, und es leistet dabei ein Pferd täglich 7'934000 Fußpfund. Hiervon gehen bei Anwendung eines Drahtseiles durch die Reibung an den Zapfen der Göpelwelle und der Seilscheiben und durch die Steifigkeit der Seile nur 5 Procent verloren, weshalb die Nutzleistung der beiden Pferde am Göpel $= 2 \,.\, 0{,}95 \,.\, 7'{,}934000 = 15{,}075000$ Fußpfund, und der tägliche Förderungsweg $= 16750$ Fuß sich ergibt. Ist die einfache Förderteufe $= 800$ Fuß, so hat man die Anzahl der täglich auszutreibenden Tonnen:

$$n = \frac{16750}{800} = 20.$$

Beim Treiben aus einem flachen Schachte ist diese Lei-

stung $\left(\frac{1}{1+0{,}25\frac{r}{a}\ cotg.\alpha}\right)$ mal so groß, wenn $\frac{r}{a}$ das Verhältniß der Halbmesser vom Zapfen und Rade einer Tonne bezeichnet.

Ein gewöhnlicher Wassergöpel mit vertikalem Wasserrade von 30 bis 40 Fuß Höhe erhält einen Korbhalbmesser von 4 bis 4½ Fuß; es hat daher bei 5 Radumdrehungen pr. Minute die Tonne im Mittel 2 bis 2½ Fuß Geschwindigkeit, und es ist die Nutzleistung bei einer Fördermasse von 1800 Pfund 3600 bis 4500 Fußpfund, oder 7 bis 9 Pferdekräfte. Nun kommen aber folgende Verluste vor:

10 Procent durch die unvollkommene Wirkung des Wassers herbeigeführt,
12 » durch die Zapfenreibung des Rades,
2 » » » » der Seilscheiben,
1 » » » Steifigkeit der Drahtseile;

und wenn die Kraft des Rades durch ein Stangenvorgelege auf die Korbwelle übergetragen wird, der Reibungsverlust an diesem:

5 bis 10 Procent.

Es ist also für einen Göpel ohne Vorgelege der Wirkungsgrad $= 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ und für einen Göpel mit Vorgelege im Mittel 0,68, und wenn der Schacht ein Fallen α^0 hat, derselbe gar nur $\frac{0{,}68}{1+0{,}25\frac{r}{a}\ cotg\ \alpha}$. Hiernach ist das aufzuwendende Arbeitsquantum $^4/_3$ bis $^3/_2$ mal so groß als die Nutzleistung. Nimmt man diese zu 8 Pferdekräften an, so hat man jenes 12 Pferdekräfte, und daher das Aufschlagquantum pr. Secunde bei 35 Fuß Gefälle:

$$Q = \frac{510.12}{35.66} = 2^5/_8 \text{ Cub-Fuß}.$$

Wenn man das Wasser während der Stillstandszeit ansammeln läßt, so fällt im Durchschnitt das Aufschlag-

quantum um das Verhältniß der Stillstandszeit zur ganzen Treibezeit kleiner aus.

Bei den Dampfgöpeln hat die Tonne 3 bis 4 Fuß Geschwindigkeit; da nun aber die Dampfmaschine mindestens 30 Spiele pr. Minute macht, so ist bei einem Korbdurchmesser von 8 Fuß, ein Zahnradvorgelege mit dem Umsetzungsverhältnisse $\frac{3}{1}$ nöthig. Bei $3\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit der Tonne und 2000 Pfund Fördermasse die Nutzleistung = 7000 Fußpfund = 14 Pferdekräfte, und rechnet man 8 Procent auf die Reibungs- und Steifigkeitsverluste, so erhält man die effective Leistung der nöthigen Dampfmaschine $= \frac{7000}{0{,}92} = 7600$ Fußpfund = 15 Pferdekräfte.

§. 72. Straßenförderung.

Der Widerstand, welchen ein gutes Steinpflaster oder eine festgefahrene Schotterstraße der Bewegung von Wagen entgegensetzt, ist proportional der Last, umgekehrt proportional der Höhe der Räder, und beinahe unabhängig von der Reifenbreite der Räder. Auf weichem oder zusammendrückbarem Boden nimmt dagegen dieser Widerstand ab, wenn die Reifenbreite eine größere wird. Bis zu einer mäßigen Geschwindigkeit von 3 Fuß ist dieser Widerstand ziemlich unabhängig von der Geschwindigkeit und bei Wagen mit Federn eben so groß als bei Wagen ohne Federn. Bei größerer Geschwindigkeit nimmt aber dieser Widerstand mit der Geschwindigkeit bemerkbar zu.

Die Reifenbreite von $4\frac{1}{2}$ Zoll ist die angemessenste, schmälere Räder greifen die Straßen an, und breitere Räder geben keinen bemerkbaren Vortheil. Bei großen Geschwindigkeiten von 10 Fuß werden die Straßen durch Wagen mit Federn weniger angegriffen als durch Wagen ohne Federn.

In folgender Tabelle sind die Widerstandscoefficienten verschiedener Wagen auf verschiedenen Straßen angegeben. Um die Kraft zum Fortziehen einer gegebenen Last zu finden, soll man die letztere mit dem entsprechenden Coefficienten aus der Tabelle multipliciren. Z. B. um eine Last

von 8000 Pfund durch einen Frachtwagen auf einer horizontalen Schotterstraße fortzuschaffen, ist bei gutem und trockenem Zustande der letzteren und bei 53½ Zoll mittlerer Radhöhe die nöthige Zugkraft $P = \frac{1}{50} . 8000 = 160$ Pfd.; steigt aber die Straße $\frac{1}{40}$ an, so ist die Kraft noch um $\frac{1}{40} . 8000 = 200$ größer, also im Ganzen 360 Pfund; fährt dagegen der Wagen mit $\frac{1}{40}$ Fallen, so ist eine überflüssige Kraft $200 - 160 = 40$ Pfund vorhanden. Beim Transportiren durch Schlitten auf einer guten Schneebahn ist der Reibungscoefficient $\frac{1}{30}$.

Tabelle
der Widerstandscoefficienten für Fuhrwerke.

Die Reifenbreite ist 4 bis 4½ Zoll, die Axenstärke 2½ Zoll, der Coefficient der Axenreibung $\varphi = 0{,}065$.

Bezeichnung der Straße.	Frachtwagen. Mittlere Radhöhe in Fußen.		Karren. Radhöhe in Fußen.		Eilwagen. Radhöhe in Fußen.
	4	4½	5	6⅖	3⅔
I. Schotterstraße:					
1) in sehr gutem Zustande, trocken und eben.	$^1/_{50}$	$^1/_{58}$	$^1/_{66}$	$^1/_{83}$	Schritt $^1/_{48}$ Trab $^1/_{41}$ scharf. Tr. $^1/_{40}$
2) wenig feucht, mit Staub u. einigen freiliegenden Schotterstücken.	$^1/_{35}$	$^1/_{41}$	$^1/_{47}$	$^1/_{59}$	Schritt $^1/_{34}$ Trab $^1/_{27}$ sch. Trab $^1/_{24}$
3) sehr hart, grober Schotter, naß.	$^1/_{43}$	$^1/_{50}$	$^1/_{57}$	$^1/_{71}$	Schritt $^1/_{41}$ Trab $^1/_{27}$ sch. Trab $^1/_{23}$
4) hart, mit leichten Geleisen und weichem Koth.	$^1/_{27}$	$^1/_{32}$	$^1/_{36}$	$^1/_{45}$	Schritt $^1/_{26}$ Trab $^1/_{22}$ sch. Trab $^1/_{20}$
5) hart mit Geleisen und Koth.	$^1/_{22}$	$^1/_{26}$	$^1/_{30}$	$^1/_{37}$	Schritt $^1/_{21}$ Trab $^1/_{18}$ sch. Trab $^1/_{17}$

Bezeichnung der Straße.	Frachtwagen. Mittlere Radhöhe in Fußen.		Karren. Radhöhe in Fußen.		Eilwagen. Radhöhe in Fußen.
	4	4½	5	6⅖	3⅔
6) sehr verfahren und mit dickem Kothe.	1/19	1/22	1/25	1/31	Schritt 1/18 Trab 1/16 sch. Trab 1/15
7) sehr aufgerissen, mit Koth und 2 bis 3 Zoll tiefen Geleisen.	1/14	1/17	1/19	1/21	Schritt 1/14 Trab 1/12 sch. Trab 1/12
8) sehr schlecht, dicker Koth, harter u. rauher Grund, 3 bis 4 Zoll tiefe Geleise.	1/13	1/15	1/17	1/21	Schritt 1/12 Trab 1/10,5
II. Sandsteinpflaster: 1) sehr gutes.	1/65	1/75	1/86	1/108	Schritt 1/61 Trab 1/42 sch. Trab 1/36
2) gewöhnliches, trocken.	1/60	1/70	1/80	1/100	Schritt 1/57 Trab 1/41 sch. Trab 1/36
3) gewöhnliches, naß u. mit Koth	1/46	1/54	1/61	1/76	Schritt 1/44 Trab 1/33 sch. Trab 1/29
III. Brückenbahn von Holz.	1/43	1/50	1/69	1/71	Schr. u. Tr. 1/42
IV. Erddamm: 1) sehr gut u trocken.	1/27	1/32	1/38	1/45	» » » 1/26
2 mit einer 1 bis 1⅔ hohen Kiesdecke.	1/10,5	1/12	1/14	1/17	» » » 1/10
3) mit einer 2 bis 3½ Zoll hohen Kiesdecke.	1/9	1/10	1/12	1/15	» » » 1/8,6
4) mit einer 4 b. 5½ Z. hoh. Kiesschicht	1/8	1/10	1/11	1/14	» » » 1/6
V. Straße mit ungebahntem Schnee.	1/14	1/17	1/19	1/24	» » » 1/14

§. 73. Eisenbahnförderung.

Die gewöhnliche Spurweite von Eisenbahnen ist 55 bis 55½ Zoll. Die gewalzten Eisenbahnschienen haben im Querschnitt die Tform, sind 4½ Zoll hoch und oben 2¼ Zoll breit; jeder Fuß Länge wiegt circa 18 Pfund. Sie ruhen in Entfernungen von 3 zu 3 Fuß auf Stühlen. Die Krümmungshalbmesser sollen nicht unter 2000 Fuß betragen, wenigstens sind kleinere Krümmungshalbmesser nur an Stationen, wo angehalten wird, anzuwenden.

Der vorzüglichste Widerstand, welchen die Wagen bei ihrer Fortbewegung auf der Eisenbahn zu überwinden haben, besteht in der Axenreibung:

$$F = \varphi \frac{r}{a} (G + M),$$

und es ist φ der Reibungscoefficient 0,05, $\frac{r}{a}$ das Verhältniß ($\frac{1}{13}$ bis $\frac{1}{20}$) zwischen den Axen- und den Radhalbmessern, G das Gewicht des Wagens mit Ausschluß der Räder, und M die Belastung, daher im Mittel:

$$F = \frac{1}{330} (G + M).$$

Nächstdem ist noch die rollende Reibung an dem Umfange der Räder:

$$F_1 = \varphi_1 (G + G_1 + M),$$

wobei φ_1 den entsprechenden Reibungscoefficienten $\frac{1}{800}$ und G_1 das Gewicht der Räder bezeichnet, zu überwinden.

Hierzu kommt noch der Widerstand der Luft, welcher mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst.

Der Sicherheit wegen kann man im Ganzen für eine mittlere Geschwindigkeit von 30 bis 40 Fuß die ganze Zugkraft für einen belasteten Wagen setzen:

$$P = 0{,}005 (G + G_1 + M),$$

dagegen für eine Locomotive, mit Einschluß der Reibung der Maschinentheile: $P = 0{,}010\, G_2$, wenn G_2 das Gewicht des Dampfwagens bezeichnet.

Durch den Widerstand in Krümmungen, durch Wind, und zumal durch das Ansteigen der Bahn wird die Kraft noch vergrößert. Ist α das Ansteigen, so hat man die ganze Zugkraft bei geradem Wege und ruhiger Luft:

$$P = 0{,}005\ (G+G_1+M) + 0{,}01\, G_2 + \alpha(G+G_1+G_2+M).$$

Ein leerer Wagen wiegt 3 bis 4 Tonnen, jede Tonne zu 1000 Kilogramm = 2138 Pfund gerechnet, und faßt 30 bis 40 Menschen von 4500 bis 6000 Pfund Gewicht; ein Dampfwagen wiegt 12 bis 20 Tonnen und ein Tender 4 Tonnen und führt 5 Tonnen Wasser und 1½ Tonne Koks mit sich.

Für einen Zug mit 10 besetzten Wagen, jeder von 3⅓ Tonnen Gewicht, geführt von einem Dampfwagen von 15 Tonnen Gewicht mit einem Tender von 10½ Tonnen Gewicht, hat man hiernach die nöthige Kraft bei $1/_{200}$ Ansteigen:

$$P = 0{,}005\ .\ (10\ .\ 13500 + 23500) + 0{,}01\ .\ 32000$$
$$+ 0{,}005\ (10\ .\ 13500 + 23500 + 32000)$$
$$= 792 + 320 + 953 = 2065 \text{ Pfund.}$$

Bei einer Geschwindigkeit von 35 Fußen ist demnach der nöthige Arbeitsaufwand:

$$L = \frac{2065\ .\ 35}{510} = 142 \text{ Pferdekräfte.}$$

Was den Dampfwagen anlangt, so arbeitet dieser mit Dampf von 4½ bis 5½ Atmosphären Spannung, während der Gegendruck 1¼ Atmosphäre beträgt.

Der Durchmesser von jedem der beiden Dampfkolben ist 11 bis 15 Zoll, der Hub 18 bis 22 Zoll, und der Durchmesser der Triebräder 4½ bis 6 Fuß.

Ist v die mittlere Kolben- und c die mittlere Wagengeschwindigkeit, s der Kolbenweg und a der Halbmesser der Triebräder, so hat man $\frac{c}{v} = \frac{\pi a}{s}$, und die Umdrehungszahl der Räder pr. Minute:

$$u = \frac{30v}{s} = \frac{30c}{\pi a}.$$

Die mittlere Kolbengeschwindigkeit zu 5 Fuß und das

Verhältniß $\frac{s}{a} = \frac{1}{2}$ angenommen, erhält man z. B. die entsprechende Wagengeschwindigkeit:

$$c = 3{,}14 \;.\; 2 \;.\; 5 = 31{,}4 \text{ Fuß},$$

und die Umdrehungszahl pr. Minute $n = \frac{30 \cdot 5}{1{,}5} = 100$, wenn der Kolbenhub s nur $1\frac{1}{2}$ Fuß beträgt.

Der Wirkungsgrad η einer Locomotive ist 0,82, daher die effective Leistung derselben:

$$L = \eta \;.\; 144 \;.\; Q p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)$$

$$= 118\; Q p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right),$$

wo Q, p_0, q_0 und ε die schon §. 60 angezeigten Bedeutungen haben.

Setzen wir $p_0 = 5 . 15{,}05 = 75{,}25$ Pfd., $q_0 = 1{,}25 . 15{,}05 = 18{,}81$, $\varepsilon = \frac{2}{1}$ und die Leistung $L = 142$ Pferdekräfte $= 142 \;.\; 510$ Fußpfund, so erhalten wir das nöthige Dampfquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{142 \;.\; 510}{118 . 75{,}25 (1{,}693 - 0{,}5)} = \frac{7242}{914 . 1{,}193} = 6\tfrac{2}{3} \text{ Cb.-Fuß},$$

also stündlich $= \frac{6\frac{2}{3} \;.\; 3600 \;.\; 66}{388} = 4083$ Pfund, und rechnet man auf 1 Pfund Koks $5\frac{3}{4}$ Pfund Dampf (außer dem mechanisch mit fortgerissenen Wasser), so erhält man den stündlichen Koksaufwand $= \frac{4083}{5{,}75} = 710$ Pfund.

Die Rostfläche ist 8 bis 10 Quadratfuß, die directe Heizfläche 40 bis 60, die indirecte aber 400 bis 600 Quadratfuß; die Röhrenzahl 100 bis 150, ihre Länge 9 bis 10 Fuß und ihre Weite 2 Zoll.

Damit die Locomotive eine fortschreitende Bewegung annehme, ist nöthig, daß die gleitende Reibung zwischen den Rädern derselben und der Schienenbahn die Zugkraft P übertreffe. Ist R der Druck der Triebräder gegen die Bahn und φ der Reibungscoefficient, so muß hiernach $\varphi R > P$ sein.

Für trockene und staubige Schienen ist $\varphi = \frac{1}{5}$, für feuchte aber $\frac{1}{10}$ und für nasse oder beschneite gar nur $\frac{1}{15}$ zu nehmen. In dem obigen Beispiele ist $P = 2065$ und daher, wenn $\varphi = \frac{1}{10}$ gesetzt wird, $R = 20650$ Pfund; es muß also von dem Gewichte $15 . 2138 = 32070$ Pfund der ganzen Locomotive $\frac{2}{3}$ auf den Treib- und den mit diesen gekuppelten Rädern ruhen.

§. 74. Förderung zu Wasser.

Ist v die Geschwindigkeit eines Schiffes auf stillstehendem Wasser, F der größte Querschnitt des eingetauchten Schiffkörpers, und ζ eine Erfahrungszahl, der sogenannte **Widerstandscoefficient**, so läßt sich die Kraft zur Fortbewegung des Schiffes

$$P = \zeta \cdot \frac{Fv^2}{2g} \cdot \gamma \text{ setzen.}$$

Der Coefficient ζ ist aber nicht constant, sondern nimmt ab, wenn F und v größer werden, und läßt sich am besten aus folgender Tabelle entnehmen.

Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten eines Schiffes.

Querschnittsfläche F in Quadrat-Fußen.	Geschwindigkeiten v in Fußen.				
	9	12	15	18	21
30	0,092	0,088	0,084	0,080	0.076
60	0,087	0,083	0,079	0.075	0.071
100	0,084	0,080	0,076	0,072	0,068
200	0,078	0,074	0,070	0,066	0,062
300	0 074	0,070	0.066	0,062	0,058
400	0,070	0,066	0,062	0,058	0,054

Hiernach ist z. B. für ein Schiff mit dem größten Querschnitte F von 100 Quadratfuß bei 12 Fuß Geschwindigkeit die Kraft zum Fortziehen:

$P = 0{,}08 \,.\, 100 \,.\, 0{,}016 \,.\, 144 \,.\, 66 = 1216{,}6$ Pfund,

und die nöthige Arbeit:

$L = Pv = 1216{,}6 \,.\, 12 = 14599$ Fußpf. $= 28{,}6$ Pferdekräfte.

Die Kraft, mit welcher das Schiff durch ein Ruder- oder Schraubenrad fortgetrieben wird, ist durch den Ausdruck $P_1 = \zeta_1 \, F_1 \, \frac{(v_1 - v)^2}{2g} \gamma$ bestimmt, in welchem ζ_1 ein Erfahrungscoefficient, v_1 die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades und F_1 der Inhalt des eingetauchten Theiles von der Oberfläche der Schaufeln bedeutet. Da $P_1 = P$ zu setzen ist, so hat man:

$$\frac{v_1}{v} = 1 + \sqrt{\frac{\zeta \, F}{\zeta_1 \, F_1}}.$$

Im Mittel ist $\frac{\zeta}{\zeta_1} = 0{,}027$ und $\frac{F}{F_1} = 6$, daher $\frac{v_1}{v} = 1{,}4$ und die der Schiffsgeschwindigkeit v entsprechende Leistung der Umtriebsmaschine:

$$L = \zeta \,.\, \frac{v^2}{2g} F v_1 \gamma = \zeta \left(1 + \sqrt{\frac{\zeta \, F}{\zeta_1 \, F_1}}\right) \frac{v^2}{2g} F v \gamma$$

$$= 1{,}4 \, \zeta \,.\, \frac{v^2}{2g} F v \gamma = 1{,}478 \, \zeta \, F v^3 \text{ Fußpfund.}$$

Geht ein Schiff in einem Flusse stromauf- oder abwärts, so hat man bei der Geschwindigkeit c des letzteren, statt v, $v \pm c$ einzusetzen. Uebrigens kommen bei den Dampfschiffen noch folgende Verhältnisse vor.

Es sei l die Länge des Schiffes (150 bis 1000 Fuß), b die größte Breite, h die größte Höhe und h_1 die Tiefe der Eintauchung derselben.

Dann hat man:

$\frac{l}{b} = 9$ bis 6, $\frac{h}{b} = 0{,}50$ bis 0,65 und $\frac{h_1}{h} = 0{,}35$ bis 0,60,

und es gelten die ersteren Werthe für Fluß-, die letzteren für Meerschiffe, Mittelwerthe aber für Landseeschiffe.

Ferner ist für den größten Querschnitt F des eingetauchten Schifftheiles $\frac{F}{b h_1} = 0{,}88$ bis $0{,}78$, und für das Volumen V des verdrängten Wassers: $\frac{V}{l b h_1} = 0{,}45$ bis $0{,}55$; für den Inhalt von je zwei Schaufelflächen oder für den Querschnitt F_1 der Schraubenfläche: $\frac{F_1}{F} = 0{,}36$ bis $0{,}16$.

Für die Länge l_1 einer Schaufel ist $\frac{l_1}{b} = 0{,}37$ bis $0{,}33$, für die Breite b_1 derselben $\frac{b_1}{l_1} = 0{,}2$ bis $0{,}23$, für den Durchmesser d eines Rades $\frac{d}{b} = 0{,}73$ und für die Schaufelzahl n, $\frac{n}{d} = 0{,}95$ bis $0{,}85$, wo d in Fußen gegeben sein muß.

Die Geschwindigkeit v der Dampfschiffe ist 6 bis 12 Knoten, d. i. 10 bis 20 Fuß. Das Gewicht einer Schiffsdampfmaschine ist pr. Pferdekraft 1600 bis 2800 Pfund, eben so groß ist auch das Gewicht des leeren Schiffes; daher das ganze Gewicht eines Dampfschiffes pr. Pferdekraft 3200 bis 5600 Pfund.

§. 75. Wasserhebung.

Ein Mensch schöpft Wasser mit einem leichten Eimer und leistet täglich	313300	Fßpf.
Desgl. mit einer Wurfschaufel	327000	»
» » » Schwungschaufel. . . .	817500	»
» » einem Eimer an einem Schwengel	442800	»
» » » » an einem über eine Rolle gezogenen Seile	524600	»
» mit einem Eimer, das Seil über eine Welle mit Schwungrad und Kurbel gelegt, aus einem tiefen Brunnen . .	1'158000	»

Ein Mensch hebt Wasser mittels Eimer am Göpel	1'362500 Fßpf.
Ein Pferd desgl.	7'943000 »
Ein Ochse desgl.	7'629800 »
Ein Esel desgl.	2'275300 »
Geneigte Schaufelkunst, arbeitend mit dem Wirkungsgrade 0,38, bewegt durch einen Menschen	463000 »
Desgl., bewegt durch ein Pferd	3'059000 »
Vertikalstehende Schaufelkunst, durch einen Menschen bewegt	783000 »
Desgl., durch ein Pferd bewegt	4'837000 »
Kastenkunst, bewegt bei dem Wirkungsgrade 0,58, durch ein Pferd	4'571000 »
Desgl., durch einen Esel	2'275000 »
Archimedische Schnecke, bewegt durch einen Mann, beim Wirkungsgrade 0,70 bis 0,75 und Neigungswinkel 30° bis 45°	681000 »
Ein chinesisches Schöpf- und Steigrad, bewegt bei dem Wirkungsgrade 0,58 durch einen Mann	987000 »
Ein Schöpf- und Laufrad, bewegt bei dem Wirkungsgrade 0,80 durch einen Mann	1'437000 »
Ein Schöpfrad, nach Perronnet, mit 12 Spiralgängen, bewegt durch 12 Arbeiter, gibt tägliche Leistung pr. Mann	1'753000 »

Für den hydraulischen Widder hat man nach Eytelwein, wenn Q das unten abfließende Betriebswasserquantum, Q_1 das oben ausfließende Hubwasserquantum, h die Fallhöhe von der Oberfläche des Aufschlagwassers bis Mitte der Mündung des Sperrventiles und h_1 die Steighöhe von jener Oberfläche bis Ausmündung des Steigrohres bezeichnet, und wofern $\frac{h_1}{h}$ innerhalb 1 und 20 liegt, den Wirkungsgrad $\eta = \frac{Q_1 h_1}{Q h} = 1{,}12 - 0{,}2 \sqrt{\frac{h_1}{h}}$.

Es ist hiernach für

$\frac{h_1}{h} = 1$	2	4	8	12	16	20
$\eta = 0{,}92$	0,84	0,72	0,56	0,43	0,32	0,23

also der Wirkungsgrad um so kleiner, je höher das Wasser steigen muß. Es ist zweckmäßig, die beiden Ventile des Stoßhebers möglichst leicht zu machen und sie einander möglichst nahe zu legen. Die Weite der Leitröhre ist $d = \frac{\sqrt{60(Q+Q_1)}}{21}$ Zoll, wo Q und Q_1 in Cubikzollen auszudrücken sind; die Weite der Mündung des Sperrventiles soll man eben so groß machen; das Steigrohr und die Mündung des Steigventiles kann man halb so weit machen als die Leitröhre. Den Inhalt des Windkessels soll man dem der Leitröhre gleich nehmen. Die Länge der Leitröhre in Fußen ist = der Länge der Steigröhre $+ \frac{2h_1}{h}$ zu nehmen.

Die vorzüglichsten Mittel zum Wasserheben sind die Pumpen. Bei den Pumpen mit Ventilkolben ist die Kraft zum Aufziehen ziemlich constant, und zwar $= Fh\gamma$, wenn F die Fläche, h die ganze Förderhöhe von Unter- bis Oberwasserspiegel gemessen, und γ die Dichtigkeit des Wassers bezeichnet; die Kraft beim Niedergang ist dagegen unbedeutend und um so kleiner, je langsamer die Bewegung erfolgt und je weiter die Ventillöcher im Kolben sind. Bei der Pumpe mit massivem Kolben ist die mittlere Kraft zum Hingange $P_1 = Fh_1\gamma$ und die zum Rückgange $P_2 = Fh_2\gamma$, wobei h_1 die Höhe des mittleren Kolbenstandes über dem Unterwasserspiegel und h_2 die Tiefe desselben unter der Ausgußmündung der Steigröhre bezeichnet. Ist s der Kolbenhub und n die Anzahl der Spiele pr. Minute, so hat man das theoretische Arbeitsquantum pr. Secunde in beiden

Fällen: $L = \frac{n}{60} . F s h \gamma$, oder, da s das im Durchschnitt pr. Secunde gehobene Wasserquantum,

$$Q = \frac{n}{60} F s \text{ ist, } L = Q h \gamma.$$

Wegen der Kolbenreibung und wegen anderer hydraulischen Hindernisse ist aber das effective P und L um mindestens 15 Procent größer zu nehmen. Dagegen ist das effective Wasserquantum Q_1 mindesten um 5 Procent, meist aber um 10, und nicht selten sogar um 20 Procent kleiner als das theoretische Quantum Q. Nimmt man diesen Verlust 15 Procent an, so erhält man:

$$Q_1 = 0{,}85\, Q = 0{,}85 \frac{n}{60} F s.$$

Die mittlere Kolbengeschwindigkeit $v = \frac{n s}{60}$ soll bei der besten Liderung und Ventilirung $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Fuß, außerdem aber $\frac{3}{4}$ bis $\frac{5}{4}$ Fuß betragen, damit weniger Wasser zurückfällt. Aus Q und v bekommt man den nöthigen Kolbendurchmesser d mittels der Formel:

$$d = 14{,}7 \sqrt{\frac{Q_1}{v}} \text{ Zoll.}$$

Den Hub nimmt man bei Handpumpen nur $\frac{1}{2}$ bis 1 Fuß; bei Radkünsten aber 3 bis 4 Fuß, bei Dampf- und Wassersäulenkünsten sogar 6 bis 10 Fuß.

Die Saug- und Steigröhren kann man $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$ so weit nehmen, die Ventilöffnungen sind möglichst groß und der schädliche Raum über dem Saugventil ist möglichst klein zu machen. Die Saughöhe muß einige Fuß kleiner als der Wasserbarometerstand ($a = 32{,}84$ Fuß) sein, und zwar um so kleiner, je größer der schädliche Raum und je größer die Geschwindigkeit des Kolbens ist.

Die tägliche Leistung eines Arbeiters an einer Pumpe von circa 3 Zoll Kolbendurchmesser ist effective 1'000000 Fußpfund = 15000 Fußcubikfuß zu rechnen.

Bei den Feuerspritzen kann man eine Kolbengeschwin-

digkeit von 1 bis $1\frac{1}{4}$ Fuß voraussetzen und den Hebelarm der Kraft 5mal so groß annehmen als den der Last. Der Mensch kann hier, natürlich nur auf kürzere Zeit, unmittelbar mit 30 Pfund und folglich mittels des Kolbens mit $5 \,.\, 30 = 150$ Pfund Kraft wirken.

Die Steighöhe h des Strahles ist bei Tragspritzen 50, bei Fahrspritzen aber 100 Fuß anzunehmen. Nehmen wir der Hindernisse wegen dieselbe noch um 30 Procent größer an, so erhalten wir die Pressung im Windkessel pr. Quadratzoll $p = \frac{65.66}{144} = 30$ Pfund für Trag- und 60 Pfund für Fahrspritzen, und es ist hiernach die Kolbenfläche für jeden Mann $= {}^{150}/_{30} = 5$ Quadratzoll im ersten und $2\frac{1}{2}$ Quadratzoll im zweiten Fall. Für eine Spritze mit 16 Mann ist nun die ganze Fläche von jedem der beiden Kolben: $F = \frac{2{,}5\,.\,16}{2} = 20$ Quadratzoll und daher der Durchmesser eines Druckkolbens: $d = 5{,}05$ Zoll. Das pr. Minute ausgetriebene Wasserquantum ist hiernach bei $1\frac{1}{4}$ Fuß Kolbengeschwindigkeit: $Q = 0{,}8 \,.\, {}^{5}/_{4} \,.\, 60 \,.\, {}^{20}/_{144} = 8\frac{1}{3}$ Cubikfuß. Der Kolbenhub s ist bei Tragspritzen $\frac{1}{2}$, bei Fahrspritzen 1 Fuß, die Weite der Schläuche 2 bis 3 Zoll und die Weite der Mündungen $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$ Zoll. Endlich der Fassungsraum des Windkessels ist gleich dem Vier- bis Fünffachen des Pumpencylinder.

§ 76. Gebläse- und Wettermaschinen.

Ist p die Pressung und γ die Dichtigkeit der äußeren Luft, p_1 und γ_1 aber Pressung und Dichtigkeit der inneren Gebläseluft (im Regulator), ferner Q das Windquantum, gemessen unter dem äußeren und Q_1 dasselbe, gemessen unter dem inneren Drucke, so hat man

$$Q p = Q_1 p_1 \text{, so wie } Q \gamma = Q_1 \gamma_1$$

und die entsprechende theoretische Leistung des Gebläses

$$L = 144\,Q p\ log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 144\,Q_1 p_1\ log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) \text{ Fßpf.}$$

(s. S. 442).

Ist b der Barometer- und h der Manometerstand, so hat man auch $\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b}$ und daher

$$L = 144\,Qp\ log.\,nat.\left(1 + \frac{h}{b}\right), \text{ annähernd}$$

$$= 144\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\frac{h}{b}\,Qp,$$

oder bei sehr kleinen Pressungen:

$$L = 144\,\frac{h}{b}\,Qp = 144\,Qh\gamma,$$

wenn h in Zollen ausgedrückt wird und γ das Gewicht eines Cubikzoll Quecksilbers bezeichnet; oder

$$L = Qh\gamma,$$

wenn h in Fußen ausgedrückt wird und γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, womit das Manometer gefüllt ist, bezeichnet. Z. B. ein Gebläse, welches pr. Secunde ein Windquantum Q von 40 Cubikfuß liefert und den Wind bis auf $^7/_6$ Atmosphären verdichtet, erfordert die theoretische Leistung:

$L = (1 - {}^1/_{12}) \,.\, {}^{40}/_6 \,.\, {}^{28}/_{12} \,.\, 13{,}6 \,.\, 66 = 12800$ Fußpfund
$= 25$ Pferdekräfte.

Der Wirkungsgrad oder die Zahl, womit diese theoretische Leistung zu dividiren ist, um die effective zu erhalten, fällt bei Kolbenmaschinen, wie z. B. Cylindergebläsen 0,5 bis 0,6; bei Ventilatoren nur 0,20 bis 0,25 und bei den Wassertrommelgebläsen gar nur 0,10 bis 0,15 aus. Bei den Cylindergebläsen wird er besonders dadurch herabgezogen, daß das effective ausgeblasene Windquantum nur 0,6 bis 0,7 von dem dem Kolbenspiele entsprechenden theoretischen Windquantum und bei unvollkommenem Klappenapparat gar noch weniger beträgt.

Bei einem Wassertrommelgebläse ist die Einfallröhre 25 bis 35 Fuß lang und 6 bis 10 Zoll weit. In Laufen am Rheinfall liefert ein Wassertrommelgebläse mit

5 Einfallröhren hinreichenden Wind für einen Holzkohlen-Hohofen. In Poullaouen liefert ein solches Gebläse mit einer 25 Fuß langen und 10 Zoll weiten Einfallröhre pr. Minute 250 Cubikfuß Wind von 26 bis 28 Zoll Pressung Wassersäule.

Ein Ventilator hat 3 bis $4\frac{1}{2}$ Fuß Höhe, $\frac{3}{4}$ bis $\frac{5}{4}$ Fuß Weite und macht pr. Minute 600 bis 1200 Umdrehungen. Bei der Umfangsgeschwindigkeit v desselben, ist der Manometerstand theoretisch $h = \frac{v^2}{2g\varepsilon}$, wenn ε das Verhältniß der Dichtigkeit der Manometerfüllung zu der der Luft bezeichnet. Für Wassermanometer hat man $h = 0{,}00024\, v^2$ Zoll, z. B. für $v = 100$ Fuß, $h = 2{,}4$ Zoll. Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit des Windes ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Rades. Das Windquantum, welches ein Ventilator bei 3 bis 4 Linien Quecksilber Pressung pr. Minute liefert, ist bei $4\frac{1}{2}$ Zoll Düsenweite circa 600 Cubikfuß; und hinreichend für einen Cupolofen mit 1000 bis 1200 Pfund Eisen. Die Umtriebsmaschine muß eine Leistung von 2 bis $2\frac{1}{2}$ Pferdekräfte verrichten.

Bei einem Cylindergebläse ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit $v = 2$ bis $3\frac{1}{2}$ Fuß, und der Kolbenweg $s =$ der Weite d des Cylinders. Nimmt man das effective Windquantum $Q_2 = 0{,}70\, Q$, so erhält man für den Kolbendurchmesser eines doppeltwirkenden Cylindergebläses:

$$d = s = 16{,}2 \sqrt{\frac{Q_2}{v}} \text{ Zoll.}$$

Der Querschnitt der Saugventile ist $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{12}$ und der Druckventile $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{24}$ von der Kolbenfläche. Der Querschnitt der Windleitung ist $\frac{1}{20}$ von der Summe der Kolbenflächen des ganzen Gebläses, und der Querschnitt der Düsen bestimmt sich durch die Pressung in der Windleitung und durch das Windquantum Q_2; die gewöhnlichen Durchmesser betragen 2 bis 3 Zoll.

Der Manometerstand ist bei Gebläsen für Hohöfen:

mit weichen Holzkohlen	1	bis	1¼	Zoll,
» harten Holzkohlen	1¼	»	2¼	»
» Koks	3	»	7	»

Bei einem Holzkohlenofen kann man auf jeden Quadratfuß des größten Querschnittes (unmittelbar über der Rust) stündlich rechnen: 18 Pfund Kohlen, 11 Pfund Eisen und 60 . 37 Cubikfuß Wind; dagegen bei einem Kokshohofen: 10 Pfund Koks, 4¼ Pfund Eisen und 60 . 20 Cubikfuß Wind. Bei den kleinsten Holzkohlenöfen ist das ganze Windquantum pr. Minute nur 700 Cubikfuß; bei den größten Koksöfen dagegen 3000 bis 4000 Cubikfuß.

Die Geschwindigkeit v, mit welcher der Wind bei einer bestimmten Pressung aus den Düsen strömt, bestimmt sich nach den Formeln in §. 38, und hieraus der Querschnitt F_2 sämmtlicher Düsen mittels der Formel $F_2 = \frac{Q_2}{v}$.

Bei Anwendung von erhitzter Gebläseluft zu 300° Wärme wird nicht allein an Brennmaterial, sondern auch am Windquantum erspart. Man verbraucht hier für einen Cubikfuß erhitzten Wind $\frac{1}{100}$ Pfund Holz = $\frac{1}{150}$ Pfund Steinkohlen bei 8 bis 10 Quadratfuß Erwärmungsfläche.

Der Windregulator soll 40= bis 60mal so groß sein als die pr. Secunde ein= und ausströmende Windmenge.

§. 77. Hammerwerke und Walzwerke.

Hammer= und Walzwerke sind vorzüglich Stößen ausgesetzt, weshalb man alle Theile derselben um die Hälfte stärker macht als bei Maschinen, wo Stöße nicht vorkommen. Namentlich sind die kostspieligen und nicht leicht zu ersetzenden Theile sehr stark, gedrungen und ungerippt herzustellen. Nur die Kuppelungen sind verhältnißmäßig schwach zu machen, damit durch deren Brechen das Zubruchegehen werthvollerer Theile verhindert wird. Die Fundamente müssen aus Holz hergestellt werden, um möglichste Elasticität in die Maschine zu bringen.

Ein großer Stirnhammer, wie er beim Eisenpuddeln gebraucht wird, wiegt sammt Helm 6000 bis 10000 Pfund, hat einen Hub von 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuß, macht pr. Minute 80 bis 100 Schläge, und erfordert eine Betriebskraft von 30 bis 40 Pferdekräften.

Ein Aufwerfhammer, wie er vorzüglich beim Zängen der Luppen vorkommt, wiegt sammt Helm, Hülse u. s. w. 500 bis 1200 Pfund, hat in der Mitte seiner Bahn $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Fuß Hub, macht pr. Minute 80 bis 160 Schläge und erfordert eine Betriebskraft von 8 bis 12 Pferdekräften.

Die Schwanzhämmer sind nach der Art der darzustellenden Eisensorten sehr verschieden. Zu den stärksten Eisensorten sind Hämmer von 500 bis 800 Pfund Gewicht nöthig, welche bei einem Hub von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß pr. Minute 100 bis 150 Schläge thun, zu den schwächsten Eisensorten hingegen hat man Hämmer von 100 Pfund, welche bei einem Hub von $\frac{3}{4}$ bis 1 Fuß pr. Minute 250- bis 300mal schlagen. Durch jene kann man täglich 25000, durch diese 6000 Pfund Eisen schmieden. Die Betriebskraft für diese Hämmer ist 4 bis 8 Pferdekräfte.

Die in neueren Zeiten in Anwendung gekommenen Dampfhämmer wiegen 2000 bis 8000 Pfund und machen bei dem größten Hube von 2 bis 3 Fuß pr. Minute 80 Schläge.

Anlangend das Gewicht G vom Schwungrade eines Hammerwerkes, so kann man es unter der Voraussetzung, daß seine lebendige Kraft 5- bis 10mal so groß als die effective Leistung L der Umtriebsmaschine ist, bestimmen. Ist c die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades und gibt man L in Pferdekräften, so kann man hiernach im Mittel

$G = \frac{120000\,L}{c^2}$ Pfund setzen.

Gewöhnlich drückt man auch G durch den Halbmesser a des Rades aus und nimmt:

für die großen Stirnhämmer $G = \frac{400000}{a^2}$ bis $\frac{600000}{a^2}$ Pf.,

» » Aufwerfhämmer . . $G = \frac{300000}{a^2}$ Pf., und

» » Schwanzhämmer . $G = \frac{120000}{a^2}$ bis $\frac{180000}{a^2}$ Pf.

Die großen Luppen- oder Zängwalzwerke bestehen aus zwei Paar Walzen von 5 Fuß Länge, 1½ Fuß Durchmesser und ¾ Fuß Zapfenstärke, welche pr. Min. 20 bis 40 mal umlaufen und eine Umtriebskraft von 20 Pferdekräften, oder mit Inbegriff eines Steinhammers und Quetschers, eine solche von 40 Pferdekräften erfordern.

Die Grobeisenwalzwerke bestehen gewöhnlich aus drei Walzenpaaren, den Streck- Form- und Polirwalzenwerken. Die Walzen haben 1¼ Fuß Durchmesser, ¾ Fuß Zapfenstärke, und 4½ Fuß Länge. Sie machen pr. Minute 70 bis 80 Umdrehungen und erfordern eine Betriebskraft von 20 bis 35 Pferdekräften.

Die Feineisenwalzwerke bestehen aus zwei Werken mit je drei Walzen mit größeren quadratischen und rectangulären Cannelirungen, und aus zwei Werken mit je zwei Walzen mit feineren runden und quadratischen Cannelirungen. Die Durchmesser der Walzen betragen ⅔ bis ¾ Fuß, die Länge der ersteren 2 Fuß und die der letzteren nur ½ Fuß. Die Umdrehungszahl pr. Minute ist 200 bis 250 und die Betriebskraft 15 bis 20 Pferdekräfte.

Bei einem Eisenbahnschienenwalzwerk haben die Walzen 1⅓ bis 1½ Fuß Stärke und 3½ bis 4¼ Fuß Länge, und es laufen dieselben pr. Minute 55 bis 65mal um, während die Umtriebsmaschine 40 bis 45 Pferdekräfte Arbeit verrichtet.

Die Blechwalzwerke haben bei einer Blechbreite von 1¼ bis 5½ Fuß, Walzen von 1½ bis 6 Fuß Länge, ¾ bis 2 Fuß Durchmesser, und ⅔ bis 1 Fuß Zapfenstärke; sie machen bei der Erzeugung von dünnem Bleche pr. Minute

20, und bei der von dickem Bleche 40 Umdrehungen; die Betriebskraft ist im ersten Falle 20, im letzten 60 Pferdekräfte.

Eisenschneidewerke bestehen aus Scheiben von 1 bis 1¼ Fuß Durchmesser; sie machen pr. Minute 40 bis 50 Umdrehungen und erfordern 4 bis 5 Pferdekräfte.

Das Gewicht eines Schwungrades für ein Walzwerk ist durch die Formel $G = \frac{90000\,L}{n\,c^2}$ bestimmt, in welcher einzusetzen ist,

für Maschinen von 80 bis 100 Pferdekräften, $n = \frac{1}{4}$
» » » 60 Pferdekräften $n = \frac{1}{2}$
» » » 20 » $n = \frac{1}{20}$

Eine Bohrmaschine zum Ausbohren von Gebläse-, Dampfcylindern u. s. w. erfordert bei der Umfangsgeschwindigkeit von 0,11 Fuß eine Umtriebskraft von 2 bis 3 Pferdekräften. Ein Kanonenbohrwerk erfordert bei 10 bis 12 Umdrehungen pr. Minute 3 bis 4 Pferdekräfte. Eine Bohrbank für Flintenläufe bei 328 Umdrehungen pr. Minute = ⅜ Pferdekraft.

§. 78. Mühlen.

1. Mahlmühlen.

Ist d der Durchmesser eines Mühlsteines in Fußen, so läßt sich setzen

das Gewicht des Mühlsteins = $141\,d^2$ Pfund,
das stündliche Mahlquantum = $15{,}6\,d^2$ Pfund,

und bei 25½ Fuß Umfangsgeschwindigkeit der entsprechende Arbeitsaufwand, $L = 0{,}245\,d^2$ Pferdekräfte.

Hiernach ist für Mühlsteindurchmesser

von 3½ Fuß $L = 3$ und
von 4 » $L = 4$ Pferdekräfte.

Nach Egen schrotet die Feldmühle bei Soest in Westphalen auf einem Mahlgange stündlich 182 Pfund Gerste,

macht 75 Umdrehungen pr. Minute und erfordert 2 Pferdekräfte Arbeit; auf einem anderen Gange vermahlt sie hingegen stündlich 80 Pfund Weizen, wobei sie 64 Umdrehungen pr. Minute macht und 2,2 Pferdekräfte beansprucht. Nach Scholl vermahlt die Dampfmühle in Coblenz auf 4 Mahlgängen, 1 Rollgang, Cylinderbeutel und Sackzug in 13 Stunden, nach 4- bis 5maligem Aufschütten und bei 20 bis 22 Pferdekräften, 63 bis 68 Scheffel Roggen, à 85 Pfund, und liefert

	75,3	Procent	feines Mehl
	3,1	»	Nachmehl
	18,0	»	Kleie
	1,8	»	Fußmehl
und	1,7	»	Rollstaub und Verlust.

Amerikanische Mühlen, mit einmaligem Aufgeben, vermahlen pr. Pferdekraft stündlich 45 bis 76 Pfund Weizen. Bei diesen Mühlen ist der Durchmesser des Steins 4 Fuß, die Umfangsgeschwindigkeit desselben 25 Fuß, und die Betriebskraft pr. Mahlgang 4 Pferdekräfte.

Eine excentrische Mühle nach Bogardus soll bei 300 Umdrehungen pr. Minute mittels 2 Pferdekräfte stündlich 1000 Pfund Roggen schroten, und mittels 4 Pferdekräfte 880 Pfund Roggen vermahlen.

Eine Dampfwalzenmühle von 24 Pferdekräften soll wöchentlich, Tag und Nacht arbeitend, 171000 Pfund Weizen vermahlen.

2. Lohmühlen.

Eine Maschine zum Zerhacken der Rinde in Stücke von 1 Zoll Länge macht pr. Minute 140 Schnitte und liefert bei 4 Pferdekräften stündlich 2000 bis 2200 Pfund. Ein Lohgang mahlt mit einem Läufer von 46 Zoll Durchmesser und 14 Zoll Höhe bei 100 Umdrehungen pr. Minute mittels 5 Pferdekräften stündlich 440 Pfund gehackte Rinde.

3. Oelmühle.

Man kann annehmen, daß durch eine Pferdekraft stündlich ½ Scheffel (43 bis 45 Pfund) Raps vollständig verarbeitet wird. Uebrigens erfordern 100 Theile Raps dieselbe Betriebskraft wie 66 Theile Lein, 80 Theile Madia, 120 Theile Wallnußkerne.

Zu den Quetschwalzen rechnet man ¾ bis 2, zu einem Oelgang 3 Pferdekräfte. Mittels eines Oelganges wird stündlich ein Scheffel Raps bei 1,2 Betriebspferdekräfte verarbeitet.

4. Schneide- oder Sägemühlen.

Die gewöhnlichen deutschen Sägemühlen machen pr. Minute 80 bis 90 Schnitte von 1¾ Fuß Länge, sie greifen pr. Schnitt 0,8 bis 1 Linie vor und liefern stündlich 30 Fuß Bretlänge. Mit einer Pferdekraft werden netto stündlich 44 Quadrat-Fuß trockenes Eichenholz geschnitten, brutto aber hat man nur 22 Quadratfuß Eichenholz, oder 30 Quadratfuß Tannenholz, oder 1 Quadratfuß Marmor zu rechnen.

Fournirsägemühlen liefern pr. Pferdekraft stündlich 50 bis 70 Quadratfuß. Kreissägen von 2 Fuß Durchmesser liefern bei 250 bis 300 Umdrehungen pr. Minute 40 bis 60 Quadratfuß Schnittfläche. Die Dicke des Sägeblattes ist bei gewöhnlichen Schneidemühlen ¾ bis 1¼ Linie, bei Fournirschneidemühlen aber 0,15 Linie, und bei den Kreissägen 1 bis 1⅛ Linie. Die Breite des Schnittes ist bei den auf- und niedergehenden Sägen einmal, bei den Kreissägen um die Hälfte dicker als die Dicke der Säge.

Eine Schneidemühle in Metz mit einem 819 Pfund schweren Gatter lieferte an einem trocknen Eichenklotze von 8½ Zoll Stärke, bei 3⅓ Pferdekräften, in 88 Schnitten pr. Minute mittels 1 Sägeblatt 29,8 Quadratfuß Schnittfläche; dagegen bei 3,7 Pferdekräften, in 79 Schnitten pr. Minute mittels 4 Sägeblätter 4 . 24,5 = 98 Quadratfuß Schnittfläche; ferner an einem ganz trocknen 12 Zoll dicken

Eichenklotze, bei 4,5 Pferdekräften, in 90 Schnitten pr. Minute mittels 4 Sägeblätter 4 . 20,1 = 80,4 Quadratfuß Schnittfläche, und endlich an einem 23 Zoll dicken Buchenklotze, bei 3 Pferdekräften, in 88 Schnitten pr. Minute mittels 1 Sägeblatt, 54,8 Quadratfuß Schnittfläche. Die Schnittbreite betrug durchgängig 1,84 Linien. Die Anwendung mehrerer Sägeblätter in einem einzigen Gatter ist hiernach von sehr großem Vortheile.

Eine oberschlägige Mühle gibt nach Gerstner an einem 15 Zoll dicken weichen Holzklotze, bei 8,9 Pferdekräften, in 98 Schnitten pr. Minute 76 Quadratfuß Schnittfläche.

Das Gewicht des Schwungrades für eine Sägemühle ist durch die Formel $G = \frac{600000}{c^2}$ Pfund zu bestimmen, und das Gegengewicht für das Sägegatter durch die Formel $G_1 = \frac{440}{a}$ Pfund, wenn a den Hebelarm dieses Gewichtes bezeichnet.

Die Kurbelhöhe muß mindestens der halben Klotzdicke gleich sein, beträgt aber gewöhnlich 1 bis 1½ Fuß.

5. Papiermühlen.

Ein Holländer erfordert 4 bis 5 Pferdekräfte und liefert stündlich 4 bis 4½ Pfund gemahlene Lumpen. Eine englische Papiermaschine erfordert 5 bis 8 Pferdekräfte und liefert in 10 Stunden 72,000 Quadratfuß = 700 bis 1000 Pfund Papier. Vier Holländer und 1 Papiermaschine bedürfen pr. Minute durchschnittlich 15 C.-Fuß reinstes Wasser. Ein Satinirwalzwerk mit 3 Walzen hat 1½ Pferdekräfte. Zum Trocknen des Papiers gehört ein dreipferdiger Dampfkessel.

6. Pochmühlen.

Der Wirkungsgrad eines Pochwerkes oder einer Pochmühle ist 0,72 und mit Einschluß eines 20 Fuß hohen oberschlägigen Wasserrades 0,57. Ist G das Gewicht eines

Pochstempels, h der Hub desselben, n die Anzahl der Stempel, n_1 die Hübigkeit, d. i. die Anzahl der Heblinge eines Stempels, und u die Anzahl der Umdrehungen der Heblingswelle pr. Minute, so hat man folglich den effectiven Arbeitsaufwand für ein Pochwerk:

$$L = 0{,}72 \frac{n\, n_1\, u}{60}\, G h = 0{,}012\, n\, n_1\, u\, G\, h$$ zu setzen.

Gewöhnlich ist $G = 250$ bis 300 Pfund, $h = 1$ bis 1½ Fuß und $n_1 u$ 40 bis 50. Den mechanischen Halbmesser der Heblingswelle nimmt man $= \frac{1}{4} n_1 h$. Ein Stempel zerpocht täglich ½ bis 1 zweispännige Fuhre Pochgänge.

§. 79. Manufacturen.

1. Baumwollen-Manufactur.

Bei den Garnnummern

10	20	40	60	100	140	
treibt eine Pferdekraft						
112	210	280	328	374	400	Mulespindeln
und um täglich 100 Pfund Mule-Ketten-Garn zu erzeugen, ist die Betriebskraft						
1,46	2,46	5,92	11,49	20,11	32,29	Pferdekräfte

nöthig.

Eine Maschinenweberei, bestehend aus 60 Webstühlen, 5 Schlichtmaschinen und 1 Zettelmaschine erfordert 5 Pferdekräfte. Eine Appreturmaschine erfordert eine Pferdekraft, und ein Wäschrad, durch welches stündlich 32 Stück ⁵⁄₄ellige Kattune gewaschen werden, bedarf 2 Pferdekräfte.

2. Flachs-Manufactur.

Man rechnet pr. Pferdekraft 100 Feinspindeln. Eine Maschine von 36 Pferdekräften treibt 2500 Spindeln für

Flachs und 1500 Spindeln für Werg, und verspinnt in einem Jahre, zu 300 Tagen gerechnet, 3000 Centner Flachs.

3. Schaafwollen-Manufactur.

Eine Betriebskraft von 1,427 Pferdekräften treibt 3 Spuhlstühle mit 64 Spuhlen; ferner 0,259 Pferdekräfte treiben einen Spinnstuhl für die Kette mit 220 Spindeln für Garn Nr. 6, und 1,273 einen Spinnstuhl (Vororgan) mit 300 Spindeln für Garn Nr. 50.

Eine Wollwaschmaschine bedarf $^2/_3$ Pferdekräfte und wäscht täglich 220 bis 250 Pfund Wolle.

Ein Wollwolf beansprucht $^1/_2$ bis $^5/_4$ Pferdekräfte; eine Schrubbelmaschine $^1/_2$, und eine deutsche Walke- oder Plettemühle $1^1/_2$ Pferdekraft; dagegen

Ein Patent-Walkkumpf erfordert 2 Pferdekräfte, und eine Walke nach Benoit 1 Pferdekraft.

Eine Rauhmaschine benöthigt $^1/_2$ bis $^2/_3$ Pferdekraft.

Eine 6pferdige Dampfmaschine treibt 6 Rauh-, 6 bis 7 Scheer- und 1 Bürstemaschine, so wie eine Kardenfege.

Verbesserungen.

Seite 154. Zu Zeile 5 von oben: 1 Arschine = 4 Tschetwert = 16 Werschock.

» 234. Zeile 10 von unten ist (= y) zu streichen.

» 257 }
» 259 } sind die Figuren 50 und 52 zu vertauschen.

» 319. Zeile 7 von oben, ist statt *colg. p*, *colg. d* zu setzen.

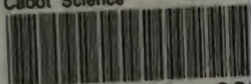
» 381. Zeile 16 von unten, ist 1,2059 statt 1,0259 zu setzen.

» 520. Zeile 9 von unten 55,5 . 3 statt 55,5 : 3.
» 8 » » 23,8 . 3 » 23,8 : 3.
» 9 » » 2,727 . 3 » 2,727 : 3.

» 554. » 6 von oben: Zapfenstärke statt Zapfenhalbmesser.

English acre = 43 560 sq. ft.




Eng 348.48.3
Der ingenieur.
Cabot Science
3 2044 091 88